МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

1. Воспользуемся основной теоремой арифметики и разложим числа $a, b, c$. $a = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\dots$; $\beta = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}\dots$; $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}5^{\gamma_3}\dots$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$

Ясно, что разложение может быть бесконечным, но т.к. мы ищем наименьшее $abc$ условимся, что $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при $i \geq 4 = 0$. Тогда условие того, что $ab \vdots 2^8 3^{10} 5^{10} \Leftrightarrow 2^{\alpha_1+\beta_1}3^{\alpha_2+\beta_2}5^{\alpha_3+\beta_3} \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$, что равносильно системе:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3+\beta_3 \geq 10. \end{cases}$$

Аналогично составим системы для: $bc$ и $ac$

$$\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

Сложим первые ур-ия 3 систем: $2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 42 \Rightarrow$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 21$. Аналогично $\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \geq 41/2$ и $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 53/2$

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \to \min \Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 21$ и с учётом $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i \in \mathbb{Z}$: $\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 = 20$; $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = 26$. $\Rightarrow$

$\min(abc) = 2^{21}3^{20}5^{26}$.

P.S. В начале решения мы обусловились, что $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ при $i \geq 4 = 0$

Ясно, что мы не можем так же исключить и степени $i \leq 3$, т.к. числа $2, 3, 5$ — простые и есть в числах, на которые по условию делятся $ab$, $bc$ и $ac$.

Также это следует из систем ур-ий, полученных нами.

Ответ: $2^{21}3^{20}5^{26}$.

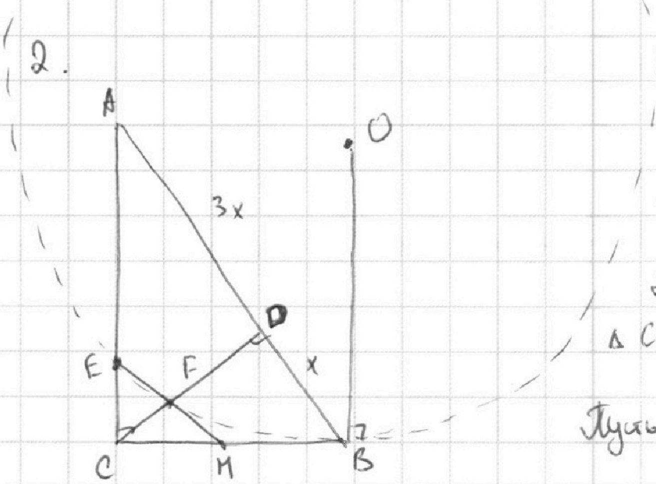
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.




Продолжим отрезок EF до пересечения с BC в т. M. $EM \parallel AB \Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$ (следует из равенства углов EMC и ABC и CAB и CEM)

Также аналогично $\triangle CFM \sim \triangle CDB$ и $\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow AD : DB = EF : FM = 3:1$.

Пусть $AD = 3x$; $BD = x$.

~~Из подобия треуг ADC и ACB (∠A общий и ∠D = ∠C = 90°) CD/AD = AB~~

Из подобия треуг ADC и CDB ($\angle A = 90 - \angle ACD = \angle DCB$ и $\angle ADC = \angle CDB = 90°$)

$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$ По т-е Пифагора $BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$.

Пусть $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ с коэффициентом подобия $k$. То есть $EM = 4x \cdot k$.

Тогда $EF : FM = 3 \Rightarrow EF = 3kx$ и $FM = kx$. $MB = BC - MC = 2x - 2xk = 2x(1-k)$.

По т-е о секущей и касательной к окружности. $MB^2 = MF \cdot ME$

$(2x(1-k))^2 = kx \cdot 4kx \Rightarrow \cancel{4x^2}(1-k)^2 = \cancel{4x^2}k^2 \Rightarrow k^2 = (1-k)^2$ и $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$

ME – средняя линия. $S_{CEF} : S_{CFM} = EF : FM = 3:1 \Rightarrow S_{CEF} = \frac{3}{4} S_{CEM}$.

$\frac{S_{CEM}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}$.

Ответ: 16:3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

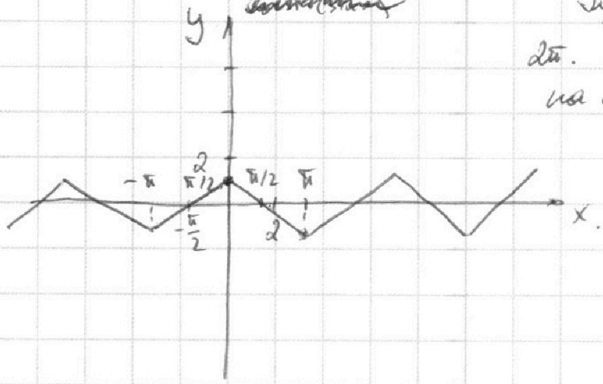
№3.

$$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=x+\frac{\pi}{2}.$$

При $x\in[0;\pi]$, $\frac{\pi}{2}-x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{\pi}{2}-x$.

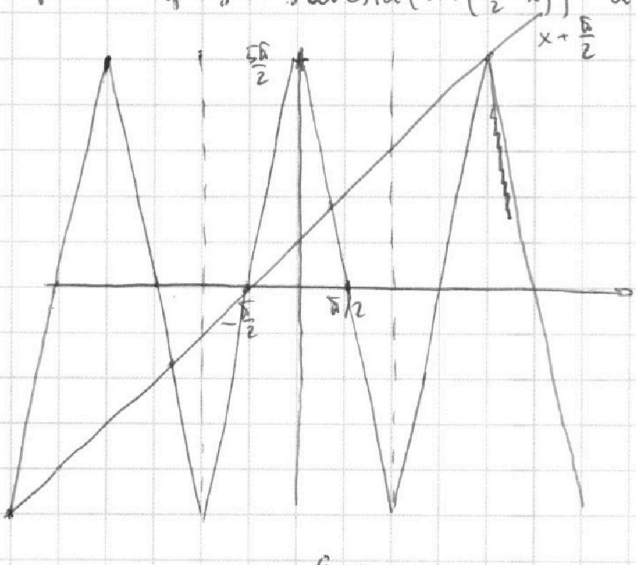
При $x\in[-\pi;0]$, $\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\pi}{2}+x$.

Построим график:




Функция периодична с периодом $2\pi$. Мы нашли, как она выглядит на отрезке $[-\pi;\pi]$

Построим график $5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$ и $x+\frac{\pi}{2}$:




Видим 5 решений:

$x=2\pi$; $x=-3\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}$;

пересечение $x+\frac{\pi}{2}$ с $\frac{5\pi}{2}-5x \Rightarrow$

$6x=2\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ и пересечение

$x+\frac{\pi}{2}$ с $-5x-\frac{15\pi}{2} \Rightarrow 6x=-8\pi \Rightarrow$

$x=-\frac{4}{3}\pi$

Ответ: $2\pi; -3\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

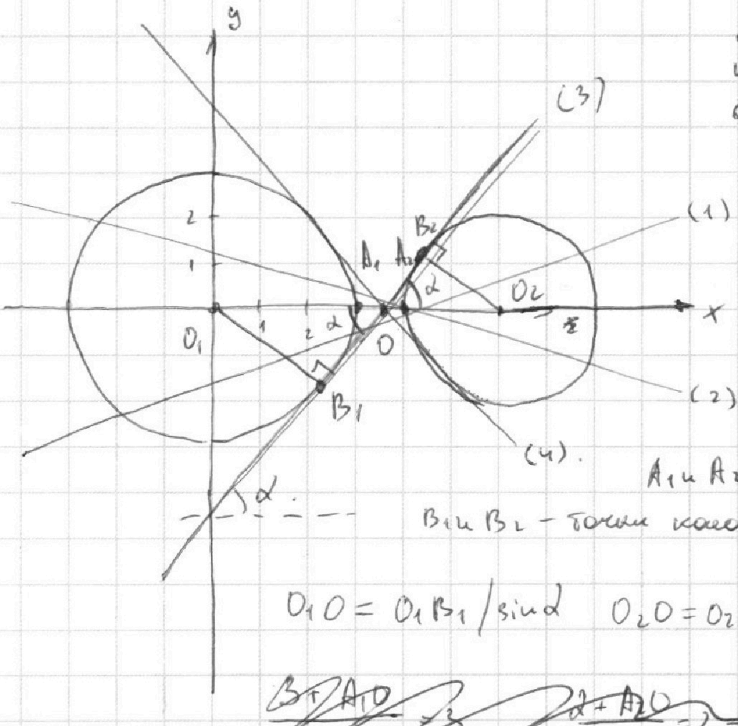
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y=3b-ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3b-ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Получаем, что решение системы это пересечение прямой $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$ с двумя окружностями: 1 – с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, 2 – с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.




Видно, что прямые 1 и 2 пересекают окружности в 4 точках. Граничными случаями являются прямые 3 и 4 – общие касательные к окружностям. Эти прямые пересекают окружности в 2 точках.

Рассчитаем угол $\alpha$.

$A_1$ и $A_2$ – т. пересеч. окруж. с $Ox$.

$B_1$ и $B_2$ – точки касания. $O$ – т. пересечения общ. касат. с $Ox$.

$$O_1O = O_1B_1/\sin\alpha \quad O_2O = O_2B_2/\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{3+A_1O}{\sin\alpha}=3} \quad \cancel{\frac{2+A_2O}{\sin\alpha}=2} \Rightarrow 3$$

$3+A_1O=\frac{3}{\sin\alpha}$ $\quad 2+A_2O=\frac{2}{\sin\alpha}$ Сложим: $A_1A_2+5=\frac{5}{\sin\alpha}$; $A_1A_2=6-3-2=1$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{5}{6}$ $\cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{a}{2}<\frac{5}{\sqrt{11}}$. Аналогично для второй касательной $-\frac{a}{2}>-\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow a>-\frac{10}{\sqrt{11}}$ и $a<\frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow$ При $-\frac{10}{\sqrt{11}}<a<\frac{10}{\sqrt{11}}$ найдётся $b$, требуемое условию.

Ответ: $a\in\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

Преобразуем: $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$ ; $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$.

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$ ; $\log_3^4(5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0$

Заметим, что $\log_3^4(5y) = (-\log_3(5y)^{-1})^4 = \log_3^4(5y)^{-1} \Rightarrow$

$\log_3^4(\cancel{25}5y)^{-1} + \frac{7}{2}\log_{(5y)^{-1}} 3 + 8 = 0.$

Пусть $f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8$. Тогда данные в условии задачи равенства представляют у себя решение $f(x) = 0$ ~~[illegible]~~.

Пусть корни $x$ и $(5y)^{-1}$ совпадают $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{5}y^{-1} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$.

Пусть они не совпадают: исследуем функцию $g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 8$. $t = \log_3 x$

$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0 \Rightarrow \frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0 \quad t \neq 0 \Rightarrow 2t^5 + 16t + 7 = 0$

$g'(t) = 10t^4 + 16 = 0 \quad t \in \varnothing \Rightarrow g'(t) > 0$, при $\forall t \Rightarrow$ функция монотонно возрастает и может пересекать $y = 0$ только в одной точке и корни $x$ и $(5y)^{-1}$ обязаны совпадать.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

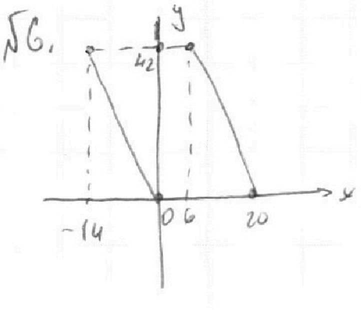
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.




Для того, чтобы точка $A(x, y)$ попадала в параллелограмм, должно выполняться условие:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq 60-3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y+3x \leq 60 \end{cases} \quad (1)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow (3x_2+y_2)-(3x_1+y_1) = 33. \quad (2)$$

Нам нужно найти кол-во способов выбрать $x_1, x_2, y_1, y_2$, чтобы выполнялись условия (1) и (2). Ясно, что если мы определим число $3x_2+y_2$, то $3x_1+y_1$ определится единственным ~~способом~~ образом. Т.к. $3x_1+y_1 \geq 0$, то $3x_2+y_2 \geq 33$, тогда каждому $3x_2+y_2$ будет соответствовать $(3x_2+y_2-33) = 3x_1+y_1$.

$3x_2+y_2 = 33, 34, 35 \ldots a \qquad 3x_1+y_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots b.$

Ясно, что для $a$ верно: $3x+y = a \Rightarrow y = a-3x \Rightarrow 0 \leq a-3x \leq$ ~~60~~ $42$.
$\Rightarrow \left\{ \frac{a}{3} - 14 \leq x \leq \frac{a}{3} \right.$. Учитывая $x \in \mathbb{Z}$: $\left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil - 14 \leq x \leq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor$, где $\lceil x \rceil$ — минимальное число не меньше $x$, $\lfloor x \rfloor$ — максимальное число, не больше $x$ $\Rightarrow$ вариантов выбрать $x$ всего $\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$.
Для каждого выбранного $x$ соответствует $y$ такое, что $y = a-3x \Rightarrow$ кол-во способов выбрать $y+3x$ $\div \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$, что для $a \,\vdots\, 3$ даёт 15, а для $a \not\vdots\, 3$ — 14 $\Rightarrow$ т.к. среди пар $(33; 0); (34; 1); \ldots$ если $y \,\vdots\, 3$, то и $x \,\vdots\, 3$, то если ~~вторая~~ пара $\vdots\, 3$, то кол-во способов: $15^2 = 225$, иначе — $14^2 = 196$. Среди пар $(33;0); (34;1); \ldots (60; 27)$ $\frac{59-33+1}{3}+1 = 10$ кратных 3 и $28-10 = 18$ не кратных $\Rightarrow$ Ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196 = 5778$.

Ответ: 5778.

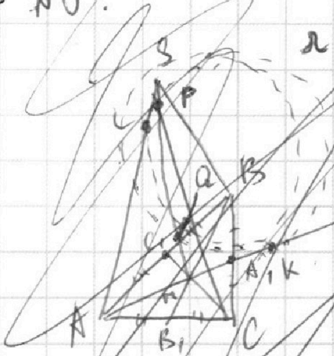
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

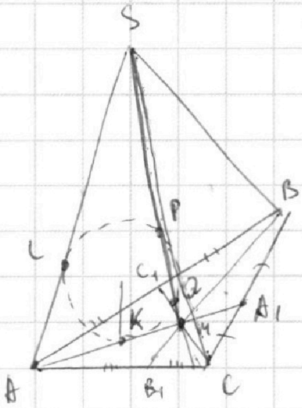
~~№7.~~



~~Т.к. L - т. касания и K т. касания, по т-е о касательных AL = AK. SP = QM => т. S и т. M имеют одинаковую степень относительно сферы => SL = MK => AM = AM~~

~~SL = MK и AL = AK => AK + MK = SL + AL = 5.~~

№7.



$SP = QM \Rightarrow$ т. $S$ и $M$ имеют одинаковую степень точки относительно сферы $\Rightarrow SL = MK$.

$AL = AK$, по т-е о касательных $\Rightarrow AS = AM = 5$

$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

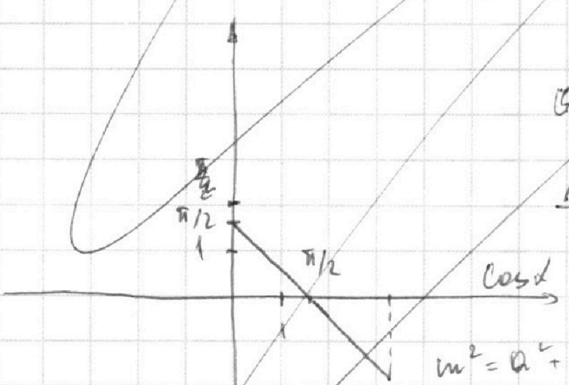
№3. $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

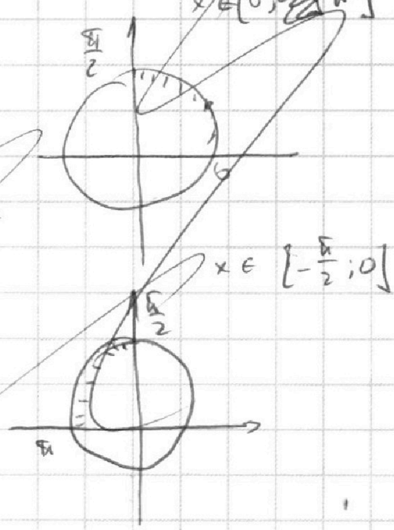
$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}.$

При $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x.$

При $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} + x.$

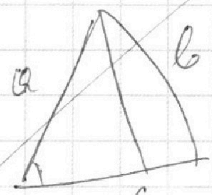
Построим график $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$



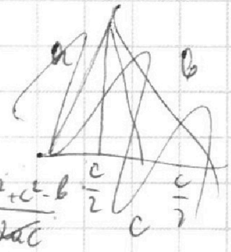


$x \in [0; \pi]$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

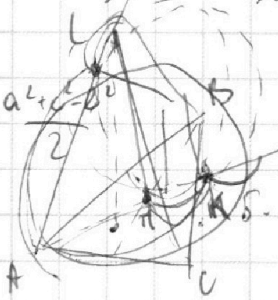


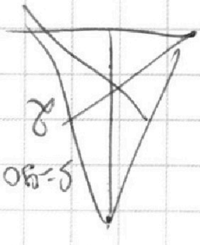
$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b}{2ac}$



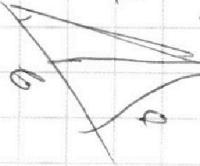
$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2a\frac{c}{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b}{2ac}$

$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$





$OB = 5$



$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

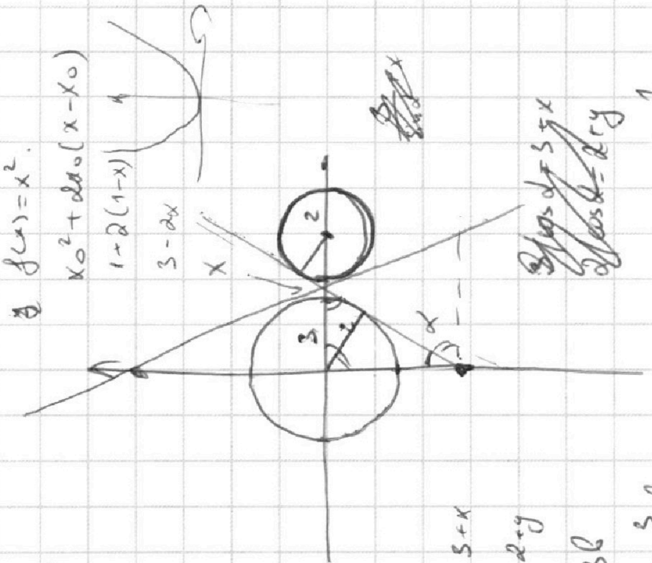
$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = x^2$.

$x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$

$1 + 2(1-x)$

$3 - 2x$



$\frac{3}{\sin\alpha} = 3 + x$

$\frac{2}{\sin\alpha} = 2 + y$

$2y = -ax + 3b$

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$.

$\frac{3}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} = 5 + x + y = 6$

$36-25$

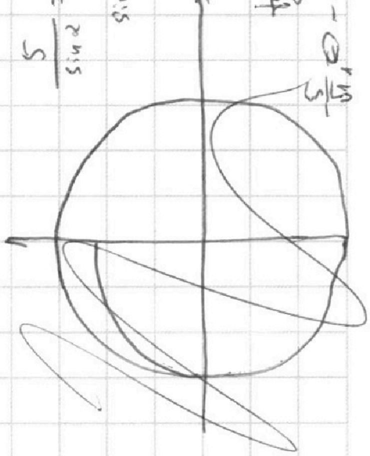
$\frac{5}{\sin\alpha} = 6$

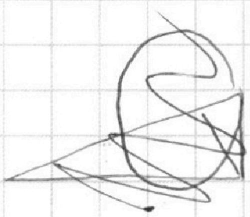
$\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

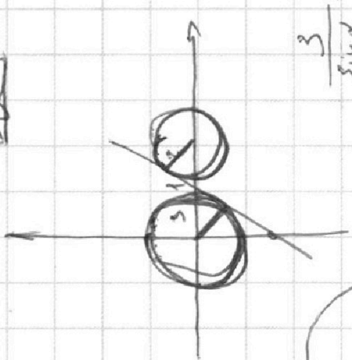
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$

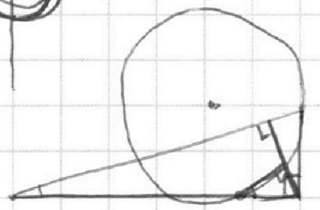
$\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$







$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$

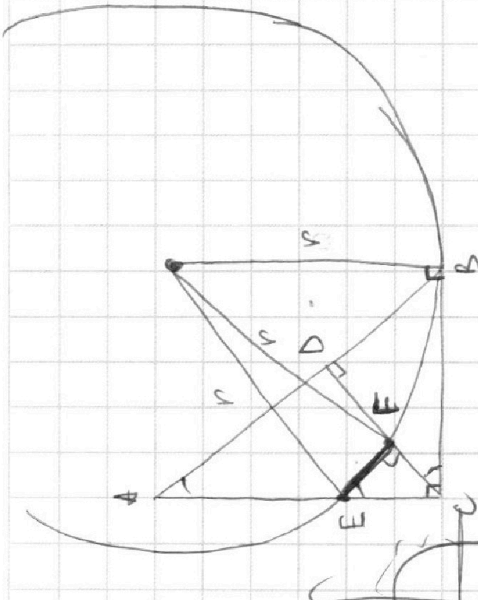


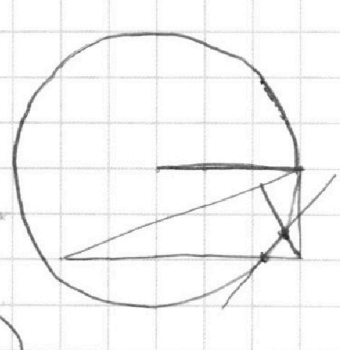
$ax + 2y - 3b = 0$

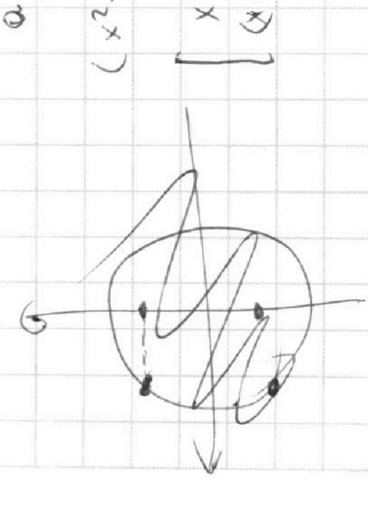
$x^2 - 12x + 36$

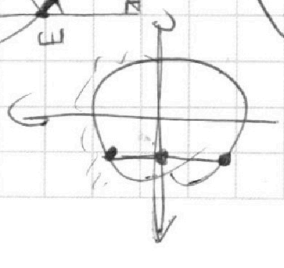
$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4. \end{array}\right.$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab \,\vdots\, 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{13} 5^{13}$; $ac \,\vdots\, 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$ $\quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ $\quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$2^{\alpha_1+\beta_1} 3^{\alpha_2+\beta_2} 5^{\alpha_3+\beta_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3+\beta_3 \geq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 42$

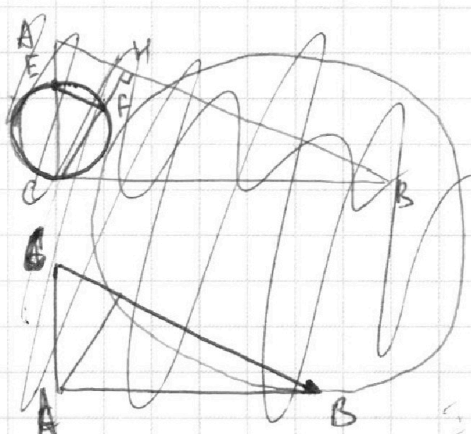
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 21$.

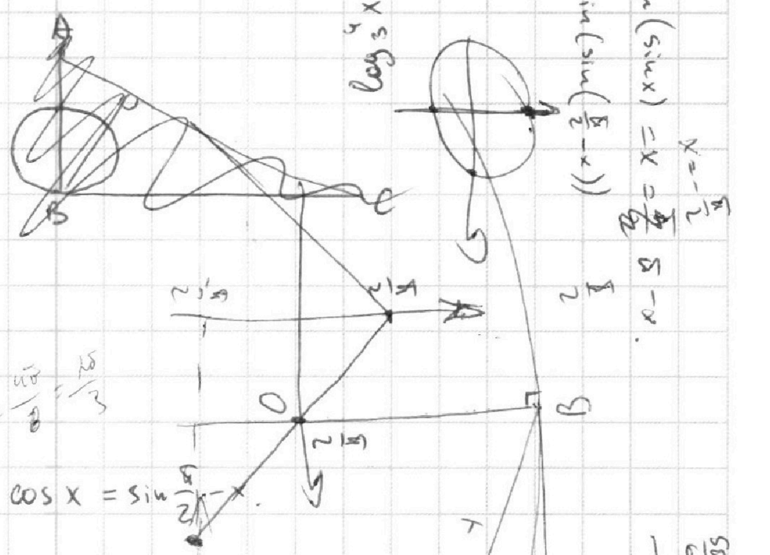
$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq$

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$ $\quad$ 1 есть.

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x^2 3 \cdot 2\log_3 - 8$

2.





arcsin(sin(x − π/2))

arcsin(sin x) = x

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

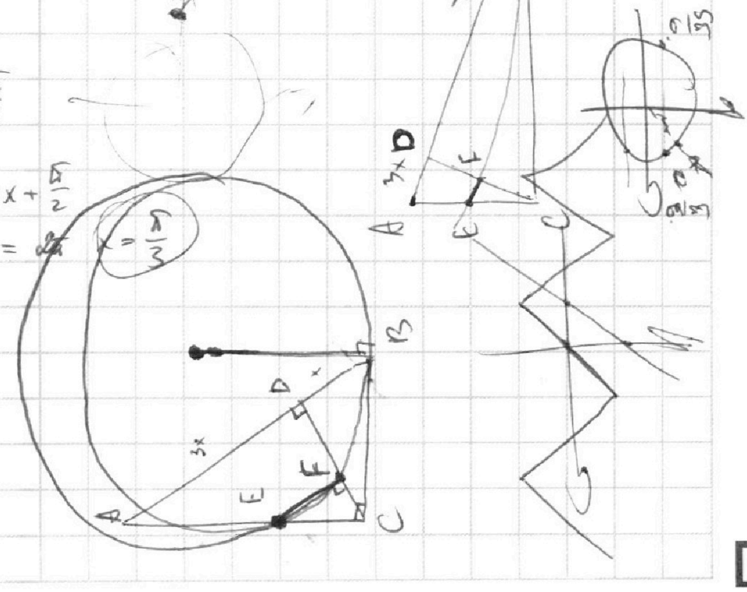
$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi$ $\quad x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$ $\quad \log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 - 8 = 0$

$x = 5y^{-1}$

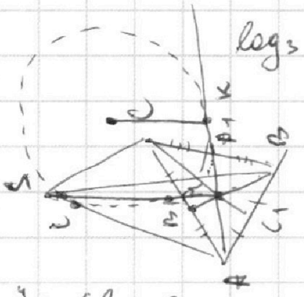
$\log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8,$ $\quad \log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8 = 0$

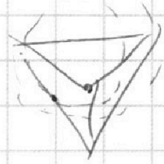
$xy = 5$

$\log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 = 6\log_{25y^2}(243) - 8.$ $\quad \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 - 8 = 0$

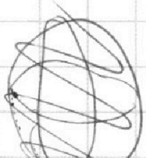
$\log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 - 8 = 0$

$\log_3^4 5y^{-1} + \frac{7}{2}\log_{5y^{-1}} 3 -$

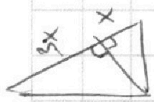


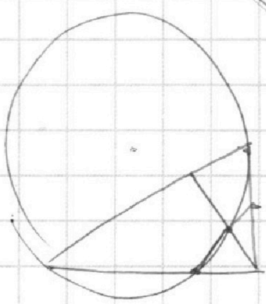


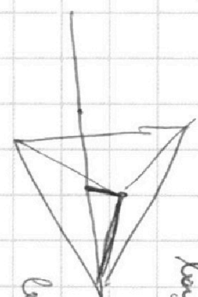
~~$f(x) = \log_3^4 x + 6\log_x 3$~~

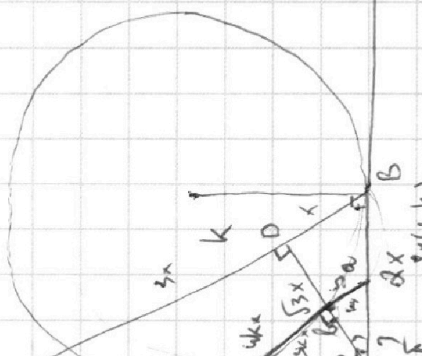


$f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 - 8$

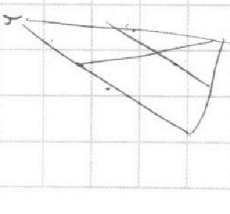


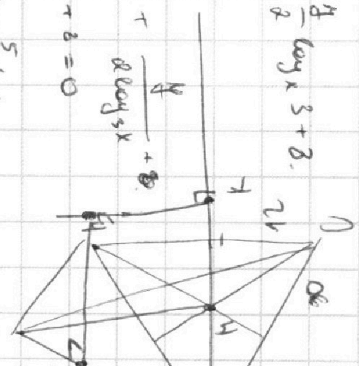






$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$





$k = \frac{1}{2}(1-k)$

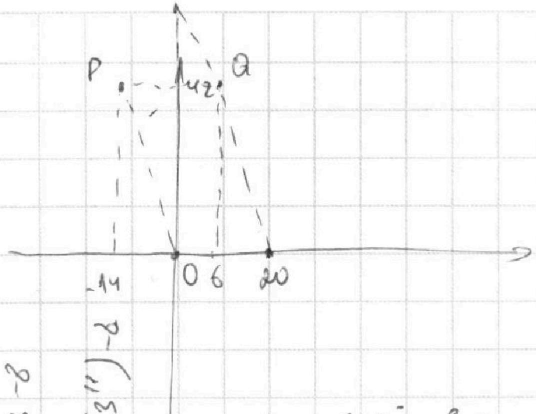
$3k = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




$y = \frac{-42}{14}x = -3x \quad y=0 \quad y=42 \quad y=60-3x$

$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \\ y \leq 60-3x \end{cases}$

$0 \leq y \leq 42$

$-3x \leq y \leq 60-3x$

$0 \leq y+3x \leq 60$

$0 \leq y_1+3x_1 \leq 60$

$0 \leq y_2+3x_2 \leq 60$

$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y+3x \leq 60 \end{cases}$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

$(y_2+3x_2) - (y_1+3x_1) = 33$

$(y_2+3x_2)-(y_1+3x_1)=33$

$\geq 33$

33 34 … 60

0 1 2 … 27

$y+3x = a$

$0 \leq 33-3x \leq 42$

$-33 \leq -3x \leq 9$

$-3 \leq x \leq 11$

$y = a-3x$

$0 \leq a-3x \leq 42$

$-a \leq -3x \leq 42-a$

$\frac{a-42}{3} \leq x \leq \frac{a}{3}$

$\left[\frac{a}{2}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] + 14 + 1$

$\left[\frac{a}{3}\right] - 14 \leq x \leq \left[\frac{a}{3}\right]$

$\left[\frac{a}{3}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] + 14 + 1$

$11-14 \leq x \leq 11$

$-3 \leq x \leq 11$

$11-(-3)+1$

$15^2 \cdot 10 + 14^2 \cdot 13$

×28

2250

$\log_3{}^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3{}^4(5y) + 6\log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 243 - 8$

$\log_3{}^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$