МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #1.

Пусть $a = 2^{x_a} \cdot 3^{y_a} \cdot 5^{z_a} \cdot V_a$; $(x_a, y_a, z_a \in \mathbb{Z}^+,\ V_a \in \mathbb{N})$

$b = 2^{x_b} \cdot 3^{y_b} \cdot 5^{z_b} \cdot V_b$; — // —

$c = 2^{x_c} \cdot 3^{y_c} \cdot 5^{z_c} \cdot V_c$.

Тогда $ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 3^{y_a+y_b} \cdot 5^{z_a+z_b} \cdot V_a \cdot V_b \ \vdots\ 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$.

Значит, $x_a + x_b \geq 9$; $y_a + y_b \geq 10$; $z_a + z_b \geq 10$.

Аналогично, $bc \ \vdots\ 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow x_b + x_c \geq 14$; $y_b + y_c \geq 13$; $z_b + z_c \geq 13$.

$ac \ \vdots\ 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow x_a + x_c \geq 19$; $y_a + y_c \geq 18$; $z_a + z_c \geq 30$.

Сложив нерав-ва с x, получаем:

$x_a + x_b + x_b + x_c + x_a + x_c = 2(x_a + x_b + x_c) \geq 9 + 14 + 19 = 23 + 19 = 42$

Аналогично,

$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 18 = 41$

$2(z_a + z_b + z_c) \geq 10 + 13 + 30 = 53$

Значит, $x_a + x_b + x_c \geq 21$; $y_a + y_b + y_c \geq 20{,}5$ (а значит и 21, т.к. целое);

$z_a + z_b + z_c \geq 26{,}5$ (а значит и 27, т.к. целое).

В то же время $z_b \geq 0$, $z_a + z_c \geq 30 \Rightarrow z_a + z_b + z_c \geq 30$.

Значит, $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 3^{y_a+y_b+y_c} \cdot 5^{z_a+z_b+z_c} \cdot V_a V_b V_c \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$; $b = 2^2 \cdot 3^2$, $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

Дано:

ΔABC

$\angle C$ прямой

CD - высота

$AD:DB = 3:1$

Окр. ω касается BC в B,

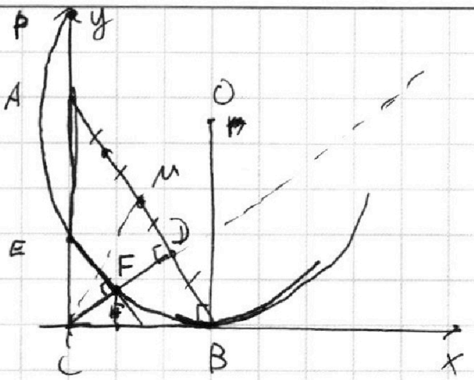
$CD \cap \omega = F$, $AC \cap \omega = E$,

$EF \parallel AB$.

Найти:

~~Найти~~ $\dfrac{S(CEF)}{S(ABC)}$.

$C=(0,0)$



Решение:

Пусть CM - медиана.

в треуг. CMB высота CD и является медианой, значит ~~...~~ $CM = CB$.

Но $CM = MB$, т.к. $\angle ACB = 90°$.

Значит, ΔCMB равносторонний, т.е. $\angle CBM = 60°$.

$AC = BC \cdot \operatorname{tg} 60° = BC\cdot\sqrt{3}$.

Пусть $BC = a$, радиус окружности r, $CE = x$.

Из степени точки C отн. окружности ω:

$CE\cdot(2r - CE) = a^2$ (если AC вторично пересекает ω в точке P, то ω симметрична отн. серпера к EP, как и AC, значит ~~будет~~ y-координата центра окружности ω - середина y-координат E и P}, т.е. $r = \dfrac{CE+CP}{2}$, т.е. $CP = 2r - CE$).

$x\cdot(2r - x) = a^2$ ~~Но $r^2 = a^2+(r-x)^2 \Leftrightarrow r^2 = \ldots$~~

$\angle ECF = 90° - \angle CDB = 90° - 30° = 60°$. $CF = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{x}{2}$, т.к. $CP \perp EF$, т.к. ~~...~~

т.к. $CF \perp AB$ и $EF \parallel AB$. $x(F) = CF\cdot\cos 30° = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2} = \dfrac{x\sqrt3}{4}$.

$y(F) = CF\cdot\sin 30° = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{4}$. $OF^2 = \left(r - \dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(a - \dfrac{x\sqrt3}{4}\right)^2 = r^2$.

Задача №2 продолж.

$OF^2 = \left(r - \frac{x}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \cancel{r^2} - \frac{rx}{2} + \frac{x^2}{16} + a^2 - \frac{ax\sqrt{3}}{2} + x^2 \cdot \frac{3}{16} = r^2$

$\Updownarrow$

$\frac{4x^2}{16} - \frac{rx}{2} - \frac{ax\sqrt{3}}{2} + a^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\frac{x^2}{4} - (r + a\sqrt{3})\frac{x}{2} + a^2 = 0$

Но ~~...~~ $2rx - x^2 = a^2$

$\Updownarrow$

$r = \frac{a^2 + x^2}{2x}$

Отсюда $\frac{x^2}{4} - \left(\frac{a^2+x^2}{2x} + a\sqrt{3}\right)\frac{x}{2} + a^2 = 0$

$\Updownarrow$ (домножили на 4)

$x^2 - (a^2 + x^2) - 2ax\sqrt{3} + \cancel{\ldots}\, 4a^2 = 0$

$\Updownarrow$

$3a^2 - 2ax\sqrt{3} = 0$

$\Updownarrow$

$x = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

Но $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ с коэфф. $\frac{LE}{AB} = \frac{CE}{2BC} = \frac{x}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Значит, $\frac{S(CEF)}{S(ABC)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$. $\frac{S(ABC)}{S(CEF)} = \frac{16}{3}$.

~~Ответ: $\frac{3}{16}$.~~

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{16}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\left(\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ $5\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\Updownarrow$

$2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = x + 5\arccos(\cos x)$

$\Updownarrow$

$2\pi = x + 5\arccos(\cos x)$

① $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\arccos(\cos x) = x - 2\pi k.$

Значит, исходное ур-е ~~равносильно~~ становится:

$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$

$\Updownarrow$

$2\pi + 10\pi k = 6x$

$\Updownarrow$

$\pi + 5\pi k = 3x$

$\Updownarrow$

$x = \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3}.$

$2\pi k \le x < 2\pi k + \pi$

$\Updownarrow$

$2\pi k \le \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3} < 2\pi k + \pi$

$\Updownarrow$

$6k \le 1 + 5k < 6k + 3$

$\Updownarrow$

$k \le 1 < k + 3$

$\Updownarrow$

$-2 < k \le 1.$

Значит, $x \in \left\{-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.$

② $x \in [2\pi k - \pi; 2\pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$

$\arccos(\cos x) = 2\pi k - x.$

Значит, исходное ур-е становится:

$2\pi = x + 5\cdot(2\pi k - x)$

$\Updownarrow$

$4x = 10\pi k - 2\pi$

$\Updownarrow$

$x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (5k - 1)$

$2\pi k - \pi \le x < 2\pi k$

$\Updownarrow$

$2\pi k - \pi \le \frac{\pi}{2}(5k-1) < 2\pi k$

$\Updownarrow$

$4k - 2 \le 5k - 1 < 4k$

$\Updownarrow$

$-2 \le k - 1 < 0$

$\Updownarrow$

$-1 \le k < 1$

Значит, $x \in \left\{-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}.$

$$\boxed{\text{Ответ: } \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3b-ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3b-ax}{2} \\ y^2=\frac{9b^2-6abx+a^2x^2}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \leftarrow \text{кв. ур.} \\ x^2+y^2-12x+32 \end{array}\right. \end{cases}$$

4 корня могут быть только когда у обоих квадратных уравнений есть 2 различных корня, и их корни не совпадают.

Их корни не совпадают: $\nexists \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \nexists \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ 12x-41=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9\neq 0 \\ x\neq \frac{41}{12} \end{array}\right.$.

У 1-го есть 2 корня:

$$\left(1+\frac{a^2}{4}\right)x^2-\frac{3abx}{2}+\frac{9b^2}{4}-9=0$$

$$D=\frac{9a^2b^2}{4}-4\cdot\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{9b^2}{4}-9\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(9a^2b^2-(4+a^2)(9b^2-36)\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(9a^2b^2-9a^2b^2-36b^2-36a^2+36\cdot 4\right)=36-9a^2-9b^2>0.$$

У 2-го есть 2 корня:

$$\left(1+\frac{a^2}{4}\right)x^2-\left(\frac{3ab+24}{2}\right)x+\frac{9b^2}{4}+32=0$$

$$D=\frac{9a^2b^2}{4}+\frac{2\cdot 3ab\cdot 24}{4}+\frac{24^2}{4}-4\cdot(1+a^2/4)\left(\frac{9b^2}{4}+32\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(9a^2b^2+4\cdot 4\cdot 9ab+24^2-(4+a^2)(9b^2+128)\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(4\cdot 4\cdot 9ab+24^2-4\cdot 9b^2-128\cdot a^2-128\cdot 4\right)=36ab-9b^2-32a^2+16\cdot 9-16\cdot 8=$$

$$=36ab-9b^2-32a^2+16>0.$$

Значит, $a^2<4 \Leftrightarrow |a|<2$

$\cancel{9b^2<36}$

$$\exists b: \begin{cases} b^2<4-a^2 \\ 9b\cdot(4a-b)>32a^2-16 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Корни: $b=\frac{36^2a^2\pm 12^2\sqrt{a^2+4}}{18}$

$\Leftrightarrow 9b^2-36ab+32a^2-16<0$

$$D=(36a)^2-4\cdot 9\cdot(32a^2-16)=36\cdot(36a^2-32a^2+16)=$$
$$=36\cdot(4a^2+16)=12^2\cdot(a^2+4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #5

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ (\log_3 x)^4 + \dfrac{6}{\log_3 x} = \dfrac{\log_x(3^5)}{2} - 8 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ (\log_3 x)^5 + 6 = \dfrac{5}{2} - 8\log_3 x \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 2(\log_3 x)^5 + 7 + \cancel{8}^{16}\log_3 x = 0 \end{cases}$$

Возрастающая ф-ция,
т.к. сумма возрастающих

$$\log_3^4(\cancel{x}5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ (\log_3(5y))^4 + \dfrac{2}{\log_3(5y)} = \dfrac{11\log_{5y}(3)}{2} - 8 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ (\log_3(5y))^5 + 2 = \dfrac{11}{2} - 8\log_3(5y) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ 2(\log_3(5y))^5 - 7 + 16\log_3(5y) = 0 \end{cases}$$

Возрастающая ф-ция.

~~$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}$~~

Заметим, что
если x - корень первого ур-я, то $y = \dfrac{3^{-\log_3 x}}{5} = 1/5x$
- корень второго, и наоборот: если y - корень второго, то $x = 3^{-\log_3(5y)} =$
$= 1/5y$ - корень первого.

~~Доказательство~~
Пусть $z = \log_3 x$, $v = \log_3(5y)$
первое ур-е:
$2z^5 + 16z + 7 = 0$
второе:
$2v^5 + 16v - 7 = 0$.

При замене $v = -z$ 2-е переходит в первое, при замене $z = -v$ первое во второе.

~~Значит~~ Поскольку корень каждого ур-я единственный (слева возр. ф-ция*, справа 0), то если корень первого x, то корень второго $\dfrac{1}{5x}$.

$$xy = x \cdot \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1/5.}$

* ф-ция на ~~$-\infty$~~ $0+\varepsilon \to 0$ отрицательная, на ~~$+\infty$~~ положительна.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #6, пределы.

Посчитаем для каждого значения $f(B)$ от 0 до 60 кол-во подходящих пар (A, B) таких, что $f(A)-f(B)=33$. Это и будет ответ.

~~Выбрать B у нас есть~~

Пусть $f(B)=X$ тогда $F(A)=33+X$

Выбрать B у нас есть $K(x)$ способов.

Если $33+X>60$, то у нас 0 способов выбрать A, иначе ~~[illegible]~~ их $K(33+X)=K(x)$.

Значит, ответ равен $\sum\limits_{X=0}^{27}(K(x))^2=\sum\limits_{x=0}^{9}(K(3X))^2+\sum\limits_{x=0}^{8}(K(3X+1))^2+$

$+\sum\limits_{x=0}^{8}(K(3X+2))^2 = 10\cdot 15^2+9\cdot 14^2+9\cdot 14^2=10\cdot 15^2+18\cdot 14^2=$

$=2250+1764\cdot 2=2250+3528=5778.$

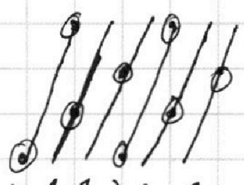
$\boxed{\text{Ответ: } 5778 \text{ способов}}$

$\cancel{14 \cdot 14}$

$\cancel{196}$

$196\cdot 9=$
$=1960-196$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ -\ 196 \\ \hline 1764 \end{array}$$



2 1 1 2 1 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

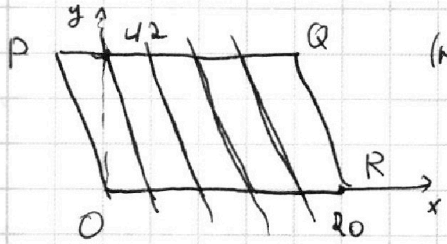
МФТИ

Задача #6, начало.

Пусть $f(A) = 3x(A) + y(A)$.

Нас ~~просят~~ просят посчитать кол-во целочисленных точек (A, B) в параллелограмме таких, что $f(A) - f(B) = 33$.

Заметим, что $\{M \mid f(M) = const\}$ — прямая $(3x+y=c \Leftrightarrow y = c-3x)$, с угловым коэфф. наклона -3. При этом сторона PO нашего параллелограмма параллельна каждой из этих прямых, т.к. $f(P) = f(O) = 0$.



(не в масштабе)

Значит, целочисленные решения $f(A) = c$ будут лежать внутри параллелограмма, если

1) $c \in [f(O); f(R)] = [0; 60]$

2) $y(A) \in [y(O); y(P)]_{\mathbb{Z}} = [0; \cancel{60}\,42]$

так как стороны PQ и OR параллельны оси Ox.

Посчитаем кол-во ~~точек~~ решений $f(A) = c$ внутри параллелограмма $(c \in [0;60])$. Пусть это кол-во будет $K(c)$.

~~$\# \{(x,y): 3x+y = c,\ y \in [0; 42],\ x,y \in \mathbb{Z}\}$~~

~~$y = \ldots,\ x \in [\ldots]$~~ $3x+y = c,\ y \in [0;42]_{\mathbb{Z}}$

$y = c - 3x;\ x \in \left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3}\right]$. Значит, это кол-во равно кол-ву целых точек на $\left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3}\right]$, т.е. 15 при $c \vdots 3$, иначе 14.

$$K(c) = \begin{cases} 15, & c \vdots 3 \\ 14 & \text{иначе} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} (x^2+y^2-9)=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$32+9-12x=0$

$41 \neq 12x$

$x \neq \frac{41}{12}$

$y=\frac{3b-ax}{2}$

$\left|\frac{3b-ax}{2}\right|<2$

$(x^2+t-9)=0$

$t<9$

$x^2+t-12x+32=0$

$D/4=36-32-t=4-t$

$t<4$

$t<4$

$y^2=\frac{9b^2-6abx+a^2x^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x+y=a$
$y+z=b$
$x+z=c$

$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$

$\frac{9+14+19}{2}=\frac{23+19}{2}=\frac{42}{2}=21$

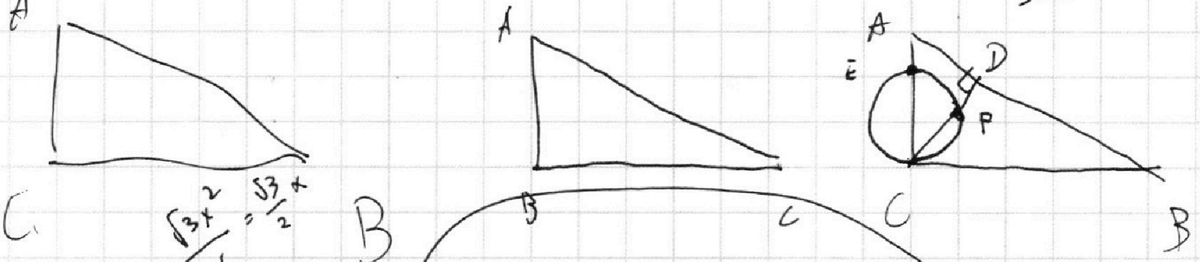
$\underline{2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}}$

$\frac{10+13+18}{2}=\frac{10+31}{2}=\frac{41}{2}=20{,}5$

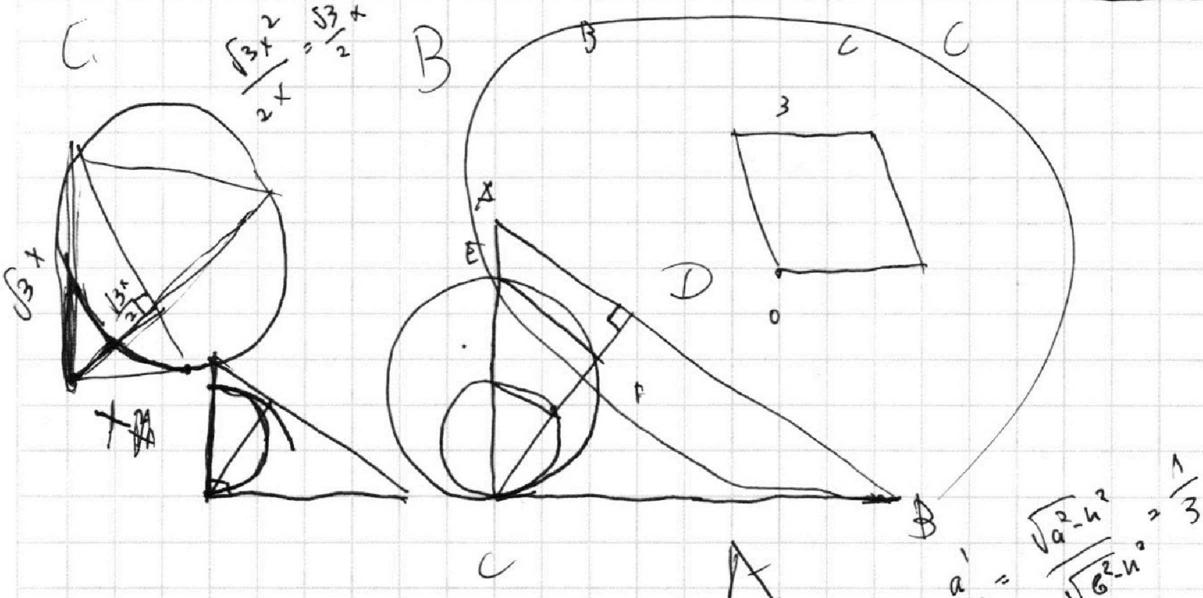
$\frac{10+13+30}{2}=\frac{40+13}{2}=\frac{53}{2}=26{,}5$ (2+)

$a=2^{7}\cdot 3^{8}\cdot 5^{20}$
$b=2^{2}\cdot 3^{2}$
$c=2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{17}$

$3+8=11$



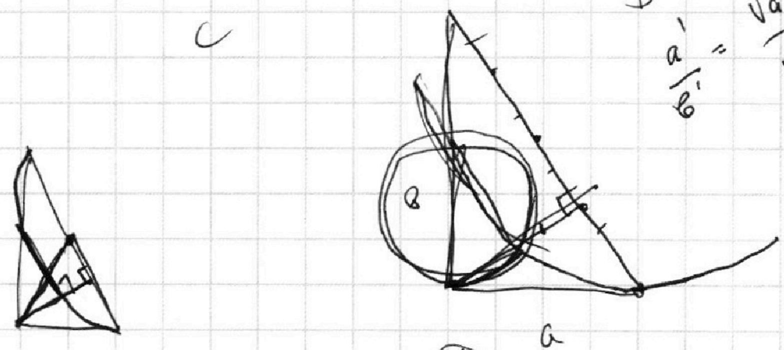
$\frac{\sqrt{3}x^2}{2x}=\frac{\sqrt{3}x}{2}$



$\frac{a'}{b'}=\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}=\frac{1}{3}$

$\sqrt{b^2-h^2}=3\sqrt{a^2-h^2}$

$b^2-h^2=9a^2-9h^2$



$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$9a^2-b^2=\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}$

$9x-y=\frac{8xy}{x+y}$

$9x^2+9xy-9xy-y^2=8xy$

$9x^2=y^2$

$3x=y$

$b=a\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2\pi = x + 5(2\pi k - x)$

$4x = 10\pi k - 2\pi$

$4x = 2\pi \cdot (5k-1)$

$x = \frac{\pi}{2} \cdot (5k-1)$

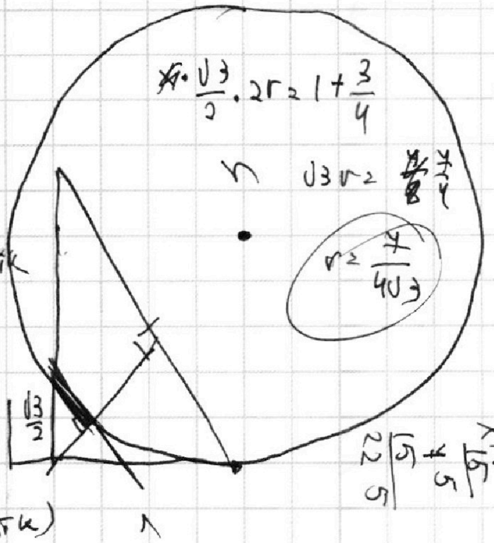
$2\pi k - \pi \le \frac{\pi}{2} \cdot (5k-1) \le 2\pi k$

$4k-1 \le 5k-1 \le 4k$

$k \ge 0$ 0, 1

$5k-1 \le 4k$

$k \le 1$



$\frac{\sqrt3}{2} \cdot 2r = 1 + \frac{3}{4}$

h $\sqrt3 r = \frac{7}{4}$

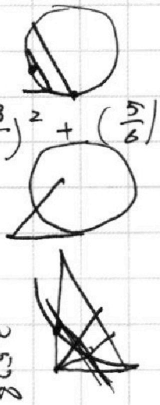
$r = \frac{7}{4\sqrt3}$

$\frac{\sqrt3}{2}$

$-2u^5 + 7 - 16u +$ $\left(\frac{7}{4\sqrt3} - \frac{\sqrt3}{8}\right)^2 +$

$+\left(1 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{196}{64 \cdot 3} = \frac{49}{16 \cdot 3}$

$= \left(\frac{14-3}{8\sqrt3}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{121}{64\cdot3} + \frac{25\cdot3}{64\cdot3} =$



$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$

$2\pi \cdot (1+5k) = 6x$

$2\pi k \le x = \frac{\pi}{3} \cdot (1+5k) \le 2\pi k + \pi$

$2\pi k \le \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi k + 3\pi$

$\frac{1}{3}\pi k \le \frac{\pi}{3} \le \frac{1}{3}$ ~~$\pi k + \pi$~~

$-2 \le k \le 1$ $-2, -1, 0, 1$

$-\frac{2\pi}{3} \le \frac{1}{3}\pi k$

$-2 \le k$

$x = \frac{\sqrt3}{2} t$

$(h-x)^2 + 1 = h^2$

$h^2 - 2xh + x^2 + 1 = h^2$

$x^2 - 2xh + 1 = 0$

$D/4 = h^2 - 1$

$x = h \pm \sqrt{h^2-1}$

$x = h - \sqrt{h^2-1}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(\pi/2 - \arccos(\cos x)) = x + \pi/2$

$2\pi + \pi/2 = x + 5\arccos(\cos x) + \pi/2$

$2\pi = x + 5\arccos(\cos x)$

1) $x \in [0; \pi]$ $\arccos(\cos x) = x$

$2\pi = 6x$

$x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

2) $x \in [\pi; 2\pi]$

$\arccos(\cos x) =$
$= 2\pi - x$

$(h-t)^2 + (1 - \sqrt3 t)^2 = h^2$

$h^2 - 2th + t^2 + 1 - 2\sqrt3 t + 3t^2 = h^2$

$2\pi = x + 5(2\pi - x)$

$2\pi = 10\pi - 4x$

$4x = 8\pi$

$x = 2\pi$

$4t^2 - 2(h+\sqrt3)t + 1 = 0$

$D/4 = (h+\sqrt3)^2 - 4 = h^2 + 2\sqrt3 h - 1$

$t = \frac{h+\sqrt3 \pm \sqrt{h^2+2\sqrt3 h - 1}}{4}$

$h - \sqrt{h^2-1} = \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{h+\sqrt3 - \sqrt{h^2+2\sqrt3h-1}}{4}$

5) $x \in [4\pi; 5\pi]$

$2\pi = x + 5x - 20\pi$

~~$22\pi = 6x$~~

~~$x = \frac{22}{6}\pi = \frac{11}{3}\pi$~~

$8h - 8\sqrt{h^2-1} = \sqrt3 h + 3 - \sqrt{3h^2 + 6h\sqrt3 - 3}$

$t = \frac{h+\sqrt3 - \sqrt{h^2+2\sqrt3h-1}}{4}$

~~$(8-\sqrt3)h$~~

3) $x \in [2\pi; 3\pi]$ $\arccos(\cos x) = x - 2\pi$

$2\pi = x + 20\pi - 5x \Leftrightarrow 4x = 18\pi$

$2\pi = x + 5x - 10\pi \Leftrightarrow 12\pi = 6x \Leftrightarrow x = 2\pi$

4) $x \in [3\pi; 4\pi]$ $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x>0 \quad x\neq 1$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2}(243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$243 = 3^5$

$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 6\log_x 3$

$\log_3 x)^4$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{2\cdot 15}{\log_3 x} - 8$

$a^t = b$

$b^{1/t} \geq 0$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{10}{t} - 2$

$t^5 + 6 - 10 + 8t = 0$

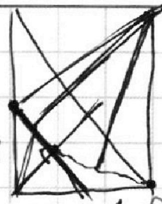
$t^5 + 8t - 4 = 0$

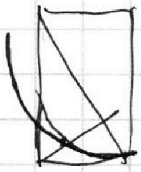
$t^5 = 4 - 8t$

$5t^5 + 30 - 2 + 40t = 0$

$5t^5 = 28 - 40t$

$\log_3(5y)^4 + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{4\log_{5y}(3^{11})}{2} - 8$





$\sqrt{3}x \quad x \quad 1$

$f(x,y) = 3x - y$

$f(A) + f(B) = 33$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}x} + \sqrt{3}x}{2} = \frac{1+3x^2}{2\sqrt{3}x} =$

$(\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \log_{x^2}(243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5\log_x 3}{2} - 8$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0$

$\frac{1}{16}, 1$

$2t^5 = -16t - 7$

$-2t^5 = 16t + 7$

$2(x + \log_3 5)$

$x = \log_5 3$

$2\cdot(\log_5 3)^5$

$2\log_3(5y)^4 + \frac{4}{\log_3(5y)} = \frac{11}{\log_3(5y)} - 16$

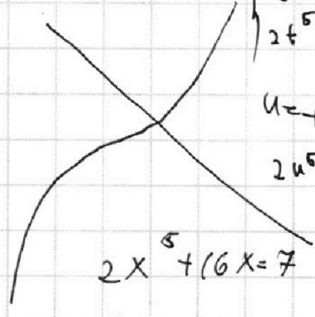
$2u^5 + 4 - 11 + 16u = 0$

$\begin{cases} 2u^5 - 7 + 16u = 0 \\ 2t^5 - 7 + 16t = 0 \end{cases}$

$u = t$

$2u^5 + 2t^5 + 16u + 16t = 0$

$2(u+t)(u^4 - u^3t + u^2t^2 - u t^3 + t^4 + 8) = 0$



$2x^5 + 16x = 7$

$2x^5 + 16x - 7 = 0$

$x \approx \frac{7}{16}$

$u+t = 0$