



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{array}{l} a, b : 2^8 3^{14} 5^{12} \\ b, c : 2^{12} 3^{20} 5^{17} \\ a, c : 2^{14} 3^{21} 5^{39} \end{array} \right\} \text{перемножим и получим, что}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68} \Rightarrow abc : 2^{17} 3^{28} 5^{34} ; \text{ поскольку}$$

$a^2 b^2 c^2$ - квадрат abc , можем $abc : 3^{28}$, но $a^2 b^2 c^2 : 3^{55} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc : 3^{28} ; ac : 5^{39} \Rightarrow abc : 5^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} 3^{28} 5^{39} , \text{ а } abc : 2^{14} , \text{ поскольку}$$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{34}$. минимально возможное значение

для abc при условии, что $abc : 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

$$\text{— это } abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример: $a = 2^5 3^{14} 5^{12}$

$$b = 2^3 3^7$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

все условия выполняются, а

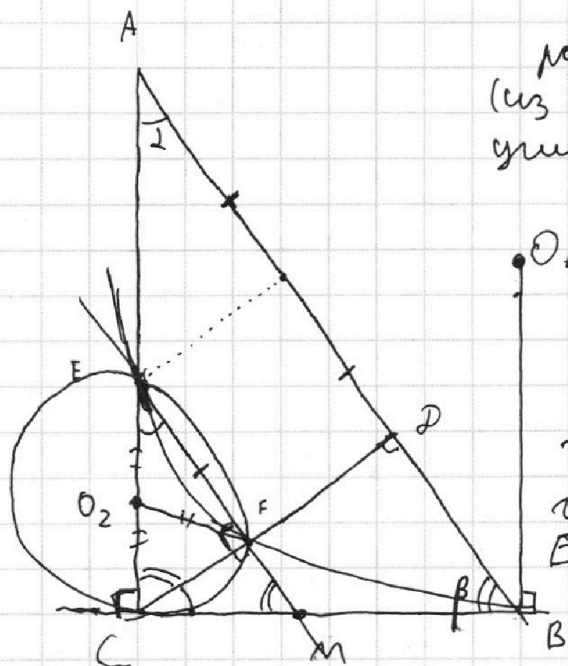
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала отметим равные углы: $\angle CAB = \angle CEF = \angle DCB = \alpha$ (из параллельности и по сумме углов в $\triangle ABC$). Также $\angle ACF = \angle DCB = \angle CME$.

$$\angle DCM = \angle CEF = \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow CB$ - касательная к описанной окружности $\triangle CEF$. Также $\triangle CEF$ - $\triangle ABC$ $\Rightarrow O_2$ - центр гипотенузы. ($\triangle ABC$, поскольку $EF \parallel AB$; $CF \perp AB \Rightarrow CF \perp EM$)

Окружности с центрами

в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках E и F . (это окружность из условия и описанная вокруг

$\triangle CEF$ соответственно) $\Rightarrow EF$ - рад. ось этих окружностей, а поскольку CB - касательная к обеим окружностям, то $CM^2 = MB^2 \Rightarrow CM = MB$, где M - EF пересечение EF и CB (прямых). $CM = MB$; $EM \parallel AB \Rightarrow EM$ - средняя линия $\triangle CAB \Rightarrow \frac{CF}{FD} = 1 \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CAB}$

$$S_{\triangle CAD} = \frac{5}{14} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{5}{28} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BCA}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

\arcsin возвращаем значение от $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ до } \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} - x, \quad (1)$$

$$\text{если } \cos(x) \geq 0 \text{ и } \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} + x, \quad (2)$$

если $\cos(x) < 0$

$$(1) \quad 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 20\pi k - 8x = \pi$$

$$-8x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{2}$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi + 5\pi k}{2} \\ \frac{-\pi - 5\pi m}{3} \end{array} \right]$$

$$(2) \quad 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi + 5\pi k}{3}$$

, где k, m - целые числа.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

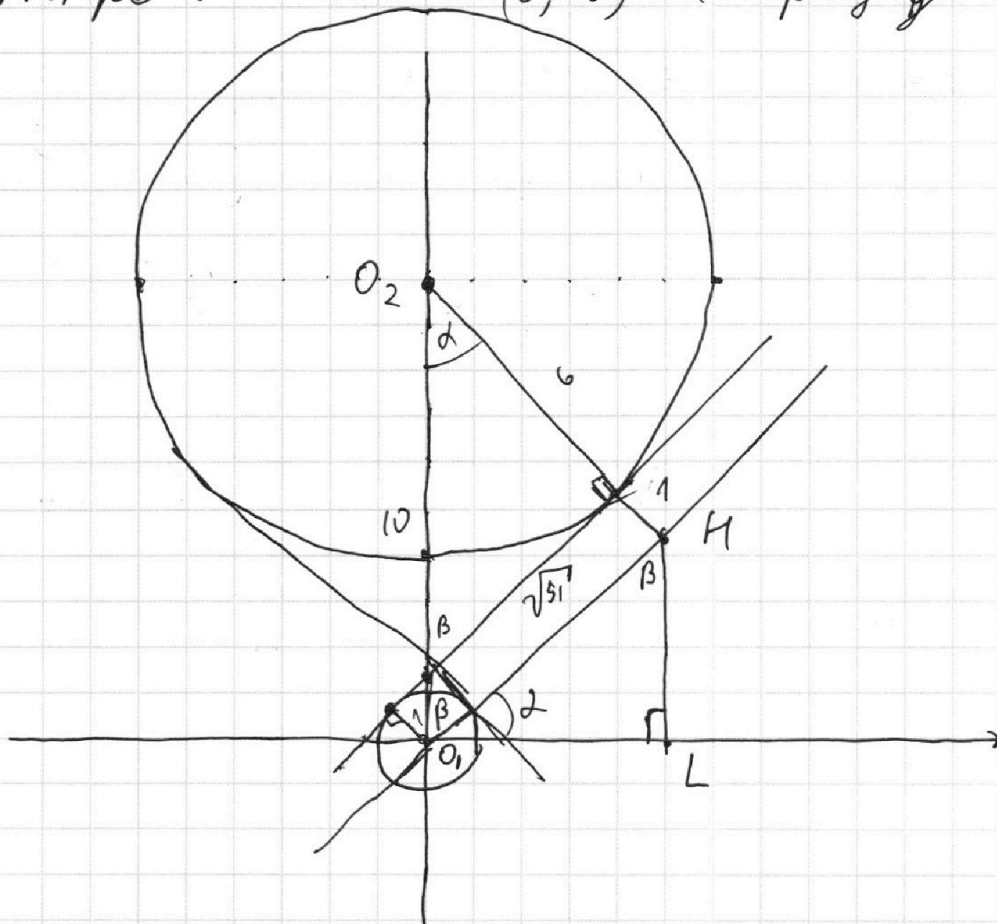


$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & \rightarrow y = \frac{ax + 4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ ①
 $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$ ②

① — это окружность ~~в центре~~ с центром в точке $(0; 0)$ и с радиусом 1.

② $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 10)^2 = 36$ — это окружность с центром в точке $(0; 10)$ и с радиусом 6.



Можно заметить, что при $|a| >$ определенного значения всегда найдется такое b , чтобы система уравнений имела ровно 4 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти угол наклона касательной к этим семействам построим параллельную ей касательную, проходящую через точку $(0, 0)$. ΔO_2O_1M и ΔO_1ML подобны \Rightarrow

$$\Rightarrow O_1L = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot 7$$

$$ML = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot \sqrt{51} \Rightarrow \text{угл. коэфф. наклона} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$= \frac{a}{3} \Rightarrow a \text{ принадлежит промежутку} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

(Поскольку картинка симметричная относительно оси y).

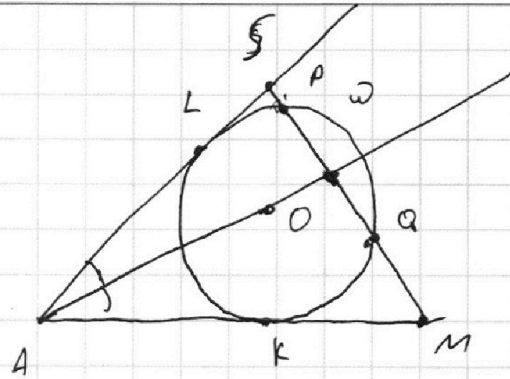
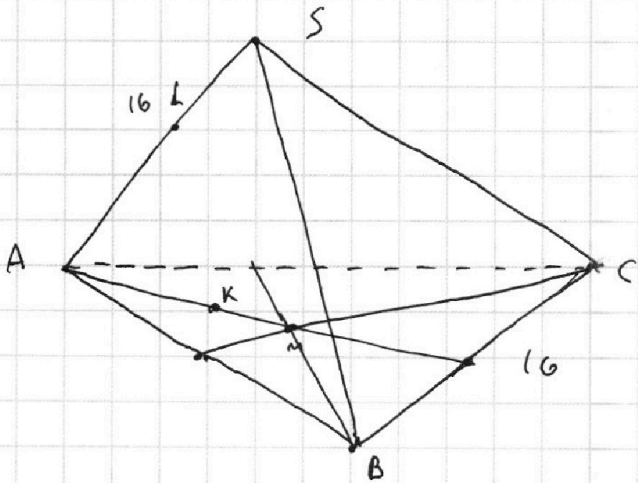
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



рассмотрим плоскость ASM : ω касается

AS и AM , значит поскольку $SP = MQ$, то

точки P и Q лежат симметрично отно-

сительно центра отрезка SM , можно заметить

заметить, что если ~~то~~ $AS = AM$, то все

равенства выполняются, ~~если~~ и если

~~мы~~ ~~начнем~~ ~~двигать~~ ~~себя~~ ~~из~~ ~~точек~~

~~увеличивая~~ ~~расстояние~~ ~~от~~ ~~A~~, то ~~сер.~~

~~пер.~~ ~~к~~ ~~отрезку~~ ~~SM~~ ~~где~~ ~~не~~ ~~будет~~ ~~применять~~

~~мы~~ ~~начнем~~ ~~крутить~~ ~~AA~~ ~~по~~ ~~окружности~~ ~~PQ~~
с сохраним расстояние до O , то ~~одна~~ ~~из~~
расстояний SP, MQ будет уменьшаться, а дру-
гие увеличиваться (и S и M последуют дальше

$\angle K$ от точки A соответственно \Rightarrow функции
будут монотонными при ~~кручении~~ ~~в~~ ~~1~~ ~~сторону~~
направлении пока выполняются эти условия!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



\Rightarrow возьмем только вариант, когда $AS = AM \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AS = 16.$

медиами делится

в отношении 2:1 тогда \Rightarrow

пересечения $\Rightarrow MA_1 = 8$

$\Rightarrow CA_1 = A_1B \Rightarrow \triangle BCM - \text{ну}$

(мед. = $\frac{1}{2}$ стороны) $S_{ABS} = 100 = 16 \cdot \frac{AH}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$ высота в $\triangle BMC$ к BC

3 раза меньше h (теорема Фалеса,

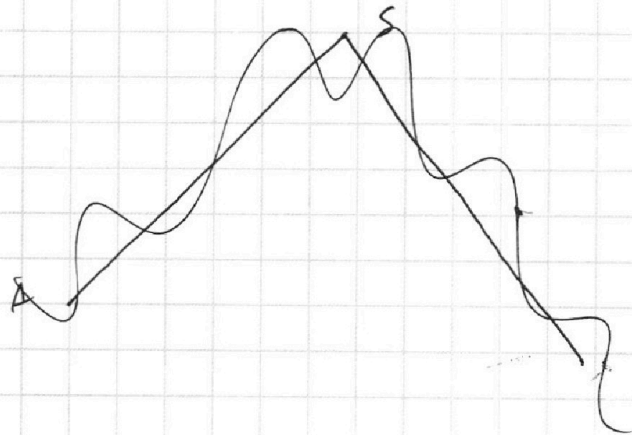
если провести через M прямую $\parallel BC$) \Rightarrow

$\Rightarrow S_{BMS} = \frac{25}{6} \cdot 16 : 2 = \frac{CM \cdot MB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CM \cdot MB = \frac{400}{6} = CC_1 \cdot BB_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{100 \cdot 3}{2} \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{24 \cdot 100 \cdot 3}{2} =$

$= 3600.$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \neq \emptyset$$

$$x^2 + y^2 = -64 + 20y$$

$$x^2 + (y - 10)^2 - 100 = -64$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$R = 6$.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$y = kx$$

$$(y - 10)^2 + x^2 = 36$$

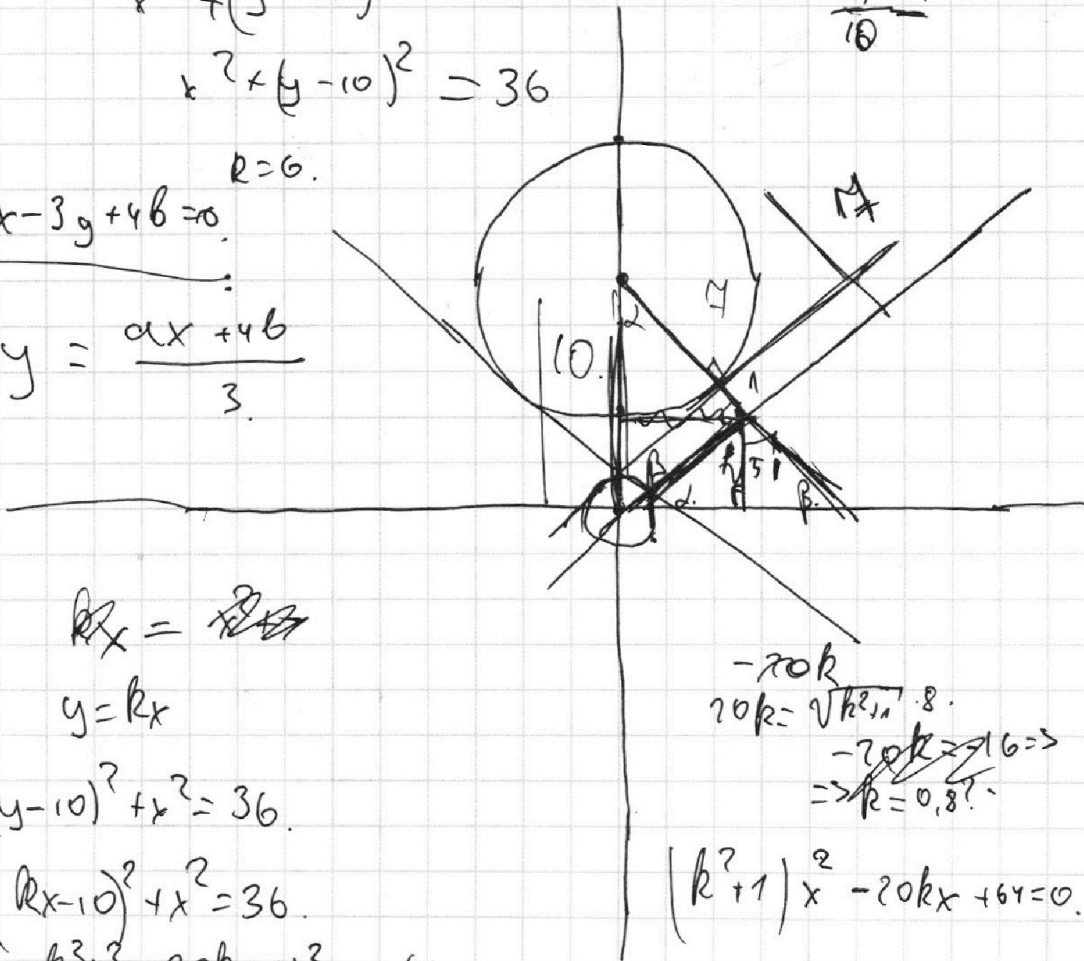
$$(kx - 10)^2 + x^2 = 36$$

$$k^2 x^2 - 20kx + x^2 = -64$$

$$20k = \sqrt{k^2 + 1} \cdot 8$$

$$-20k = 16 \Rightarrow k = 0,8$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 20kx + 64 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

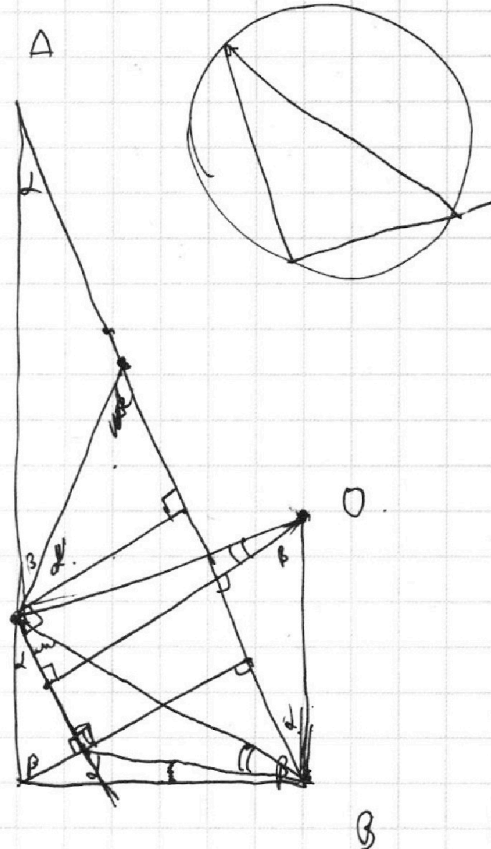
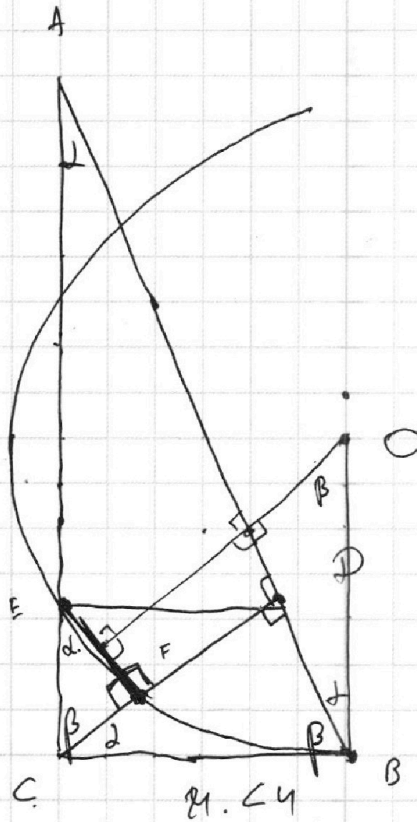
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



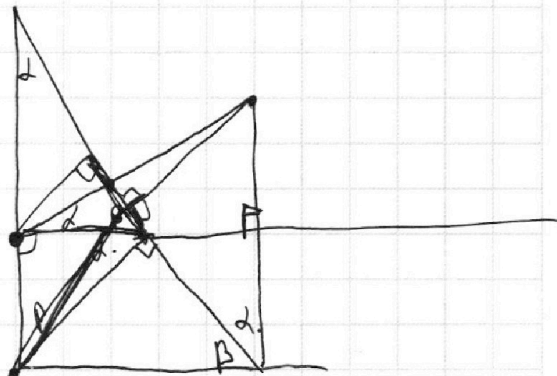
№2746



$$\frac{AD}{CF} = \frac{CD}{CB} =$$

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CF}{BD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AD}$$



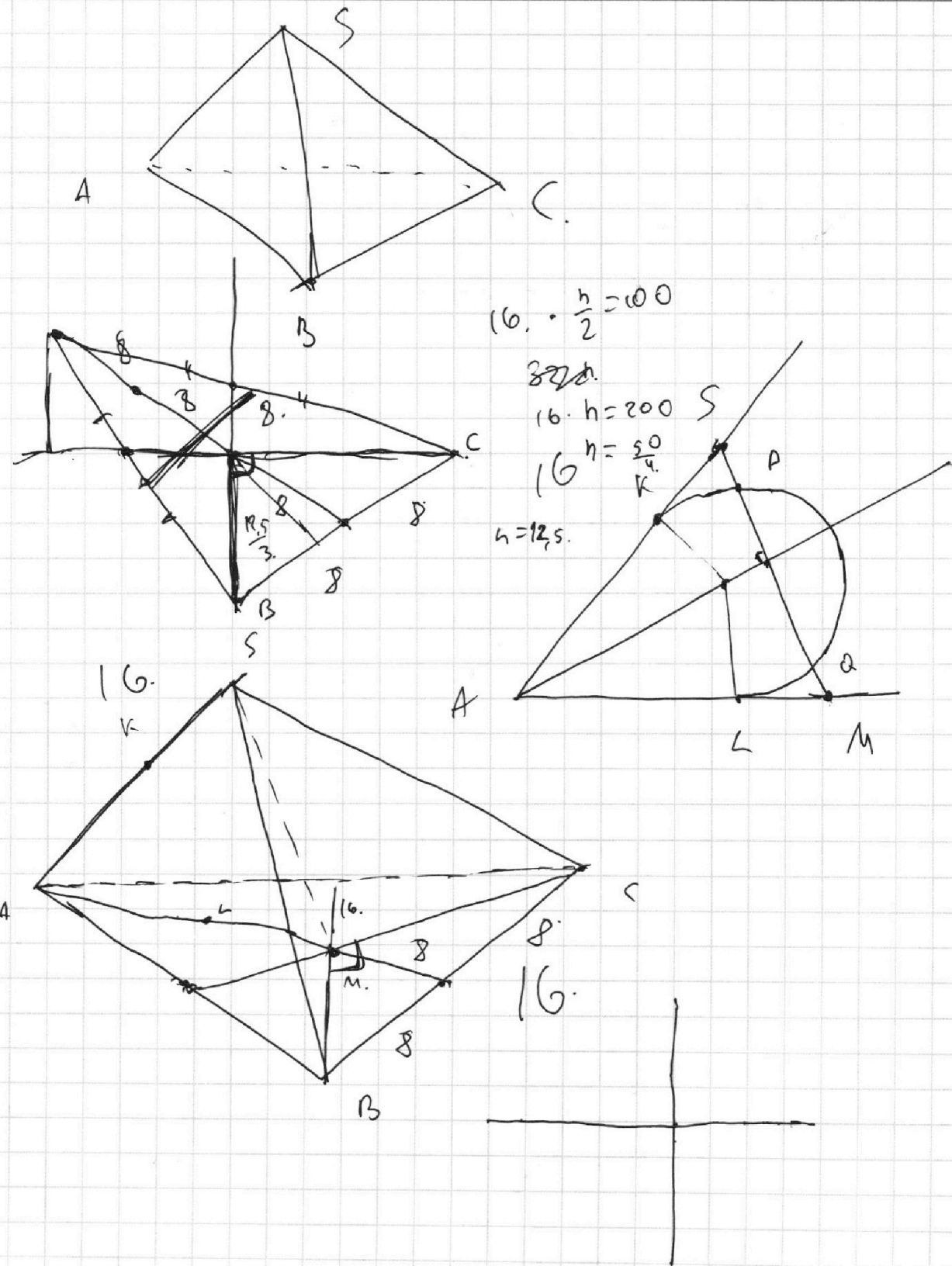
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

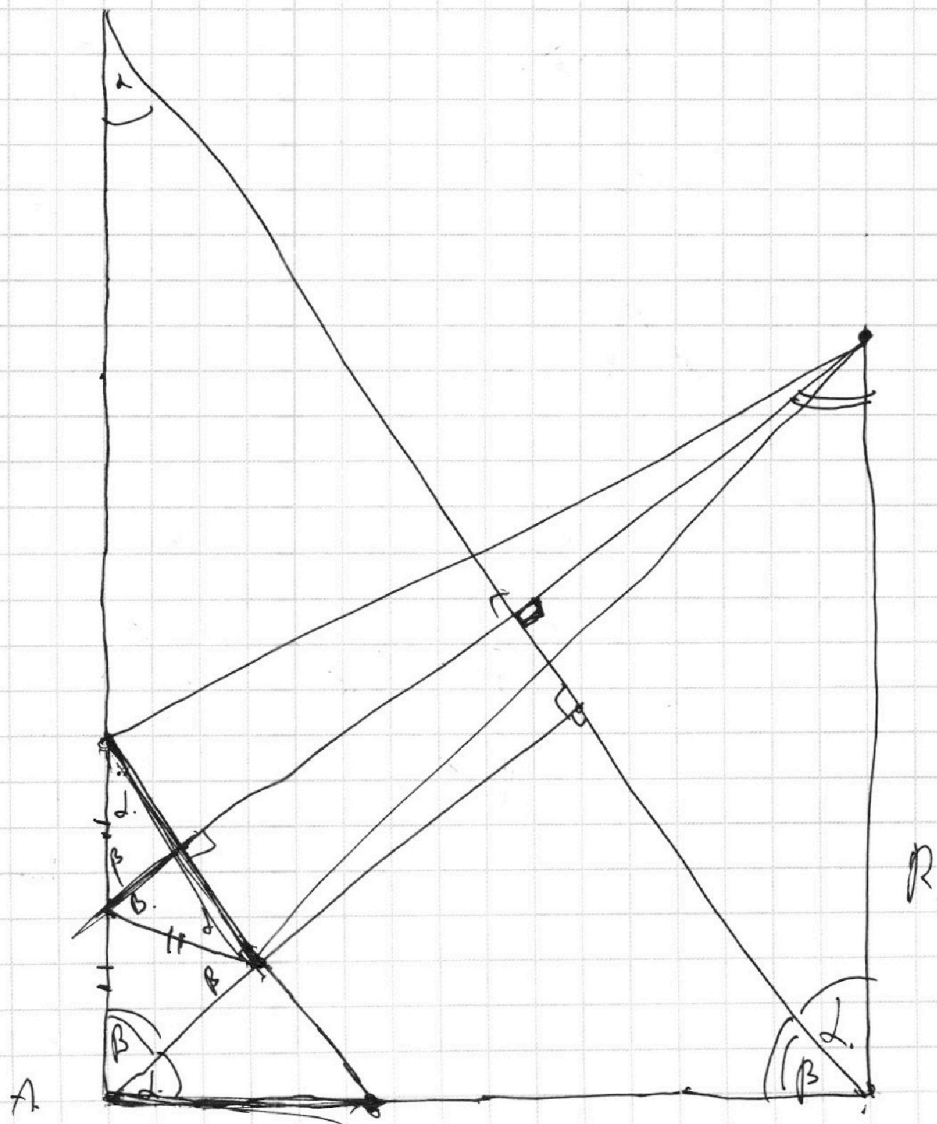


$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(t) - 3 \log_t 5 = \log_{1,3} 625 - 3$$

$$\log_5^7(y) + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

$$\log_7(xy) = \log$$



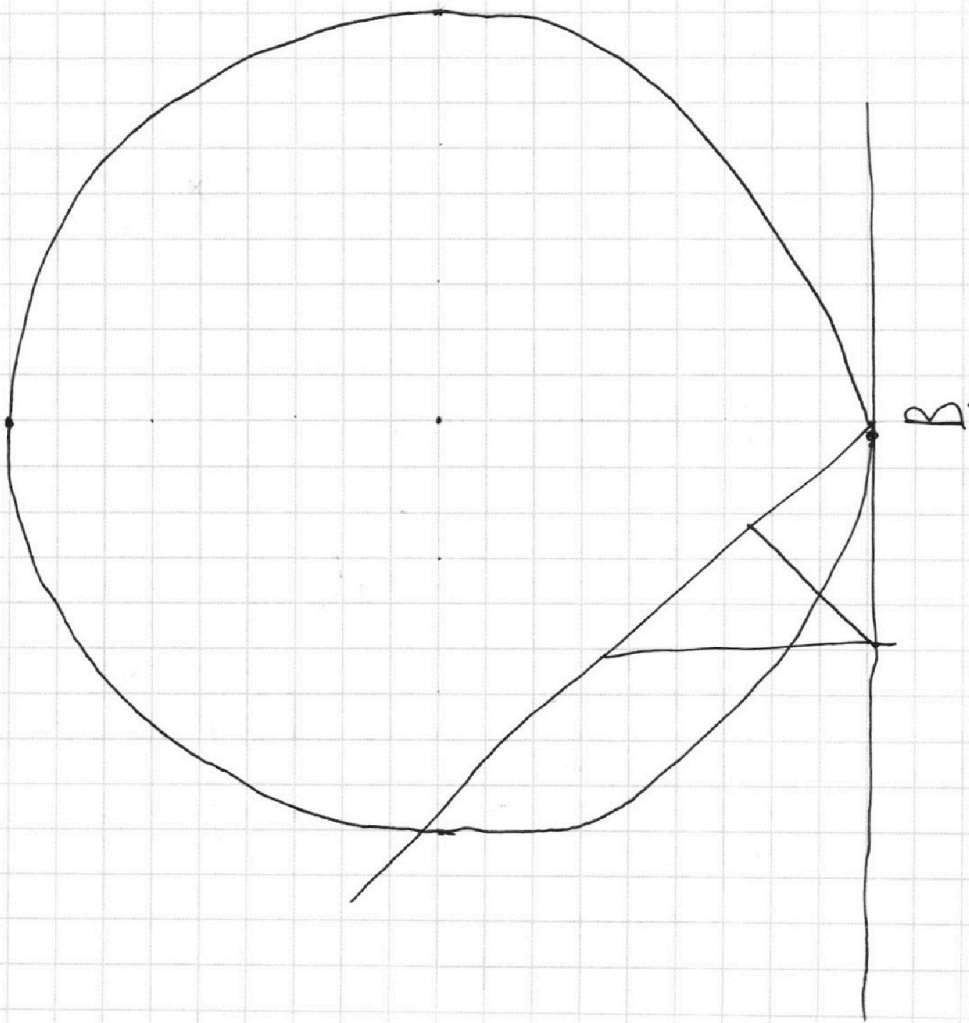
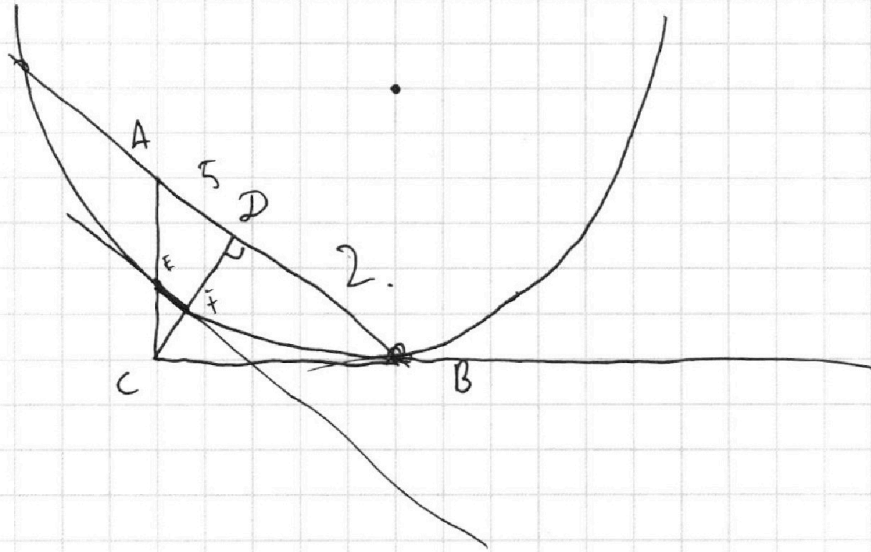
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

$$abc: 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

a_7

$$b = 2^3 3^7$$

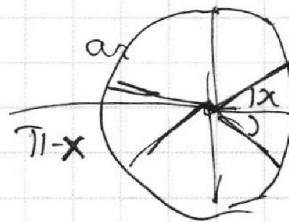
$$a = 2^5 3^7 5^{12}$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$



$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi k - x\right) = \pi - 2x.$$

$$5\pi - 20\pi k - x = \pi - 2x.$$

$$4\pi + x = 20\pi k.$$

$$-84x = 20\pi k - 4\pi$$

$$-84x = 4(5\pi k - \pi)$$

$$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + x\right) = \pi - 2x.$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x.$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k$$

$$3x = -\pi - 5\pi k$$

$$x = \frac{5\pi k - \pi}{3}$$