



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_4^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad \text{т.е. } ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad \text{т.е. } bc = t \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{15} 3^{18} 5^{30} \quad \text{т.е. } ac = p \cdot 2^{15} 3^{18} 5^{30}$$

Тогда можно записать следующие системы неравенств.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 & \textcircled{1} \\ a_2 + c_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} b_3 + a_3 \geq 10 & \textcircled{2} \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 & \textcircled{3} \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

где $a_i; b_i; c_i$ - это степень i которая входит

в a, b , или c соответственно.

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ то $a_i; b_i; c_i \geq 0$ и $i \in \mathbb{Z}$.

~~$$b_2 \geq 2, \quad c_2 - b_2 \geq 10, \quad c_3 - a_3 \geq 3$$~~

~~$$2c_2 \geq 24$$~~

~~$$2c_3 \geq 21$$~~

мин решаем
этих нерав.

~~$$c_2 \geq 12$$~~

~~$$c_3 \geq 10,5$$~~

т.е. мин c_3 может
быть равно 11

~~$$(a_2, b_2, c_2) = a_2 \geq 7$$~~

~~$$b_3 \geq 2,5$$~~

~~$$(7; 2; 12) \quad b_2 \geq 2$$~~

~~$$a_3 \geq 7,5$$~~

② можно считать.

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

т.к. $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$

запишем
то $(a_3; b_3; c_3) =$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

мин значение $a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$

$$= (7, 3, 11)$$

логично.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) шопинг 3 черв.: :

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 26,5$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 13,25$$

$$\text{т.е. } a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$

~~т.е. мин. знач. $a_5 + b_5 + c_5$ это 27.~~

Однако заметим, что есть более строгое нерав.

$$a_5 + c_5 \geq 30 \quad \text{т.к. все в целых числах (можем).}$$

и можно сразу ограничить, что $a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$ и мин. значение будет 30.

2) шопинг 3 черв.:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

мин значение 21 при $(a_2; b_2; c_2) = (7; 7; 12)$

$$\text{поэтому } abc = 2^{7+7+12} \cdot 3^{10+10+20} \cdot 5^{7+3+11} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

т.к. шопинг.

или мин значение $a_i + b_i + c_i$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

Дано:

$\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$)

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{3}{1}$$

CD - высота.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:

из теоремы о отрезках в прямоугольном $\triangle ABC$ и высоте CD :

$$AC = \sqrt{AD \cdot AB} =$$

$$2x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{BD \cdot BA} =$$

$$2x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{3}$$

Пусть $DB = x \Rightarrow AD = 3x \Rightarrow AB = 4x$

заменим, что $2CB = AB \Rightarrow$ в $\triangle ABC$

$$\angle CAB = 30^\circ \text{ и } \angle CBA = 60^\circ$$

т.к. $EC \parallel AB$ и $4x$ -мк $AEFB$ вписан в $\triangle ABC$.

и $AE \parallel FB$

и $AD \parallel BD$ $AEFB$ - трапеция, которая равнобедренная.

т.к. $\angle EAB = \angle FBA = 30^\circ \Rightarrow FB$ - биссектриса.

$$\angle CBD \text{ (} \angle CBD = 60^\circ \text{ } \angle FBD = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{CB}{DB} = \frac{2}{1} \quad CF = 2FD$$

$$FD = \frac{CF}{2}$$

т.к. $FE \parallel AB$ и

$$\angle EFL = \angle ADC = 90^\circ = \angle ACB$$

$$\angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow$

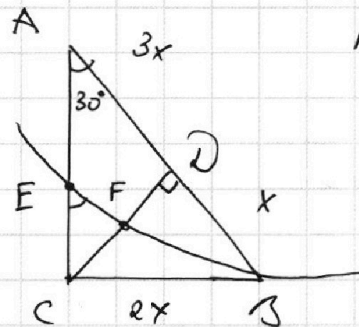
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{2x\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 3$$

$$FD + CF = x\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{2}CF = x\sqrt{3}$$

$$CF = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



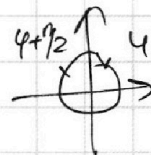
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \pi/2. \quad \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\leq \frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\leq \frac{2\pi}{5} & x &\leq 2\pi \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\geq -\frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\geq -\frac{3\pi}{5} & x &\geq -3\pi. \end{aligned}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi\alpha = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\pi + 2\pi\alpha \\ x &= -\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\beta = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\pi + 2\pi\beta \end{aligned} \right.$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi\alpha, \quad \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2\pi\beta,$$

$$4x = -2\pi + 10\pi\alpha, \quad 6x = 2\pi + 10\pi\beta, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \beta \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha, \quad 2) \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta,$$

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \leq 2\pi. \quad -\frac{5\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \geq -3\pi \quad 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{5}{2}\alpha \leq 2,5$$

$$5\alpha \leq 5$$

$$\alpha \leq 1$$

$$\alpha \in \{-1; 0; 1\}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \geq -3\pi.$$

$$\frac{5}{2}\alpha \geq -2,5.$$

$$\alpha \geq -1$$

$$2) \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta \leq 2\pi \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta \geq -3\pi \quad \text{т.е. } \beta \in \{-1; 0; 1\}$$

$$1 + 5\beta \leq 6$$

$$5\beta \leq 5 \quad \beta \leq 1$$

$$1 + 5\beta \geq -9. \quad \beta \geq -\frac{8}{5}$$

$$5\beta \geq -8 \quad \beta \geq -1,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{пусть } x = -\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}n = -\frac{\phi n}{2} = -3n.$$

$$x = -\frac{n}{2}.$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}n = 2n.$$

$$x = \frac{n}{3} + \frac{\sqrt{5}n}{3} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} - \frac{\sqrt{5}n}{3} = -\frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{n}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -3n; -\frac{4n}{3}; -\frac{n}{2}; \frac{n}{3}; 2n \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & - \text{окружность с центром в } (0;0) \text{ и} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 & \text{радиусом } 3. \end{cases}$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$ - окружность с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.

(1) $2y = 3b - ax$

$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$

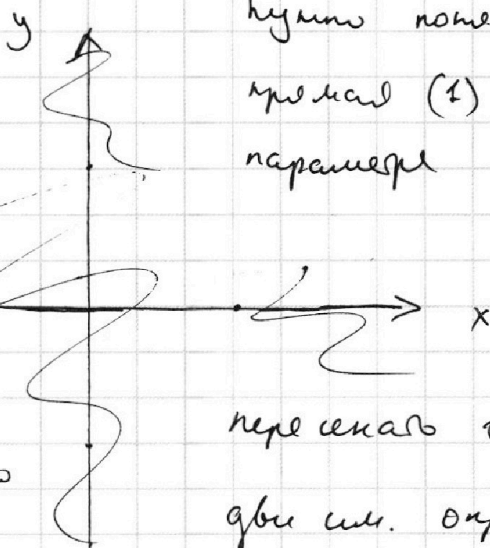
Также заметим
что параметр
b отвечает за

угловую

частоту наклона

от оси абсцисс
(вплоть до горизонтальной
линии Ox) и т.д.

b - произвольный параметр
угловую частоту можно
любым; a - задает кон-
станту наклона.



линию по мере поворота

прямой (1) при любом
параметре b не будет

пересекать в 4х точках

двух или окружностей.

(прямая горизонтальность может
пересекать макс в 2х точках)

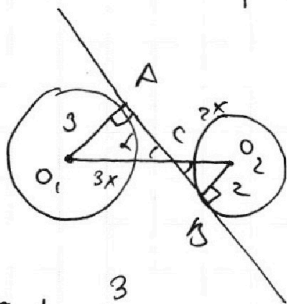
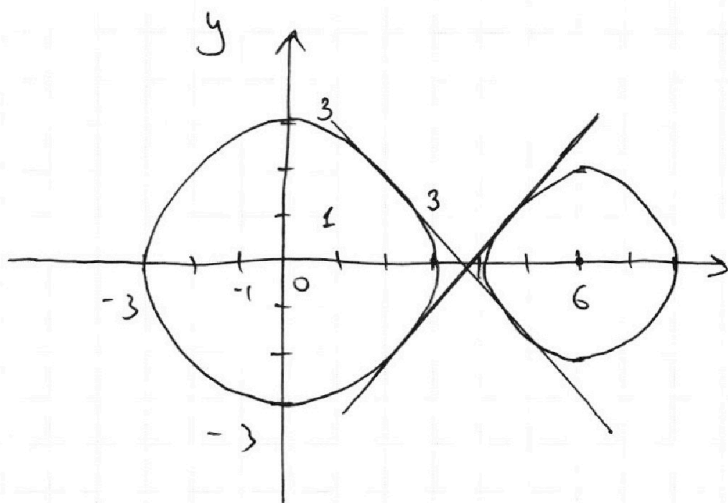
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{AC}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{18}{r}\right)^2 - 9} = \frac{3}{5}\sqrt{11}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{55}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

т.е. $\frac{-a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}}$ (орис. танген.)

$$a = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Всегда где $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$

т.е. наименьший угол не может быть при любых a .
где в остальных значениях a можно найти. ^{тогда} a так, что прямая будет пересекать обе окр. в двух
точках ^{касательных} касательно. т.е. Ответ:

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Заметим что
касательные
касательные
(общие выпукл.)
к двум окр.
перпендикулярны
кас. в том месте
где касательная окр. окр.
в двух точках и выпукл
кас. выпукл не пересекаются.

Заметим если линия
будет угл. \angle наименьший
прямой (наименьший
 \angle) по углам
будет аналогичной
одну из касательных
точках, выпукл
не касательных.

и аналогично где выпукл
касательных
 $a = -\frac{10}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

55

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 - \frac{5}{2} \log_x^3 = -8.$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x^3 = -8. \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8$$

$$sy > 0 \quad y > 0$$

$$sy \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{s}$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy}^3 - \frac{11}{2} \log_{sy}^3 = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) - 3,5 \log_{sy}^3 = -8. \quad \log_3^4 sy - \frac{3,5}{\log_3 sy} = -8$$

Рассмотрим выражение

$$\log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 t} = -8. \quad \text{⊖}$$

$$\text{⊖} \quad \log_3^4 t + \frac{3,5}{-\log_3 t} = \log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}} \quad \text{⊖}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} \quad \text{т.е.} \quad \log_3^4 t - \frac{3,5}{\log_3 t} = \log_3^4 \frac{1}{3t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{3t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sxy} + 3,5 \left(\frac{\log_3 x sy}{\log_3 \frac{1}{3t} \log_3 x} \right) = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 5xy + \frac{3,5 \log_3 5xy}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} = 0.$$

$$\log_3 5xy \left(\log_3^3 5xy + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} \right) = 0.$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}.$$

$$\log_3^3 5xy = -\frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x}$$

$$\left(\log_3 5y + \log_3 5x \right)^3 \log_3 xy \log_3 x = 3,5.$$

$$(a+b)^3 = \frac{3,5}{ab}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

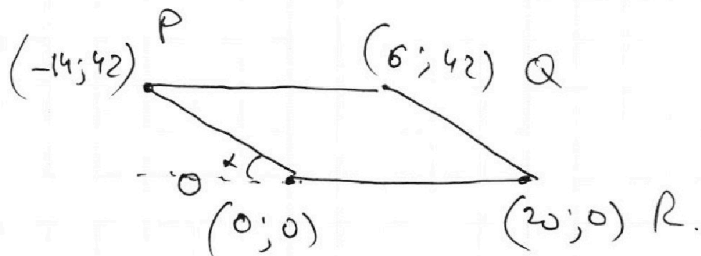
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$k_{y_d} = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

т.е. прямая PO имеет вид $y = -3x$

$$PQ: y = 42$$

$$OR: y = 0$$

$$QR: y = -3x + b$$

$$0 = -60 + b$$

$$b = 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 3\Delta x + \Delta y = 33$$

§

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$\Delta y_{\max} = 42 - 0 = 42$$

$$\Delta y_{\min} = 0 - 42 = -42$$

$$\Delta x_{\max} = 20 - 0 = 20$$

$$\Delta x_{\min} = 0 - 20 = -20$$

$$33 + 60 = 93$$

$$33 - 3\Delta x = 42$$

$$-9 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = -3$$

$$33 + 6 = 39$$

$$33 - 3\Delta x = -42$$

$$75 = 3\Delta x \quad \Delta x = 25$$

$$\frac{42}{-33} \\ \hline 9$$

$$33 - 60 =$$

$$\frac{-60}{-27}$$

Δx Δy

-20

93

⊖

-19

-3 42

-2 39

-1 36

0 33

1 30

2 27

3 24

20

-21

возрастает

т.е. все вар. 24. Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

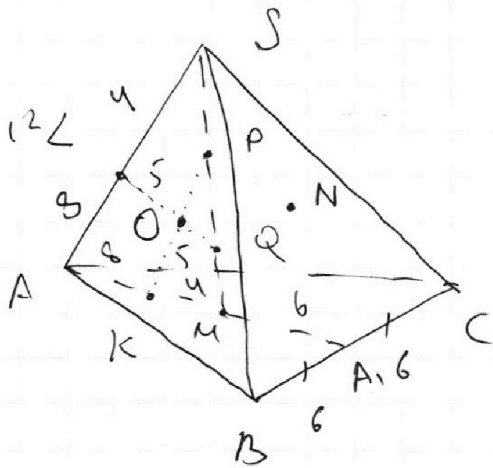
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



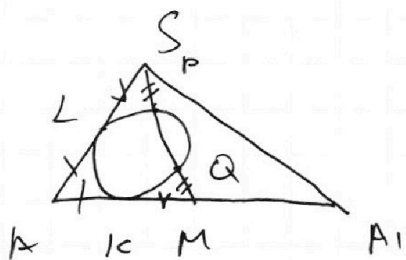
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$SQ = PM$
 $SP = MQ$ (неважно как
 располож. отн. друг. другу
 P и Q эти отрезки всегда
 будут равны)

$S_{\triangle ABC} = 90$
 $SA = BC = 12$



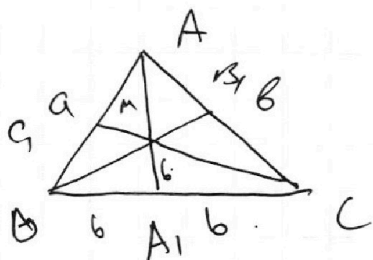
$AL = AK$ - отрезки кас. к ω
 $SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{MQ \cdot MP} = KM$

$\therefore SA = AM = 12$

$AM = \frac{2}{3} AA_1$

$12 = \frac{2}{3} AA_1, \quad AA_1 = 18$

Пусть $AB = a, AC = b$.



$\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 12^2}{4}} = 18$

$2a^2 + 2b^2 - 144 = 324 \cdot 4$

$2a^2 + 2b^2 = 1440 \quad || : 2$

$a^2 + b^2 = 720$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \sqrt{18} \\ 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \\ \times 4 \\ \hline 1296 \\ + 144 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$CG = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2b^2 - a^2}{4}}$

$BB_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2a^2 - b^2}{4}}$

~~$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{18}{4} \sqrt{288 + 2a}$~~

Заметим, что в $\triangle BMC$ - прямоугольн. MA_1 - мед. $= \frac{1}{2} BC = 6$.

$\therefore \angle BMC = 90^\circ$ тогда $BM \cdot MC = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = 30$.

(пусть $BM = m$; MC и AM - мед. a мед. $\text{генет } S_{\triangle} \text{ на } \frac{1}{2}$)

$BM = \frac{2}{3} BB_1$
 $MC = \frac{2}{3} CC_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \quad | \cdot AA_1$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{30 \cdot 18 \cdot 9}{42} = 1215$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 15 \\ \hline 405 \\ + 81 \\ \hline 1215 \end{array}$$

SN кас. W
и SL кас. W (сечение сферы
по плоскости SN ⊥)

так как SN = SL = 4. ⇒ ∠A = 8

AH - высота в ΔABC.

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\Delta} \quad AH = 15$$

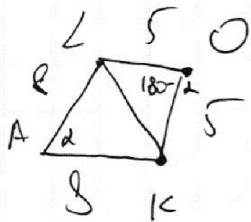
нужно найти
высоту у т. S в Δ
SAC.

$$\frac{AH \cdot 18}{2} = 90$$

~~АА~~ no.

по с. cos:

$$25 + 25 + \cos 2 \cdot 25 \cdot 2 = 64 + 64 - 2 \cdot 64 \cos \alpha$$



$$\begin{array}{r} 128 \\ + 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 128 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \cdot 2 \\ 36 \cdot 2 \\ \hline 152 \cdot 2 \\ 96 \cdot 2 \\ \hline 48 \cdot 2 \\ 48 \cdot 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$192 \cos \alpha = 78$$

$$\cos \alpha = \frac{78}{192} = \frac{13}{24} = \frac{3}{8}$$

так как по с. cos гл в Δ

$$ASA_1: \quad 12^2 + 18^2 - 12 \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = SA_1^2 = 231$$

$$SA_1 = \sqrt{231}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 1144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ + 216 \\ \hline 216 \\ - 632 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 79 \\ \times 3 \\ \hline 237 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \\ - 237 \\ \hline 231 = 11 \cdot 21 \end{array}$$

Ответ: 1215

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$$\sqrt[5]{\log_x 3}$$

$$243 \sqrt[5]{81}$$

$$\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{243}$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 x$$

$$\log_3^4 t + 3,5 \log_t 3 = -8$$

$$\begin{aligned} -8 &= \frac{5 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{x}} + 3,5 \log_x 3 \\ -8 &= \frac{5 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{x}} - 7 \log_3^4 x \end{aligned}$$

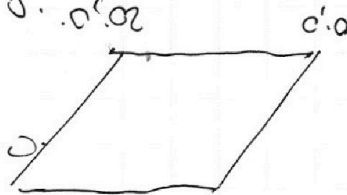
$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3$$

$$\log_3^4 x \log$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{x}} - 7 \log_3^4 x \\ &= \frac{5 \log_3^4 x - 7 \sqrt[5]{x} \log_3^4 x}{\sqrt[5]{x}} \end{aligned}$$

$$t^4 + 3,5 \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$t^4 - \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$



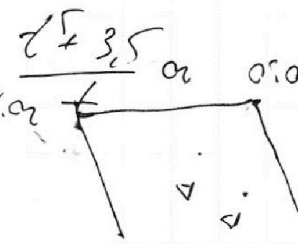
$$\log_x 2 = 3^{12-5} = \log_x 2^7$$

$$\log_{25} 2^3 = \log_{(5^2)} 2^3 = \log_5 2^3$$

$$\log_x 2$$

$$\log_{x^2}$$

$$\log_x 8$$



$$\log_3^4 5xy + 3,5 \log_x 3 - 3,5 \log_{5y} 3 = -16$$

$$3,5 (\log_3^3 - \log_{5y} 3) =$$

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_{5y} 3}$$

$$\frac{\log_3 5y - \log_3 x}{\log_3 x \log_3 5y}$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

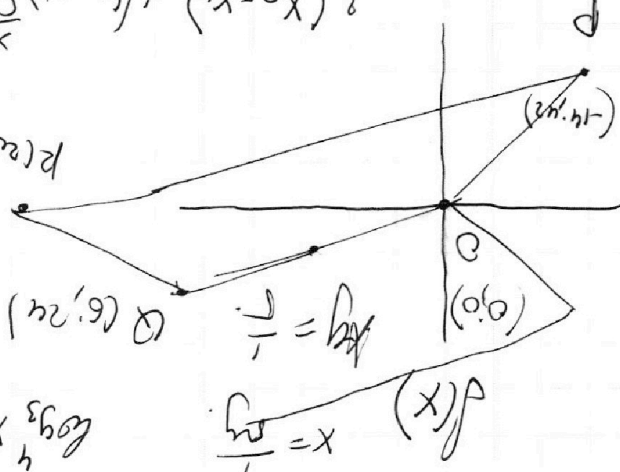
$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\log_3 \frac{5y}{x} = \log_3 (5y-x) + \log_3 (x-2x) = \log_3 (5y-x) + \log_3 (-x)$$

$$\log_3 x$$

$$\log_3 24$$

$$\log_3^4 x - \frac{3,5}{x}$$



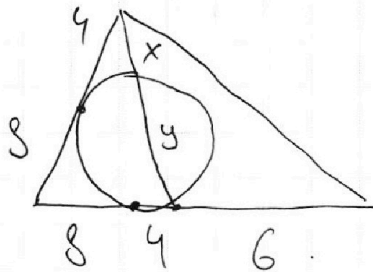
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

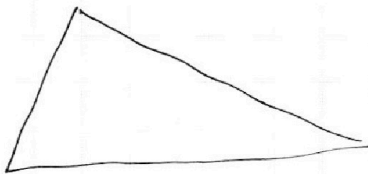
 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = x(x+y)$$

Черновик



$$\frac{64}{x^2}$$

$$128 - x \cdot 64 \cdot 2 = 25 + 2 \cdot 25x$$

$$103 = 104x$$

x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

черновик

$$\begin{array}{r} 243 \text{ } \frac{18}{27} \\ -18 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\log_3^4 x + \log_x^3 = -8$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$\log_3^4 x + \log_3 x = -8$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

$$t^4 + \frac{1}{t} = -8$$

$$t^5 + 1 + 8t = 0$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -25 \\ \hline 3,5 \end{array}$$

$$\log t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 3,5 + 8t = 0$$

$$2t^5 + 7 + 16t = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{3,5}{\log_3 x} = 0$$

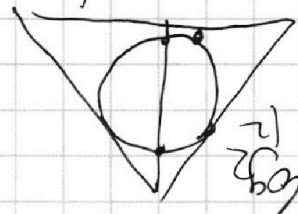
$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8$$

$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 3,5 + 8t = 0$$

$$2t^5 + 7 + 16t = 0$$



$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = \log_3^4 5y = 3,5 \log_3 5y^3$$

$$\frac{11}{2} \begin{array}{r} -5,5 \\ 2,0 \\ \hline 3,5 \end{array}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -1,5 (\log_3 x^3 + \log_3 5y^3)$$



$$-8 - 3,5 \log_3 5y^3 + 8 - 5 \log_3 5y^3 - 8 - 8$$

$$\frac{10}{5} - \frac{3,5}{2} = \frac{10}{5} - \frac{7}{2} = \frac{20}{10} - \frac{49}{20} = \frac{40}{20} - \frac{49}{20} = -\frac{9}{20}$$

$$\log_3^4 5xy = -16 - 3,5 = -19,5$$

$$\log_3^4 5xy = -19,5$$

$$\log_3^4 5xy = -19,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sinh^2 x}$$

арксинус
черновик

$$\frac{4 \log_3 4}{x \ln 3} = \frac{1}{3.5}$$

$$\log_3 \frac{1}{5xy} = 3.5$$

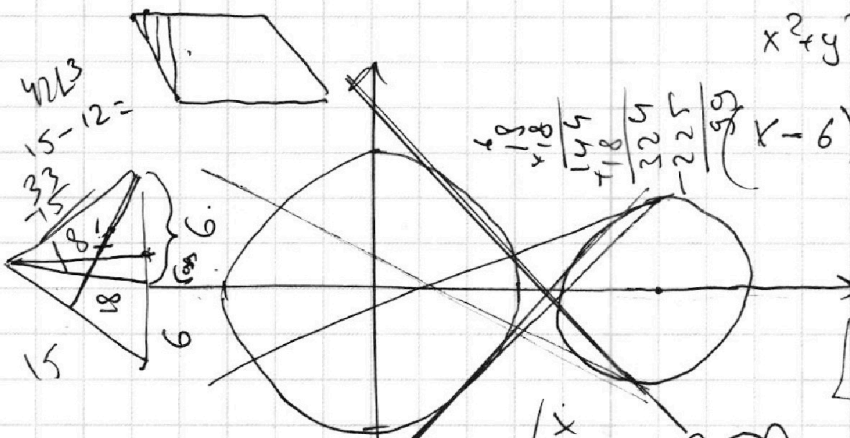
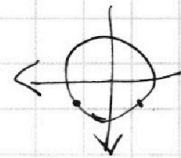
$$ax + 2y - 3b = 0 \quad 2y = -ax + 3b$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

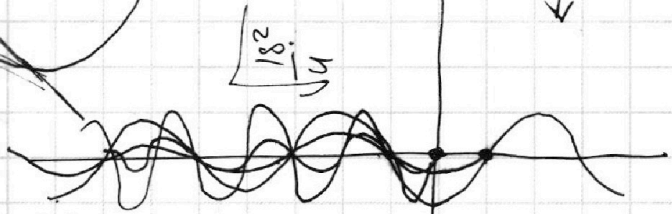
$$x^2 + 9y^2 = 36$$

$$144x^2 - 4y^2 = 144$$

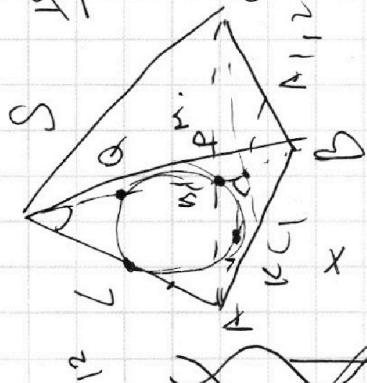


$$\frac{18}{18} = \frac{144}{144}$$

$$a^2 + b^2 = -\frac{1}{2}x + 15b$$



$$\frac{9 \cdot 18 \cdot 12}{2}$$



$$\frac{3x^2 - 18}{2}$$



$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \left(2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin(5\pi) = \cos(x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$uv : 2^9 3^{10} 5^{10}$ $a+b+c \geq 21$
~~7~~ 3 11

$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ 2 1 23

$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$ 53 22 26 11

$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc = d \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = t \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$a^2 b^2 c^2 = k^2 d^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \sqrt{ktd} \cdot 3 \cdot 5$

41 3 · 3 ab 3 · 5.
 bc
 ac

5^{10}
 $\frac{40}{+13}$
 $\frac{53}{}$

$\frac{19}{+9}$
 $\frac{28}{+14}$
 $\frac{42}{}$

$3^{10} \cdot 3^{13} \cdot 3^{18}$

$\frac{23}{+18}$
 $\frac{41}{}$

$b-c = -10$
 $a+b=9$ $b=2$
 $b+c=14$ $c=12$
 $a+c=19$ $a=7$

8 5 ∞
 3 6 3
 11 10

$2^9 3^{10} 5^{10}$ a b.
 $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ a c

~~$a+b=9$~~ $a+b=10$
 ~~$a+c=15$~~ $a+c=18$
 ~~$b+c=14$~~ $b+c=14$

$\frac{28}{+14}$
 $\frac{42}{}$

$10 = a+b$
 $30 = a+c$
 $14 = b+c$
 $16 = a-b$
 $2a = 26$ $a=13$

$14 = a-b$
 $a-b=10$

$a=10$
 $b=0$
 $c=20$

$b=3$
 $a=7$

$b-c$ $c-b=8$
 $b+c=13$
 $2c=22$
 $c=11$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a cube.

Equations and Calculations:

- $\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{10}}$
- $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}$
- $\sin(\beta) = \frac{x}{\sqrt{5}}$
- $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- $\sin(\gamma) = \frac{x}{\sqrt{3}}$
- $\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\sin(\delta) = \frac{x}{\sqrt{2}}$
- $\cos(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Geometric Diagrams:

- A large diagram shows a sphere of radius R with a cube of side length x inscribed inside it. The sphere's center is O . The cube's vertices are A, B, C, D, E, F . The distance from the center O to a vertex A is $\sqrt{10}$. The distance from O to the center of a face F is $\sqrt{5}$. The distance from O to the center of an edge E is $\sqrt{3}$. The distance from O to the midpoint of an edge D is $\sqrt{2}$.
- Smaller diagrams show the projection of the sphere's center onto the cube's faces and edges, illustrating the trigonometric relationships.

Final Answer:

$x = \frac{\sqrt{10}}{3}$