



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$; $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$,
 где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

тогда т.к. $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, то $\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \end{cases}$

Аналогично $\begin{cases} a_1 + c_1 \geq 19 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases}$ и $\begin{cases} b_1 + c_1 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases}$

Чтобы произведение abc было наименьшим, во всех неравенствах должно стоять равенство (нужно, чтобы $a_1 + b_1 + a_1$; $a_2 + b_2 + c_2$; $a_3 + b_3 + c_3$ были минимальными)

1) $\begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - b_1 \\ 9 - b_1 + 14 - b_1 = 19 \\ c_1 = 14 - b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - b_1 \\ 2b_1 = 4 \\ c_1 = 14 - b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 10 - b_2 \\ 10 + 13 - 2b_2 = 18 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 10 - b_2 \\ 2b_2 = 5 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases} \Rightarrow b_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

\Rightarrow в каком-то из ~~неравенств~~ не может выполняться равенство

Чтобы произведение abc увеличилось минимально, увеличим минимально из неравенств

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 11 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 11 - b_2 \\ 24 - 2b_2 = 18 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 8 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 10 - b_3 \\ 23 - 2b_3 = 30 \\ c_3 = 13 - b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = -\frac{7}{2} \\ \end{cases} \Rightarrow$ не может выполняться равенство

Итак, минимальное значение достигается при $b_3 = 0 \Rightarrow$
 $\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 11 - b_3 \\ 24 - 2b_3 = 30 \\ c_3 = 13 - b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 \geq 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow$ минимальное $a_3 + b_3 + c_3 = 30$

Минимальное $abc = 2^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 3^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 5^{a_3 + b_3 + c_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

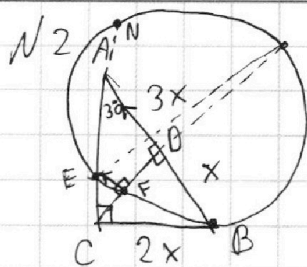
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BD = x$, тогда $AD = 3x$
как высота в \triangle :

$$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x$$

То т. Тюр в $\triangle BCD$ и $\triangle CDA$:

$$BC = 2x \quad AC = 2x\sqrt{3}$$

$$\sin \angle DAC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DAC = 30^\circ$$

т.к. $EF \parallel AD$ ~~и~~ $CD \perp AD$ $\Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$

$\Rightarrow EPD$ опирается на гипотенузу

$$\triangle CEF \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CE^2}{16x^2}$$

$$\triangle CDA \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle CDA}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CA}{4x}\right)^2$$

Пусть ~~и~~ окружность касается прямой AC второй раз в точке N , тогда т.к. BC - касательная \Rightarrow
 $\Rightarrow 4x^2 = CE \cdot CN$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(a) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 5 \arcsin(a) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\text{Чтобы выполнялось равенство: } x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in \left[-3\pi; 2\pi\right] \quad (1)$$

$$\text{Пусть } \arcsin(\cos x) = a, \text{ тогда } \cos x = \sin a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} - a = \pm x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{при } a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} - 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{по (1): } -3\pi \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k \leq 2\pi$$

$$-\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2}k \leq \frac{5}{2}$$

$$-5 \leq k \leq 5$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{при } a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$6x = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{по (1): } -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \leq 2\pi$$

$$-\frac{10}{3} \leq \frac{1}{3}k \leq \frac{5}{3}$$

$$-10 \leq k \leq 5$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}; -6 \leq k \leq 5$$

$$\text{Итак Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36 \cdot 4 + 36 \alpha \beta - 32 \alpha^2 - 9 \beta^2 - 2^7 > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{это было} \\ \text{2 корня} \end{array} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

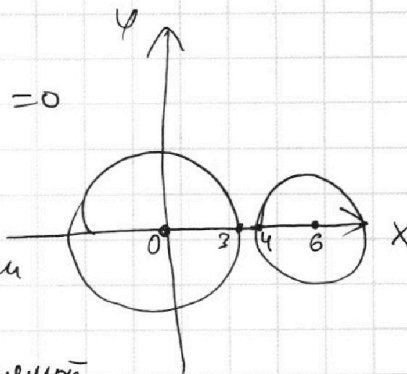


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & \text{— прямая} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} & \text{— две окружности} \end{cases}$$



С каждой из окружностей ^{у прямой} максимум может быть 2 точки пересечения \Rightarrow чтобы было 4 точки пересечения, то нужно, чтобы каждая из них прямая пересекала.

Найдем, когда с определенной окружностью будет 2 точки пересечения:

1) $x^2 + \left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2 = 9$

$$4x^2 + 9b^2 - 6abx + a^2x^2 = 36$$

$$x^2(4+a^2) - 6abx + 9b^2 - 36 = 0$$

$$D_1 = 9a^2b^2 - (4+a^2)(9b^2 - 36) = 9a^2b^2 - (9a^2b^2 + 36b^2 - 36a^2 - 36 \cdot 4)$$

$$= -36(b^2 - a^2 - 4) > 0 \quad (\text{чтобы было 2 корня})$$

$$b^2 - a^2 - 4 < 0 \quad b^2 < a^2 + 4$$

2) $(x-6)^2 + \left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2 = 4$

$$4(x^2 - 12x + 32) + 9b^2 - 6abx + a^2x^2 = 0$$

$$x^2(4+a^2) - x(48 + 6ab) + 32 \cdot 4 + 9b^2 = 0$$

$$D_1 = 24^2 + 48 \cdot 3ab + 9a^2b^2 - (4+a^2)(32 \cdot 4 + 9b^2) =$$

$$= 24^2 + 48 \cdot 3 \cdot ab + 9a^2b^2 - (9a^2b^2 + 32 \cdot 4a^2 + 36b^2 + 32 \cdot 16)$$

$$= 2^4 (36 \cdot 4 + 36ab - 32a^2 - 36b^2 - 2^7)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt[5]{\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3^3 x = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8 \\ \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \end{cases}$$

Пусть $\log_3 x = a$; $\log_3(5y) = b$ ($a, b \neq 0$)

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a^5 + \frac{7}{2} = -8a \\ b^5 - \frac{7}{2} = -8b \end{cases} \quad \begin{cases} a^5 + 8a = -\frac{7}{2} \\ b^5 + 8b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2ab} = -8 \end{cases}$$

Пусть $f(x) = x^5 + 8x$

$$f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$$

\Rightarrow монотонно возрастает

$$\Rightarrow a < 0 < b$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) + \frac{7}{2} \cdot \frac{a + b}{ab} = 0$$

$$(a + b) \left((a^2 + b^2)(a - b) + \frac{7}{2ab} \right) = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 0 & (2) \\ \frac{2ab(a^2 + b^2)(a - b) + 7}{2ab} = 0 & (1) \end{cases}$$

1) $2ab(a^2 + b^2)(a - b) + 7 = 0$

т.к. $\begin{matrix} a < 0 \\ b > 0 \\ b > a \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ominus \oplus \\ \oplus \ominus \end{matrix} \Rightarrow 2ab(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0 \Rightarrow \text{нет решений}$

2) $a + b = 0 \quad \log_3 x + \log_3(5y) = 0$

$$\log_3(5xy) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 3 \cdot 12 - 3$$

$$3(x_2 - x_1 - 12) = - (y_2 - y_1 + 3)$$

$$\Downarrow \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 + 3 = 3n \\ x_2 - x_1 - 12 = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 - y_1 = 3n - 3 \\ x_2 - x_1 = 12 - n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min |y_2 - y_1| = 0 \\ \max y_2 - y_1 = 42 \\ \min x_2 - x_1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$$

Пусть $y_2 \geq y_1$, тогда $\min y_2 - y_1 = 0$ \Rightarrow $\max y_2 - y_1 = 42$ $\Rightarrow 1 \leq n \leq 15$

1) при $y_2 - y_1 = 0 : x_2 - x_1 = 11$

мы можем выбрать любой $y = y_1 = y_2 \in [0, 42]$

и к нему выбрать $x \in x_2 = 11 + x_1 \in [11, 42]$

т.к. $42 : 11 = 3 \Rightarrow$ ~~при $y = 0$ не~~ граница

параллелограмма ~~лежит~~ проходит по целым точкам вида $(-n; 3n)$, где $n \in [0; 14] \Rightarrow$

\Rightarrow для $y : 3$ ~~есть~~ есть 10 вариантов x_1 и x_2

$$10 \cdot 10 = 100 \text{ вариантов}$$

для $y \neq 3$ есть 9 вариантов x_1 и x_2

$$9 \cdot (42 - 10) = 252$$

2) при $y_2 - y_1 = 3 : x_2 - x_1 = 10$

мы можем выбрать любой $y = y_2 = 3 + y_1 \in [3; 42]$

для $y : 3$ есть 11 вар. x_1 и x_2

$$11 \cdot 14 = 154$$

для $y \neq 3$ есть 10 вар. x_1 и x_2

$$10 \cdot (42 - 14) = 260$$

3) при $y_2 - y_1 = 6 : x_2 - x_1 = 9$

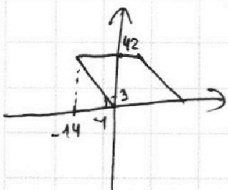
$$12 \cdot 12 = 144$$

$$11 \cdot 24 = 264$$

4) при $y_2 - y_1 = 9 : x_2 - x_1 = 8$

$$13 \cdot 11 = 143$$

$$12 \cdot 22 = 264$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } y_2 - y_1 = 12 : x_2 - x_1 = 7$$

$$14 \cdot 10$$

$$13 \cdot 20$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 15 : x_2 - x_1 = 6$$

$$15 \cdot 9$$

$$14 \cdot 18$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 18 : x_2 - x_1 = 5$$

$$16 \cdot 8$$

$$15 \cdot 16$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 21 : x_2 - x_1 = 4$$

$$17 \cdot 7$$

$$16 \cdot 14$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 24 : x_2 - x_1 = 3$$

$$18 \cdot 6$$

$$17 \cdot 12$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 27 : x_2 - x_1 = 2$$

$$19 \cdot 5$$

$$18 \cdot 10$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 30 : x_2 - x_1 = 1$$

$$20 \cdot 4$$

$$19 \cdot 8$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 33 : x_2 - x_1 = 0$$

$$21 \cdot 3$$

$$20 \cdot 6$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 36 : x_2 - x_1 = -1$$

$$20 \cdot 2$$

$$19 \cdot 4$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 39 : x_2 - x_1 = -2$$

$$19 \cdot 1$$

$$18 \cdot 2$$

$$\text{при } y_2 - y_1 = 42 : x_2 - x_1 = -3$$

$$18$$

$$\Sigma = 11 \cdot 14 + 12 \cdot 12 + 13 \cdot 11 + \dots$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

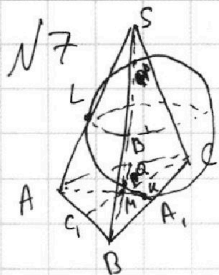
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha = \log_3(54)$$

$$\beta = \log_3(x)$$

~~$\alpha \neq \log_3$~~

$$\alpha + \beta = \log_3(54x)$$

023

$$n^4 = \frac{-7}{2n} - 8$$

$n \neq 0$

$$2n^5 + 16n = -7$$

$$f'(n) = 10n^4 + 16$$

мон. возраст

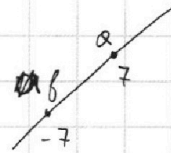
$$\log_3(x^2)$$

$$\beta^4 + \frac{6}{\beta} = \frac{5}{2}\beta - 8$$

$$\beta^4 + \frac{7}{2}\beta = -8$$

$$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} = \frac{11}{2}\alpha - 8$$

$$\alpha^4 = \frac{7}{2}\alpha - 8$$



$$n^4 + \frac{7}{2n}$$

$$\beta^4 + \frac{7}{2}\beta + 8 = 0$$

$$\alpha^4 - \frac{7}{2}\alpha + 8 = 0$$

$$f'(n) = 4n^3 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\beta^4 - \alpha^4 + \frac{7}{2}(\alpha + \beta) = 0$$

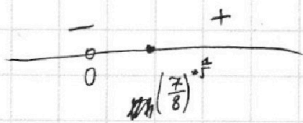
$$(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 + \alpha^2)$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{7}{2}(\alpha + \beta) = 0$$

$$n^{-1} \rightarrow -1n^{-2}$$

$$\frac{8n^5 - 7}{2n^2}$$

$$n^5 = \frac{7}{8}$$



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2)(\beta - \alpha) + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\beta^3 + \alpha^2\beta - \alpha^3 - \alpha\beta^2 + \frac{7}{2} = 0$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)(\beta - \alpha) + \frac{7}{2} = 0$$

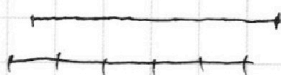
$$\alpha^5 + 8\alpha = -7$$

$$\beta^5 + 8\beta = 7$$

$$f' = 5\alpha^4 + 8$$

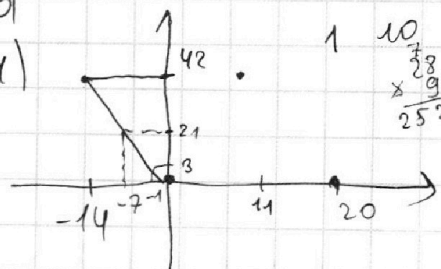
$$\alpha \in (-1; 0) \quad \alpha < \beta$$

$$\beta \in (0; 1)$$



$$3 [1; 14]$$

$$\frac{22}{\times 12} = \frac{44}{22} = \frac{264}{264}$$



$$\frac{42}{-14} = \frac{3}{-1}$$

$$\frac{10}{25^2} = \frac{10}{625} = \frac{2}{125}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

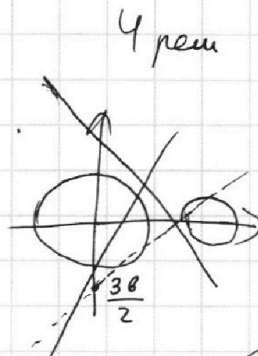
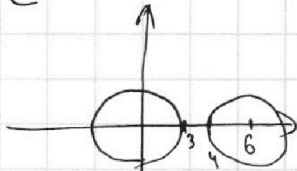
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 3\beta = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y)^3 &= \log_{25} y^2 \cdot (13^{11})^3 \\ \alpha^4 + \frac{2}{\alpha} &= \frac{11}{2\alpha} - 8 & \alpha^4 &= \frac{7}{2\alpha} - 8 \\ \beta^4 + \frac{6}{\beta} &= \frac{5}{2\beta} - 8 & \beta^4 &= \frac{7}{2\beta} - 8 \end{aligned}$$

каждое тож в 2 точки
 \Rightarrow пересек одн в 2 точки

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 3 \cdot 10 + 3$$

$$3(x_2 - x_1 - 10) = (y_2 - y_1 + 3)$$

$$x^2 - 12x + 32 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 0$$

~~$$x^2 + y^2 - 9 = \alpha x + 2y - 3\beta$$~~

$$x^2 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 9$$

$$\begin{aligned} 4y - y_2 + 3 &= 3n \\ x_2 - x_1 - 10 &= n \\ x_2 - x_1 &= n + 10 \\ y_1 - y_2 &= 3n - 3 \end{aligned}$$

$$4x^2 - 48x + 32 \cdot 4 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 0$$

$$4x^2 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 36$$

$$x^2(\alpha^2 + 4) - x(48 + 6\alpha\beta) + 32 \cdot 4 + 9\beta^2 = 0$$

$$x^2(4 + \alpha^2) - 6\alpha\beta x + 9\beta^2 - 36 = 0$$

$$D_1 = 24^2 + 48 \cdot 3\alpha\beta + 9\alpha^2\beta^2 - (32 \cdot 4 + 9\beta^2)(\alpha^2 + 4)$$

$$D_1 = 9\alpha^2\beta^2 - (9\beta^2 - 36)(4 + \alpha^2)$$

$$9\alpha^2\beta^2 - (9\beta^2\alpha^2 - 36\alpha^2 + 36\beta^2 - 36 \cdot 4)$$

$$- (32 \cdot 4 \cdot \alpha^2 + 36\beta^2 + 9\beta^2\alpha^2)$$

$$36\alpha^2 - 36\beta^2 + 36 \cdot 4 > 0$$

$$-32 \cdot 4 \alpha^2 - 36\beta^2 + 48 \cdot 3\alpha\beta + 24^2 > 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 4 > 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{81}{243} && 3^5 \\ & && 4 \cdot 4 \cdot 2^5 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 16 \quad 7$$

$$7 \quad 2 \quad 14 \quad 2 \cdot 7^2 \quad 2 \cdot 7^3$$

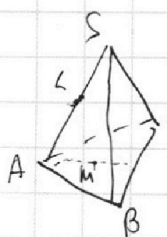
$$x^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x} + 8 = 0$$

~~$$(2 \cdot 7^4 - 16) 7^2 7$$~~

$$x^5 + 8x + \frac{7}{2} = 0$$

$$f'(x) = 10x^4 + 16 \oplus$$

$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$



~~Handwritten scribbles~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$\begin{cases} 9 \leq a_1 + b_1 \\ 10 \leq a_2 + b_2 \\ 10 \leq a_3 + b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 14 \leq b_1 + c_1 \\ 13 \leq b_2 + c_2 \\ 13 \leq b_3 + c_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 19 \leq a_1 + c_1 \\ 18 \leq a_2 + c_2 \\ 30 \leq a_3 + c_3 \end{cases}$$

~~ААААА~~

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 9 \\ b_1 + c_1 &= 14 \\ a_1 + c_1 &= 19 \end{aligned}$$

$$9 - a_1 + 19 - a_1 = 14$$

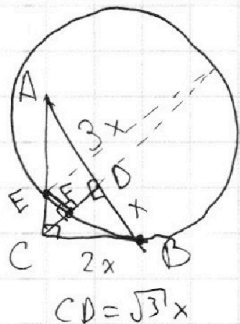
$$28 - 2a_1 = 14$$

$$14 = 2a_1$$

$$a_1 = 7$$

$$b_1 = 2$$

$$c_1 = 12$$



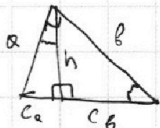
$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{EC}{CA}\right)^2$$

$$\frac{S_{\triangle CDA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(\sqrt{3}x)^2}{x^2} = \frac{3}{1} \quad \frac{AC}{3x}$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{EC^2}{9x^2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x =$$



$$\frac{h}{c_a} = \frac{c_b}{h} \quad h^2 = c_a c_b$$

$$3x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$3x^2 + 9x^2 = 12x^2 = 2\sqrt{3}x^2$$

$$4x^2 = EC \cdot (2x\sqrt{3} + a) > EC \cdot 2x\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - d = \pm x \quad 2x > EC\sqrt{3}$$

$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = d$$

$$\cos x = \sin d$$

$$\arcsin(\cos x) = d$$

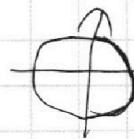
$$\cos x = \sin d$$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - d)$$

$$\sin d = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$d = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$d = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$$



$$\sin^2 d + 1 - \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 d = \cdot$$