



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #1.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a &= 2^{x_a} \cdot 3^{y_a} \cdot 5^{z_a} \cdot v_a; & (x_a, y_a, z_a \in \mathbb{Z}^+, v_a \in \mathbb{N}) \\ b &= 2^{x_b} \cdot 3^{y_b} \cdot 5^{z_b} \cdot v_b; \\ c &= 2^{x_c} \cdot 3^{y_c} \cdot 5^{z_c} \cdot v_c. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 3^{y_a+y_b} \cdot 5^{z_a+z_b} \cdot v_a \cdot v_b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}.$$

$$\text{Значит, } x_a+x_b \geq 9; y_a+y_b \geq 10; z_a+z_b \geq 10.$$

$$\text{Аналогично, } bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \Rightarrow x_b+x_c \geq 14; y_b+y_c \geq 13; z_b+z_c \geq 13.$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \Rightarrow x_a+x_c \geq 19; y_a+y_c \geq 18; z_a+z_c \geq 30.$$

Сложив нерав-ва с  $x$ , получаем:

$$x_a+x_b + x_b+x_c + x_a+x_c = 2(x_a+x_b+x_c) \geq 9+14+19 = 23+19 = 42$$

Аналогично,

$$2(y_a+y_b+y_c) \geq 10+13+18 = 41$$

$$2(z_a+z_b+z_c) \geq 10+13+30 = 53$$

$$\text{Значит, } x_a+x_b+x_c \geq 21; y_a+y_b+y_c \geq 20,5 \text{ (а значит и } 21, \text{ т.к. целые);}$$

$$z_a+z_b+z_c \geq 26,5 \text{ (а значит и } 27, \text{ т.к. целые).}$$

$$\text{В то же время } z_b \geq 0, z_a+z_c \geq 30 \Rightarrow z_a+z_b+z_c \geq 30.$$

$$\text{Значит, } abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 3^{y_a+y_b+y_c} \cdot 5^{z_a+z_b+z_c} \cdot v_a v_b v_c \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Равенство достигается при } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}; b = 2^2 \cdot 3^2; c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



## Задача 2.

Дано:

$\triangle ABC$

$CC$  — прямая

$CD$  — высота

$AD:DB = 3:1$

Окр.  $\omega$  касается

$BC$  в  $B$ ,

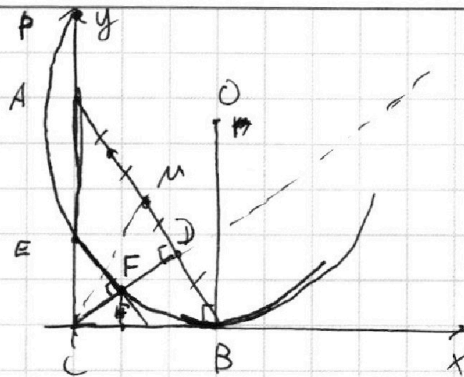
$CD \cap \omega = F$ ,  $AC \cap \omega = E$ ,

$EF \parallel AB$ .

Найти:

Выражение  $\frac{S(\triangle CEF)}{S(\triangle ABC)}$ .

$C = (0,0)$



Решение:

Пусть  $CM$  — медиана.

В  $\triangle CMB$  высота  $CD$  является медианой, значит  $CM = CB$ .

Но  $CM = MB$ , т.е.  $\angle ACB = 90^\circ$ .

Значит,  $\triangle CMB$  — равнобедренный,  
т.е.  $\angle CMB = 60^\circ$ .

$$AC = BC \cdot \tan 60^\circ = BC \cdot \sqrt{3}.$$

Пусть  $BC = a$ , радиус окружности  $r$ ,  $CE = x$ .

Из точки  $C$  к окружности  $\omega$ :

$$CE \cdot (2r - CE) = d^2 \quad (\text{если } AC \text{ повторно пересекает } \omega \text{ в точке } P,$$

то  $\omega$  симметрично отн. центра к  $EP$ , как и  $AC$ , значит

$y$ -координата центра окружности  $\omega$  — середина  $y$ -координат

$E$  и  $P$ ), т.е.  $r = \frac{CE + CP}{2}$  и т.е.  $CP = 2r - CE$ ).

$$x \cdot (2r - x) = d^2$$

$$\angle ECF = 90^\circ - \angle CDB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ. \quad (r = \frac{CE}{2} = \frac{x}{2}, \text{ т.к. } CP \perp EP, \text{ т.е. } \triangle CFP \text{ — равнобедренный})$$

$$\text{т.к. } CF \perp AB \text{ и } EF \parallel AB, \quad x(F) = CF \cdot \cos 30^\circ = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

$$y(F) = CF \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{4}. \quad OF^2 = (r - \frac{x}{4})^2 + (a - \frac{x\sqrt{3}}{4})^2 = r^2.$$



На одной странице можно оформить только одну задачу.  
 Отметьте крестиком номер задачи.  
 решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Липа QR-кода неопустима!



Задана аз провархи:

$$P^2 = \left(r - \frac{q}{x}\right)^2 + \left(a - x\sqrt{3}\right)^2 = r^2 - 2r\frac{q}{x} + \frac{q^2}{x^2} + a^2 - 2ax\sqrt{3} + 3x^2 = r^2$$

$$4x^2 - r\frac{q}{x} - a\sqrt{3} + a^2 = 0$$

$$4x^2 - (r+a\sqrt{3})\frac{q}{x} + a^2 = 0$$

$$4x^3 - (r+a\sqrt{3})q + a^2x = 0$$

$$v = \frac{a^2}{2x}$$

$$x^2 - \left(a^2 + x^2\right) - \left(a\sqrt{3}\frac{q}{x} + a^2\right)\frac{q}{2} + a^2 = 0$$

$$x^2 - (a^2 + x^2) - 2ax\sqrt{3} + a^2 = 0$$

$$3a^2 - 2ax\sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Но  $\Delta CEF \sim \Delta ABC$  с коэффициентом подобия  $k$ .

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AC} = \frac{S(CEF)}{S(ABC)} = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

$$\frac{S(CEF)}{S(ABC)} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = x + 5 \arccos(\cos x)$$

$$2\pi = x + 5 \arccos(\cos x)$$

$$\textcircled{1} x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$$

Значим, исходное уравнение ~~равносильно~~ становится:

$$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$\pi + 5\pi k = 3x$$

$$x = \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3}$$

$$2\pi k \leq x < 2\pi k + \pi$$

$$2\pi k \leq \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3} < 2\pi k + \pi$$

$$6k \leq 1+5k < 6k+3$$

$$k \leq 1 < k+3$$

$$-2 < k \leq 1$$

$$\text{Значим, } x \in \left\{ -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

$$\textcircled{2} x \in [2\pi k - \pi; 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(\cos x) = 2\pi k - x$$

Значим, исходное уравнение становится:

$$2\pi = x + 5 \cdot (2\pi k - x)$$

$$4x = 10\pi k - 2\pi$$

$$x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (5k - 1)$$

$$2\pi k - \pi \leq x < 2\pi k$$

$$2\pi k - \pi \leq \frac{\pi}{2} (5k - 1) < 2\pi k$$

$$4k - 2 \leq 5k - 1 < 4k$$

$$-2 \leq k - 1 < 0$$

$$-1 \leq k < 1$$

$$\text{Значим, } x \in \left\{ -3\pi; -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #4

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} y = \frac{3b - ax}{2} \\ y^2 = \frac{9b^2 - 6abx + a^2x^2}{4} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \leftarrow \text{кв. ур.} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \leftarrow \text{кв. ур.} \end{cases} \end{cases}$$

4 корня могут быть только когда у обеих искомых уравнений есть 2 различных корня, и их корни не совпадают.

$$\text{Их корни не совпадают: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ 12x - 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 \neq 0 \\ x \neq \frac{41}{12} \end{cases}$$

У 1-го есть 2 корня!

$$x^2 + \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} - 4 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 - (4+a^2)(9b^2 - 36)) = \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 - 9a^2b^2 - 36b^2 - 36a^2 + 36 \cdot 4) = 36 - 9a^2 - 9b^2 > 0.$$

У 2-го есть 2 корня!

$$\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x^2 - \left(\frac{3ab + 24}{2}\right)x + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} + \frac{2 \cdot 3ab \cdot 24}{4} + \frac{24^2}{4} - 4 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9ab + 24^2 - (4+a^2)(9b^2 + 128)) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 4 \cdot 9ab + 24^2 - 4 \cdot 9b^2 - 128 \cdot a^2 - 128 \cdot 4) = 36ab + 9b^2 - 32a^2 + 16 \cdot 9 - 16 \cdot 8 =$$

$$= 36ab - 9b^2 - 32a^2 + 16 > 0.$$

$$\begin{cases} 9b^2 > 36 \\ b^2 < 4 - a^2 \\ 9b \cdot (4a - b) > 32a^2 - 16 \end{cases}$$

Значит,  $a^2 < 4 \Leftrightarrow |a| < 2$

ЭВ:  $\rightarrow$  Корни:  $b = \frac{36a^2 \pm 12\sqrt{4a^2 + 9}}{18}$

$$\rightarrow 9b^2 - 36ab + 32a^2 - 16 < 0$$

$$D = (36a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (32a^2 - 16) = 36 \cdot (36a^2 - 32a^2 + 16) = 36 \cdot (4a^2 + 16) = 12^2 \cdot (a^2 + 4)$$

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача #5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x (3^5)}{2} - 8$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (\log_3 x)^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad 2(\log_3 x)^5 + 7 + \frac{16}{3} \log_3 x = 0$$

возрастающая ф-ция,  
т.ч. цулла возрастает

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases} \quad (\log_3 (5y))^4 + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11 \log_{5y} (3)}{2} - 8$$

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases} \quad (\log_3 (5y))^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3 (5y)$$

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases} \quad 2(\log_3 (5y))^5 - 7 + 16 \log_3 (5y) = 0$$

возрастающая ф-ция.

\* ф-ция на  $0^+$  отрицательная, на  $+\infty$  положительная.

~~$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^2$$~~

Заметим, что

если  $x$  - корень первого  
ур-я, то  $y = 3^{\frac{-\log_3 x}{5}} = \frac{1}{5^x}$

- корень второго, и

наоборот: если  $y$  - корень  
второго, то  $x = 3^{\frac{-\log_3 (5y)}{5}} =$   
 $= \frac{1}{5y}$  - корень первого.

Докажем это:

пусть  $z = \log_3 x, v = \log_3 (5y)$

первое ур-е:

$$2z^5 + 16z + 7 = 0$$

второе:

$$2v^5 + 16v - 7 = 0.$$

При замене  $v = -z$  или  $z = -v$   
переходим в первое; при  
замене  $z = -v$  первое во второе.

Значит, по крайней мере корень  
каждого ур-я единственныи  
(слева возр. ф-ция, справа 0),  
то если корень первого  $x$ ,  
то корень второго  $\frac{1}{5x}$ .

$$xy = x \cdot \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}.$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #6, переделка.

Рассчитаем для каждого значения  $f(B)$  от 0 до 60.

кач-во подходящих пар  $(A, B)$  такая, что  $f(A) - f(B) = 33$ .

Это и будет ответ.

~~Эт~~ Выбрать  $B$  у нас есть

Пусть  $f(B) = x$  тогда  $f(A) = 33 + x$

Выбрать  $B$  у нас есть  $K(x)$  способов.

Если  $33 + x > 60$ , то у нас 0 способов выбрать  $A$ , иначе  $K(33 + x) = K(x)$ .

$$\text{Значит, ответ равен } \sum_{x=0}^{27} (K(x))^2 = \sum_{x=0}^9 (K(3x))^2 + \sum_{x=0}^8 (K(3x+1))^2 +$$

$$+ \sum_{x=0}^8 (K(3x+2))^2 = 10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 + 10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2$$

$$= 2250 + 1764 \cdot 2 = 2250 + 3528 = 5778.$$

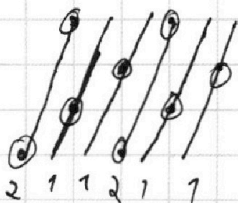
Ответ: 5778 способов

↑ ч  
↑ я

~~196~~

$$196 \cdot 9 = 1960 - 196$$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ - 196 \\ \hline 1764 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #6, начало.

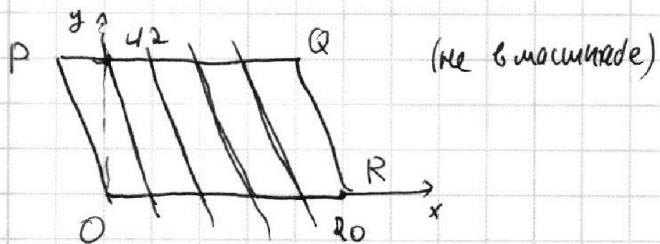
$$\text{Пусть } f(A) = 3x(A) + y(A).$$

Нас ~~просят~~ просят посчитать кол-во целочисленных точек  $(A, B)$  в параллелограмме такие, что  $f(A) - f(B) = 33$ .

Заметим, что  $\{M \mid f(M) = \text{const}\}$  — прямая  $(3x + y = c \Leftrightarrow y = c - 3x)$ ,

с углом наклона  $-3$ . При этом сторона  $PO$  нашего параллелограмма параллельна каждой из этих прямых,

$$\text{т.е. } f(P) = f(O) = 0.$$



Значит, целочисленные решения

$$f(A) = c \text{ будут лежать}$$

внутри параллелограмма, если

$$1) c \in [f(O); f(R)] = [0; 60]$$

$$2) y(A) \in [y(O); y(P)] = [0; 4] \text{ (т.к.)}$$

так как стороны  $PQ$  и  $OR$  параллельны оси  $Ox$ .

Посчитаем кол-во ~~таких~~ решений  $f(A) = c$  внутри параллелограмма  $(c \in [0; 60])$

~~или  $f(A) = 3x + y = c, y \in [0; 4], x \in [0; 6]$~~  Пусть это кол-во будет  $K(c)$ .

$$y = c - 3x; \quad 3x + y = c, \quad y \in [0; 4]$$

$$y = c - 3x; \quad x \in \left[ \frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3} \right]. \text{ Значит, это кол-во}$$

равно кол-ву целых точек на  $\left[ \frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3} \right]$ , т.е. 15 при  $c \div 3$ , иначе 14.

$$K(c) = \begin{cases} 15, & c \div 3 \\ 14 & \text{иначе} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 32 + 9 - 12x &= 0 \\ 41 &= 12x \\ x &= \frac{41}{12} \end{aligned}$$

$$y = \frac{3b - ax}{2}$$

$$\left| \frac{3b - ax}{2} \right| < 2$$

~~g~~

$$(x^2 + t - 9) = 0$$

$$t < 9$$

$$x^2 + t - (2x + 32) = 0$$

$$D/4 = 36 - 32 - t = 4 - t$$

$$t < 4$$

$$t < 4$$

$$y^2 = \frac{9b^2 - 6abx + a^2x^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy+z &= b \\ x+z &= c \end{aligned}$$

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{9+14+19}{2} = \frac{23+19}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$x = 5$

$$\frac{2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}}{}$$

$$\frac{10+13+18}{2} = \frac{10+31}{2} = \frac{41}{2} = 20,5$$

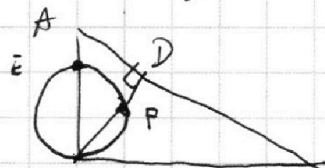
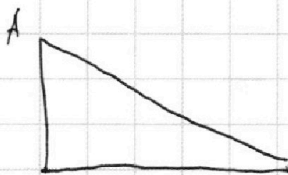
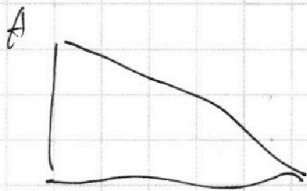
$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2$$

$$c = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 3 + 11$$

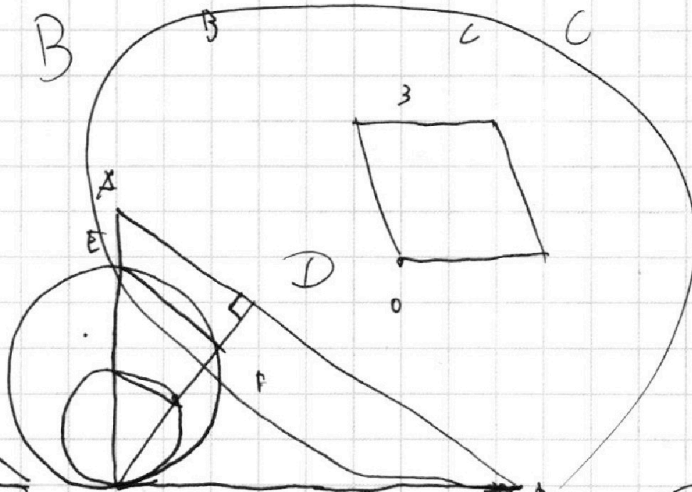
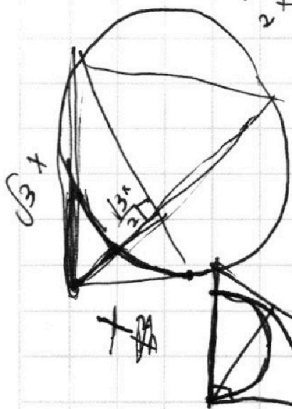
$$\frac{10+13+30}{2} = \frac{40+3}{2} = \frac{53}{2} = 26,5 (27)$$



C

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{2x} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

B



$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{b^2 - h^2} = 3\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$b^2 - h^2 = 9a^2 - 9h^2$$

$$b^2 = 9a^2 - 8h^2$$

$$9a^2 - b^2 = \frac{8a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} 9x - y &= \frac{8xy}{x+y} \\ 9x^2 + 9xy - yx - y^2 &= 8xy \\ 9x^2 &= 2y^2 \\ 3x &= y \end{aligned}$$

$$b = a\sqrt{3}$$

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9a

$$9a^2 - b^2 = \frac{8a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

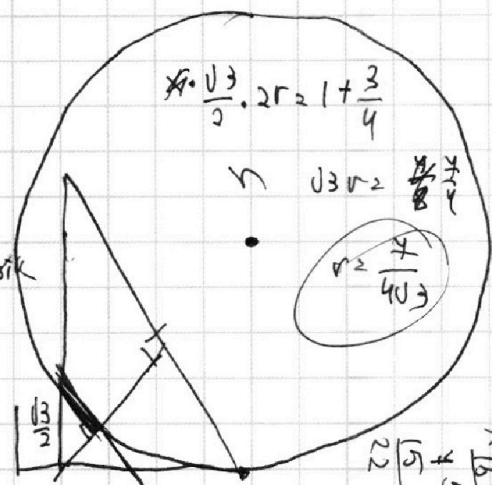


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 2\pi &= x + 5(2\sqrt{3}k - x) \\ 4x &= 10\sqrt{3}k - 2\sqrt{3} \\ 4x &= 2\sqrt{3} \cdot (5k - 1) \\ 2x &= \sqrt{3} \cdot (5k - 1) \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (5k - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}k - \sqrt{3} &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (5k - 1) \leq \sqrt{3}k \\ 4k - 1 &\leq 5k - 1 \leq 4k \\ 5k &\geq 0 \quad 0 \leq 1 \\ 5k - 1 &\leq 4k \\ k &\leq 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -2\sqrt{5} + 7 - 16u &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \\ &+ \left(1 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{196}{64 \cdot 3} = \frac{49}{16 \cdot 3} \\ &= \left(\frac{14-3}{8\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{121}{64 \cdot 3} + \frac{25 \cdot 3}{64 \cdot 3} \\ &= \frac{156}{64 \cdot 3} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= x + 5(x - 2\sqrt{3}k) \\ 2\sqrt{3} \cdot (1 + 5k) &= 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}k &\leq x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (1 + 5k) \leq 2\sqrt{3}k + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}k &\leq \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}k \leq 2\sqrt{3}k + \sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}k &\leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}k + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h-x)^2 + 1 &= h^2 \\ h^2 - 2xh + x^2 + 1 &= h^2 \\ x^2 - 2xh + 1 &= 0 \\ D/4 = h^2 - 1 \\ x &= \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4}}{2} \\ &= h \pm \sqrt{h^2 - 1} \\ x &= h - \sqrt{h^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} \cos(\arccos(\cos x)) &= x + \sqrt{3} \\ 5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) &= x + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + \sqrt{3} &= x + 5\arccos(\cos x) + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} &= x + 5\arccos(\cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \leq k \leq 1 & \quad -2, -1, 0, 1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} &\leq \frac{1}{3}\sqrt{3}k \\ -2 &\leq k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h-t)^2 + (1-\sqrt{3}t)^2 &= h^2 \\ h^2 - 2th + t^2 + 1 - 2\sqrt{3}t + 3t^2 &= h^2 \\ 4t^2 - 2(h+\sqrt{3})t + 1 &= 0 \\ D/4 = (h+\sqrt{3})^2 - 4 &= h^2 + 2\sqrt{3}h - 1 \\ t &= \frac{h+\sqrt{3} \pm \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$h - \sqrt{h^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h + \sqrt{3} - \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4}$$

$$8h - 8\sqrt{h^2 - 1} = \sqrt{3}h + 3 - \sqrt{3h^2 + 6h\sqrt{3} - 3}$$

$$(8 - \sqrt{3})h$$

$$2\sqrt{3} = x + 20\sqrt{3} - 5x \quad 4x = 18\sqrt{3}$$

$$3) x \in [2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}] \quad \arccos(\cos x) = x - \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = x + 5x - 10\sqrt{3} \quad 12\sqrt{3} = 6x \quad x = 2\sqrt{3}$$

$$4) x \in [3\sqrt{3}; 4\sqrt{3}] \quad \arccos(\cos x) = 4\sqrt{3} - x$$

$$\begin{aligned} 5) x \in [4\sqrt{3}; 5\sqrt{3}] \\ 2\sqrt{3} &= x + 5x - 20\sqrt{3} \\ 22\sqrt{3} &= 6x \\ x &= \frac{11}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x > 0, x \neq 1$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 (243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + 6 \log_x 3 = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$2t = 3^5$

$\log_3 x = t$

$a^t = b$

$b^{1/t} = a$

$(\frac{1}{\log_x 3})^4 + 6 \log_x 3$

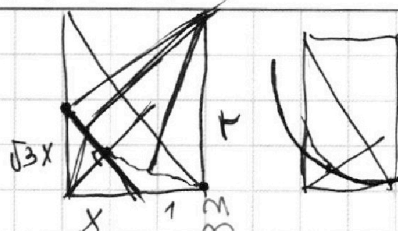
$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{2 \cdot 3^5}{\log_3 x} - 8$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{10}{t} - 8$

$t^5 + 6 - 10 + 8t = 0$

$t^5 + 8t - 4 = 0$

$t^5 = 4 - 8t$



$f(x) = 3x - 9$   
 $f(1) = 3(1) - 9 = -6$   
 $f(3) = 3(3) - 9 = 0$   
 $f(3^2) = 3(9) - 9 = 18$   
 $\frac{1}{\sqrt{3x}} + \sqrt{3x} = \frac{1 + 3x^2}{2\sqrt{3x}}$

$5t^5 + 30 - 2 + 40t = 0$

$5t^5 = 28 - 40t$

$\log_3(5y)^4 + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{6 \log_3 5y (3^{11})}{2} - 8$

$(\log_3 x)^4 + 6 \log_x 3 = \log_x^2 (243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5 \log_x 3}{2} - 8$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0$

$2t^5 = 16t - 7$

$-2t^5 = 16t - 7$

$2(x + \log_3 5)$

$x = \log_5 3$

$2 \cdot (\log_5 3)^5$

$2 \log_3(5y)^4 + \frac{4}{\log_3(5y)} = \frac{11}{\log_3(5y)} - 16$

$2u^5 + 4u - 11u + 16u = 0$

$\begin{cases} 2u^5 + 7 + 16u = 0 \\ 2t^5 - 7 + 16t = 0 \end{cases}$

$u = t$   
 $2u^5 + 16u + 7 = 0$

$2x^5 + 16x = 7$

$2x^5 + 16x - 7 = 0$

$x \approx \frac{7}{16}$

$u + t = 0$

