МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. Воспользуемся основной теоремой арифметики и разложим числа a, b, c. $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \ldots$; $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \ldots$; $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \ldots$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$

Ясно, что разложение может быть бесконечным, но т.к. мы ищем наименьшее abc условимся, что $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при $i \geq 4 = 0$. Тогда условие того, что $ab : 2^{8} 3^{10} 5^{10} \Leftrightarrow 2^{\alpha_1+\beta_1} 3^{\alpha_2+\beta_2} 5^{\alpha_3+\beta_3} : 2^{9} 3^{10} 5^{10}$, что равносильно системе:
$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3+\beta_3 \geq 10. \end{cases}$$
Аналогично составим системы для: bc и ac

$$\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 30 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$
Сложим первые ур-ия 3 систем: $2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 42 \Rightarrow$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 21$. Аналогично $\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \geq 41/2$ и $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 53/2$

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \to min \Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 21$ и с учётом $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i \in \mathbb{Z}$: $\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 = 20$; $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = 26$. $\Rightarrow$

$min(abc) = 2^{21} 3^{20} 5^{26}$.

P.S. В начале решения мы обусловились, что $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ при $i \geq 4 = 0$

Ясно, что мы не можем так же исключить и степени $i \leq 3$, т.к. числа 2, 3, 5 - простые и есть в числах, на которые по условию делятся ab, bc и ac.

Также это следует из систем ур-ий, полученных нами.

Ответ: $2^{21} 3^{20} 5^{26}$.

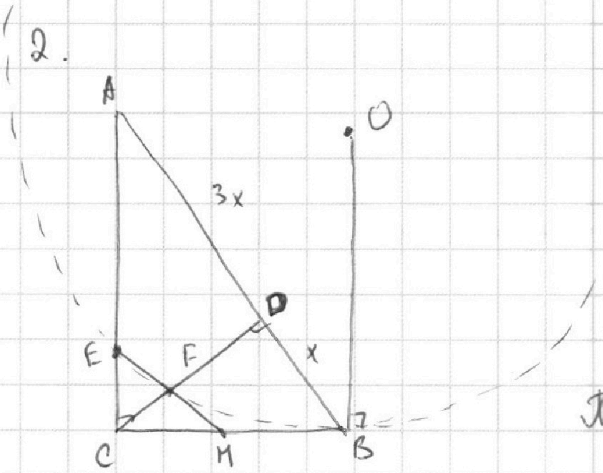
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Продолжим отрезок EF до пересечения CB в т. M. $EM \parallel AB \Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$ (следует из равенства углов EMC и ABC и CAB и CEM)

Также аналогично $\triangle CFM \sim \triangle CDB$ и $\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow AD : DB = EF : FM = 3:1$.

Пусть $AD = 3x$; $BD = x$.

~~Из подобия треуг ADC и ACB (∠A общий и ∠D = ∠C = 90°) CD/AD = AB~~

Из подобия треуг ADC и CDB ($\angle A = 90 - \angle ACD = \angle DCB$ и $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$)

$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$ По т-е Пифагора $BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$.

Пусть $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ с коэффициентом подобия k. То есть $EM = 4x \cdot k$.

Тогда $EF : FM = 3 \Rightarrow EF = 3kx$ и $FM = kx$. $MB = BC - MC = 2x - 2xk = 2x(1-k)$.

По т-е о секущей и касательной к окружности. $MB^2 = MF \cdot ME$

$(2x(1-k))^2 = kx \cdot 4kx \Rightarrow \cancel{4x^2}(1-k)^2 = \cancel{4x^2}k^2 \Rightarrow k^2 = (1-k)^2$ и $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$

ME – средняя линия. $S_{CEF} : S_{CFM} = EF : FM = 3:1 \Rightarrow S_{CEF} = \frac{3}{4} S_{CEM}$.

$\frac{S_{CEM}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}$.

Ответ: 16:3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

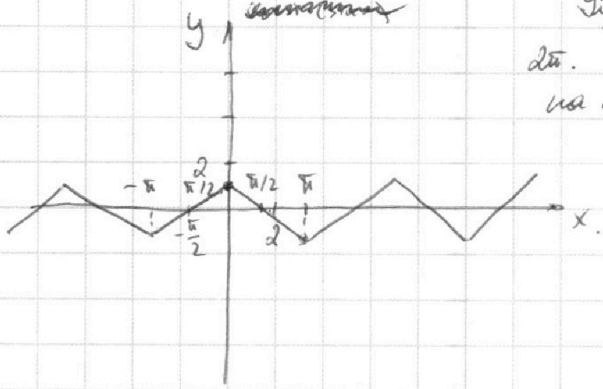
№3.

$$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = x+\frac{\pi}{2}.$$

При $x\in[0;\pi]$, $\frac{\pi}{2}-x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{\pi}{2}-x.$

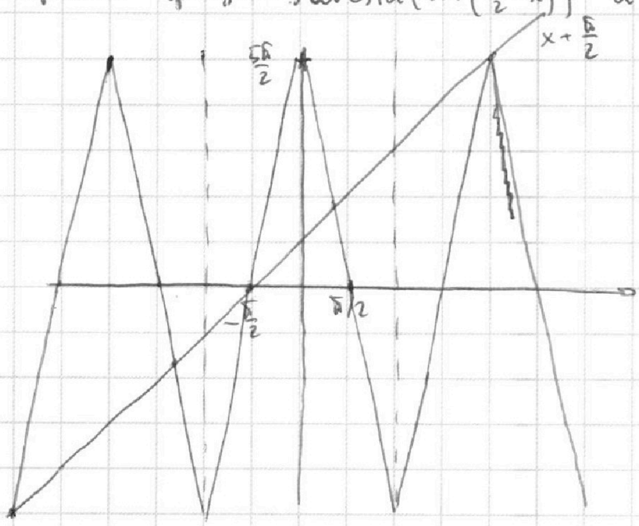
При $x\in[-\pi;0]$, $\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\pi}{2}+x.$

Построим график:



Функция периодична с периодом 2π. Мы нашли, как она выглядит на отрезке $[-\pi;\pi]$

Построим график $5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$ и $x+\frac{\pi}{2}$:



Видим 5 решений:

$x=2\pi$; $x=-3\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}$;

пересечение $x+\frac{\pi}{2}$ с $\frac{5\pi}{2}-5x \Rightarrow$

$6x=2\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ и пересечение

$x+\frac{\pi}{2}$ с $-5x-\frac{15\pi}{2} \Rightarrow 6x=-3\pi \Rightarrow$

$x=-\frac{4}{3}\pi$

Ответ: $2\pi; -3\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

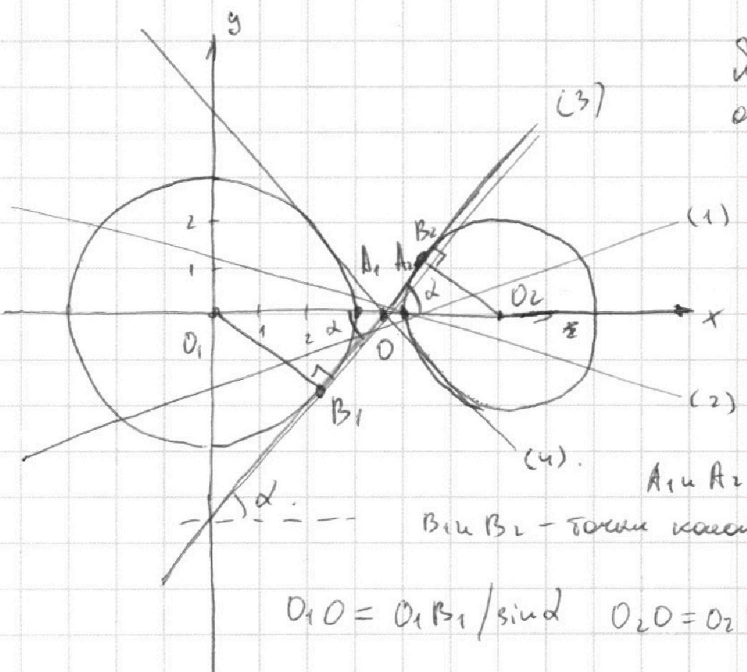
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Получаем, что решение системы это пересечение прямой $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с двумя окружностями: 1 – с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, 2 – с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.



Ясно, что прямые 1 и 2 пересекают окружности в 4 точках. Пограничными случаями являются прямые 3 и 4 – общие касательные к окружностям. Эти прямые пересекают окружности в 2 точках.

Рассчитаем угол α.
A_1 и A_2 – т. пересеч. окружн. с Ox.
B_1 и B_2 – точки касания. O – т. пересечения общ. касат. с Ox.

$O_1O = O_1B_1/\sin\alpha$ $\quad O_2O = O_2B_2/\sin\alpha \Rightarrow$

$\cancel{\frac{3+A_1O}{\sin\alpha} = 3} \quad \cancel{\frac{2+A_2O}{\sin\alpha} = 2} \Rightarrow 3$

$3 + A_1O = \frac{3}{\sin\alpha}$ $\quad 2 + A_2O = \frac{2}{\sin\alpha}$ Сложим: $A_1A_2 + 5 = \frac{5}{\sin\alpha}$; $A_1A_2 = 6-3-2=1$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{6}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$. Аналогично для второй касательной $-\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$ и $a < \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow$ При $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$ найдётся b, требуемое условию.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

Преобразуем: $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$; $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$.

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$; $\log_3^4(5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0$

Заметим, что $\log_3^4(5y) = (-\log_3(5y)^{-1})^4 = \log_3^4(5y)^{-1}$ =>

$\log_3^4(5y)^{-1} + \frac{7}{2}\log_{(5y)^{-1}} 3 + 8 = 0$.

Пусть $f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8$. Тогда данные в условии задачи равенства представляют у себя решения $f(x) = 0$ ~~[illegible]~~.

Пусть корни x и $(5y)^{-1}$ совпадают => $x = \frac{1}{5}y^{-1}$ => $xy = \frac{1}{5}$.

Пусть они не совпадают: исследуем функцию $g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 8$. $t = \log_3 x$

$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$ => $\frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0$ $\quad t \neq 0$ => $2t^5 + 16t + 7 = 0$

$g'(t) = 10t^4 + 16 = 0$ $\quad t \in \varnothing$ => $g'(t) > 0$, при $\forall t$ => функция монотонно возрастает и может пересекать $y = 0$ только в одной точке и корни x и $(5y)^{-1}$ обязаны совпадать.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

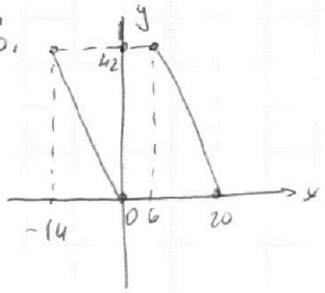
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.



Для того, чтобы точка $A(x, y)$ попадала в параллелограмм, должно выполняться условие:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq 60-3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y+3x \leq 60 \end{cases} \quad (1)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow (3x_2+y_2)-(3x_1+y_1) = 33. \quad (2)$$

Нам нужно найти кол-во способов выбрать x_1, x_2, y_1, y_2, чтобы выполнялись условия (1) и (2). Ясно, что если мы определим число $3x_2+y_2$, то $3x_1+y_1$ определится единственным ~~способом~~ образом. Т.к. $3x_1+y_1 \geq 0$, то $3x_2+y_2 \geq 33$, тогда каждому $3x_2+y_2$ будет соответствовать $(3x_2+y_2-33) = 3x_1+y_1$.

$3x_2+y_2 = 33, 34, 35 \dots a \qquad 3x_1+y_1 = 0, 1, 2, 3 \dots b.$

Ясно, что для a верно: $3x+y = a \Rightarrow y = a-3x \Rightarrow 0 \leq a-3x \leq 42.$
$\Rightarrow \left\{ \frac{a}{3} - 14 \leq x \leq \frac{a}{3}\right.$. Учитывая $x \in \mathbb{Z}$: $\lceil \frac{a}{3} \rceil - 14 \leq x \leq \lfloor \frac{a}{3} \rfloor$, где $\lceil x \rceil$ – минимальное число не меньшее x, $\lfloor x \rfloor$ – максимальное число, не большее x $\Rightarrow$ вариантов выбрать x всего $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor - \lceil \frac{a}{3} \rceil + 15$.
Для каждого выбранного x соответствует y такое, что $y = a-3x \Rightarrow$ кол-во способов выбрать $y+3x$: $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor - \lceil \frac{a}{3} \rceil + 15$, что для $a \vdots 3$ даёт 15, а для $a \not\vdots 3$ – 14 $\Rightarrow$ т.к. среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots$ если $y \vdots 3$, то и $x \vdots 3$, то если ~~[illegible]~~ пара $\vdots 3$, то кол-во способов: $15^2 = 225$, иначе – $14^2 = 196$. Среди пар $(33;0); (34;1); \dots (60;27)$ $\frac{59-33+1}{3}+1$ $= 10$ кратных 3 и $28-10 = 18$ не кратных $\Rightarrow$ ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196 = 5778$.

Ответ: 5778.

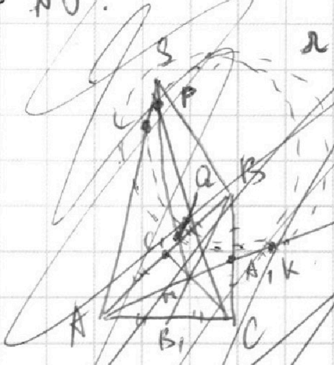
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

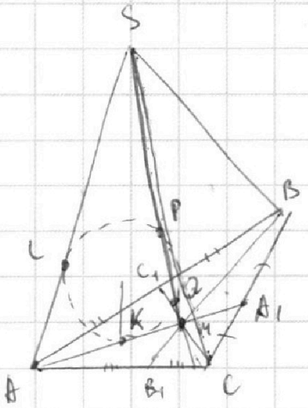
~~№7.~~



~~Т.к. L - т. касания и K т. касания, по т-е о касательных AL = AK. SP = QM => т. S и т. M имеют одинаковую степень относительно сферы => SL = MK => AH = AM~~

~~SL = MK и AL = AK => AK + MK = SL + AL = 5.~~

№7.



SP = QM => т. S и M имеют одинаковую степень точки относительно сферы => SL = MK.

AL = AK, по т-е о касательных => AS = AM = 5

=> $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

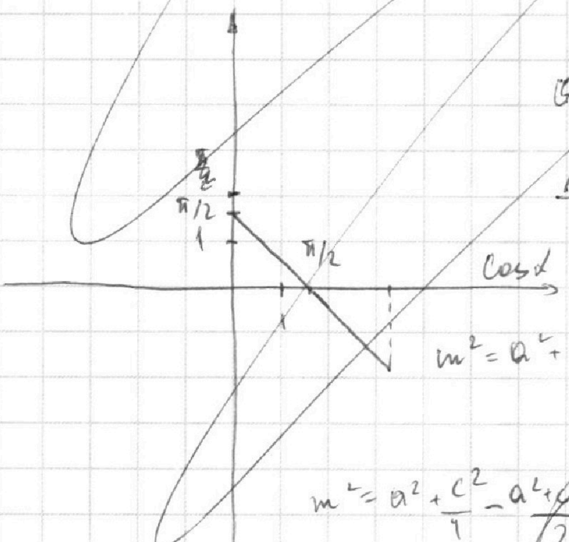
№3. $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

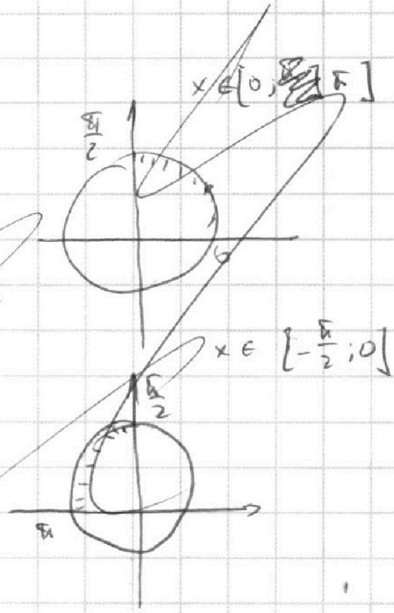
$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$.

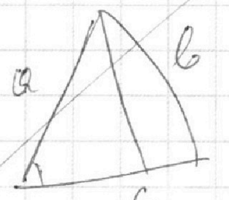
Для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$.

Для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} + x$.

Построим график $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$



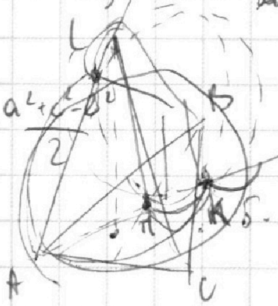




$\cos\alpha = \frac{a^2+c^2-b}{2ac}$

$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2a\frac{c}{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b}{2ac}$

$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$



$y = kx + b$

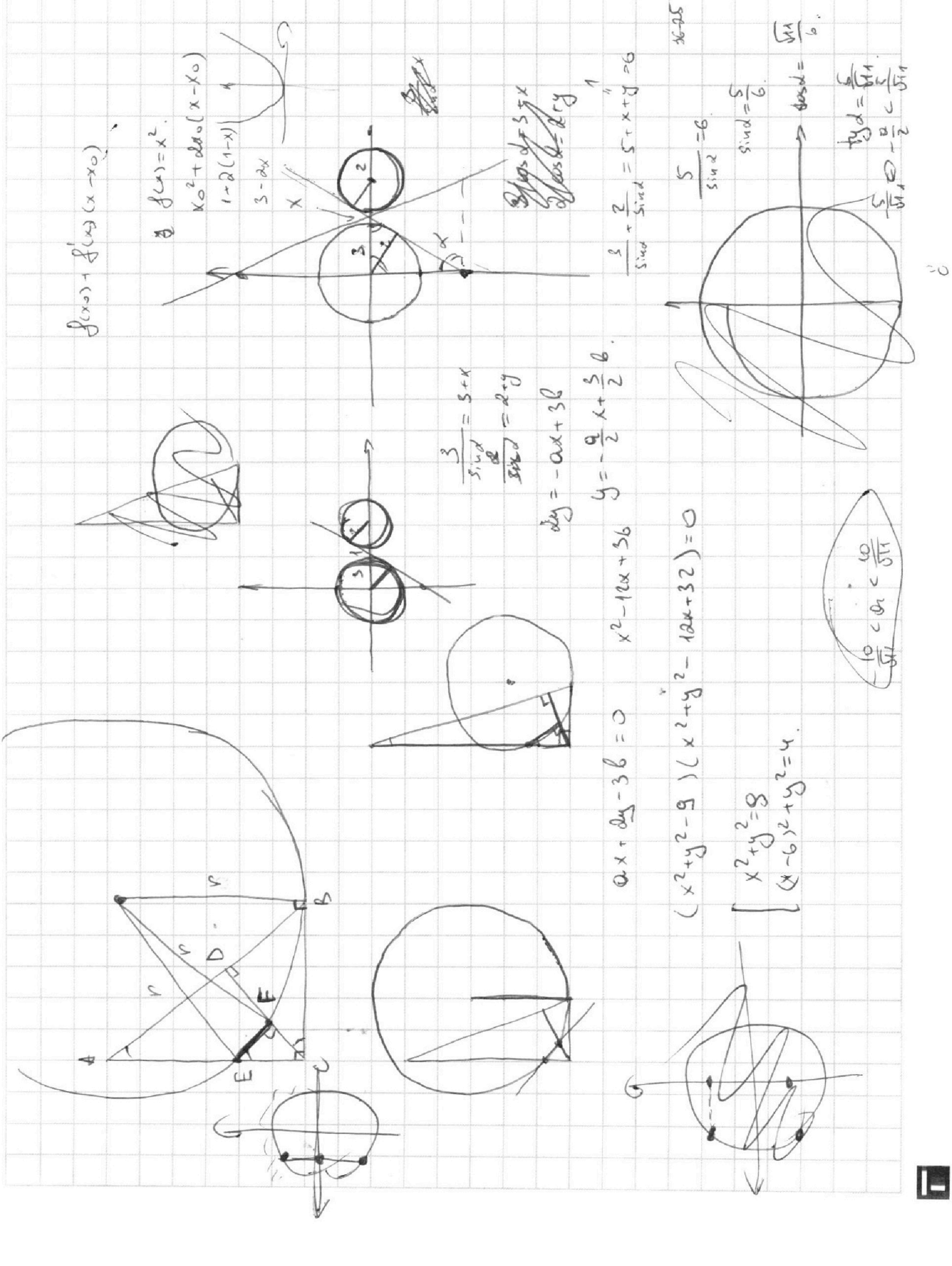
$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x)=x^2$

$x_0^2+2x_0(x-x_0)$

$1+2(1-x)$

$3-2x$

$\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{2}{\sin\alpha}=5+x+y=6$

$\frac{5}{\sin\alpha}=6$

$\sin\alpha=\frac{5}{6}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{6}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\frac{3}{\sin\alpha}=3+x$

$\frac{2}{\sin\alpha}=2+y$

$y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$

$ax+2y-3b=0$

$x^2-12x+36$

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$\left[\begin{array}{l}x^2+y^2=9\\(x-6)^2+y^2=4\end{array}\right.$

$\frac{10}{\sqrt{11}}<a<\frac{10}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$; $ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$ $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$2^{\alpha_1+\beta_1} 3^{\alpha_2+\beta_2} 5^{\alpha_3+\beta_3}$

$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3+\beta_3 \geq 10 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 30 \end{cases}$

$2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 42$
$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 21$
$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq$

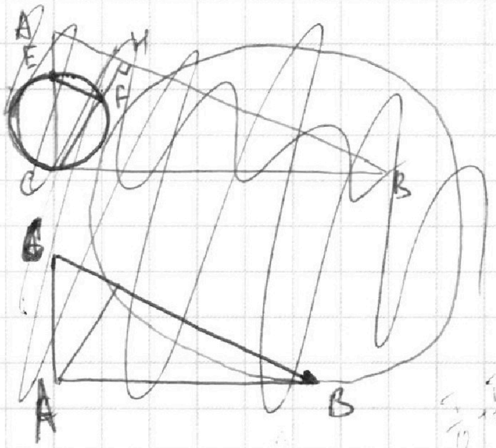
$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$ 1 есть.

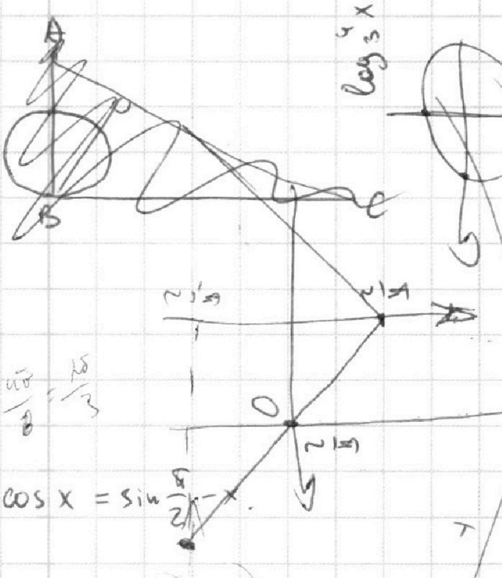
$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x^2 3 \cdot 2\log 3 - 8$

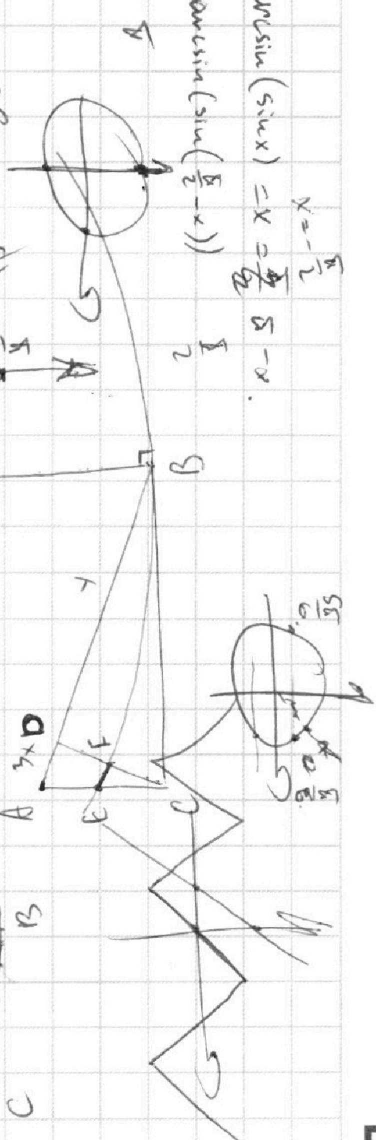
$\arcsin(\sin(x - \frac{\pi}{2}))$

$\arcsin(\sin x) = x$

2.







$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

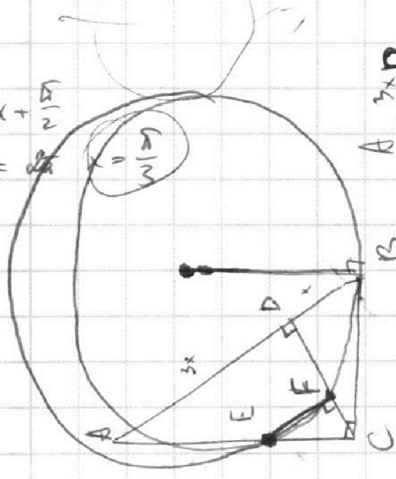
$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi$ $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 - 8 = 0$

$x = 5y^{-1}$

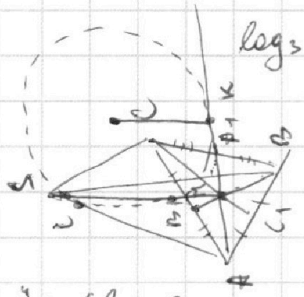
$\log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

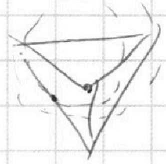
$\log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8 = 0$

$xy = 5$

$\log_3^4 x + 2\log_{5y} 3 = 6\log_{25y^2}(243) - 8$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 - 8 = 0$

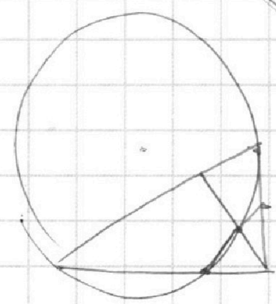


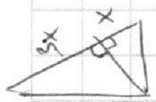


$\log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 - 8 = 0$

$\log_3^4 5y^{-1} + \frac{7}{2}\log_{5y^{-1}} 3$

$f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 - 8$





$\frac{3x}{5} = \frac{5\sqrt{3}x}{...}$

$y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}x$

$\sqrt{3x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$

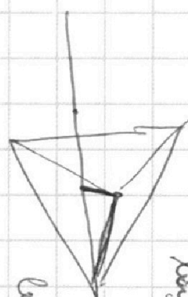
$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4(5y) + 4\log_{5y} 3 + \log_{25y^2} 3$

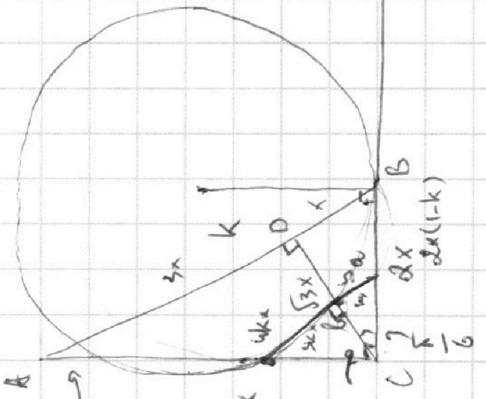
$\log_3^4(5y) + 6\log_{5y} 3 = 8\log_{25y^2} 3$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8$



$10x^4 + 16 = 0$



$kx \cdot 4kx = (2k(1-k))^2$

$k^2 \cdot 4 = 4(1-k)^2$

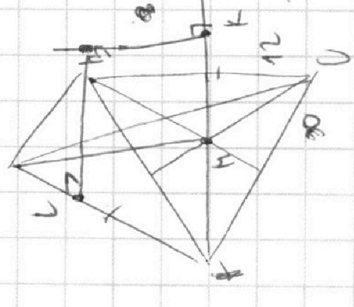
$k = 1 - k$

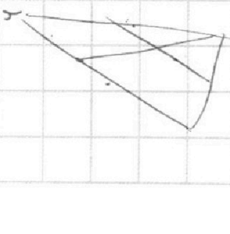
$k = \frac{1}{2}$

$k = \pm(1-k)$

$2k = 1$

$\frac{1}{4} \cdot ABC \Rightarrow 16/3$





$x = 5y^{-1}$

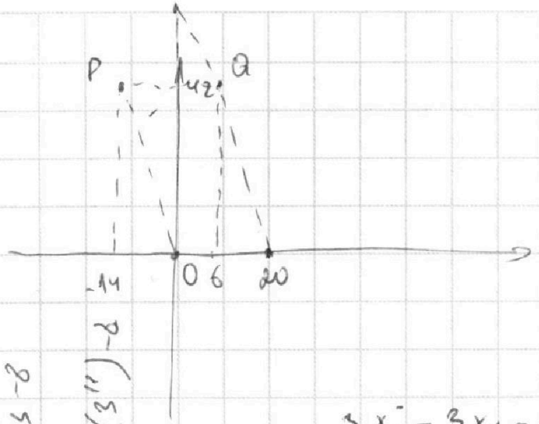
A, B, C, D, K, $3x$, $\sqrt{3}x$, $2x$, $2k(1-k)$, $4kx$, $2\sqrt{3}x$, $k=13$, $\frac{7}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$y = \frac{-42}{14}x = -3x \quad y=0 \quad y=42 \quad y = 60-3x$

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \\ y \leq 60-3x \end{cases}$$

$0 \leq y \leq 42$

$-3x \leq y \leq 60-3x$

$0 \leq y+3x \leq 60.$

$0 \leq y_1+3x_1 \leq 60$

$0 \leq y_2+3x_2 \leq 60$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y+3x \leq 60 \end{cases}$$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 33.$

$(y_2+3x_2) - (y_1+3x_1) = 33$

$\leq 60 \quad \geq 0$

$(y_2+3x_2) - (y_1+3x_1) = 33.$

≥ 33

33 34 ... 60

12 ... 24.

$y+3x = a$

$0 \leq 33-3x \leq 42$

$-33 \leq -3x \leq 9$

$-3 \leq x \leq 11$

$y+3x = a.$

$\left[\frac{a}{2}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] + 14 + 1 \quad y = a-3x$

$0 \leq a-3x \leq 42.$

$-a \leq -3x \leq 42-a.$

$\frac{a-42}{3} \leq x \leq \frac{a}{3}$

$\left[\frac{a}{3}\right] - 14 \leq x \leq \left[\frac{a}{3}\right]$

$\left[\frac{a}{3}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] + 14 + 1.$

$11 - 14 \leq x \leq 11$

$-3 \leq x \leq 11.$

$11-(-3)+1.$

$15^2 \cdot 10 + 14^2 \cdot 13.$

$\log_3{}^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3{}^4(3y) + 6\log_{3y} 3 = \log_{9y^2} 243 - 8$

$\log_3{}^4(3y) + 2\log_{3y} 3 = \log_{81y^2}(3^{11}) - 8$

2250

1568