



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_4^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad \text{т.е. } ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad \text{т.е. } bc = t \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{15} 3^{18} 5^{30} \quad \text{т.е. } ac = p \cdot 2^{15} 3^{18} 5^{30}$$

Тогда можно записать следующие системы неравенств.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 & \textcircled{1} \\ a_2 + c_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} b_3 + a_3 \geq 10 & \textcircled{2} \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 & \textcircled{3} \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

где  $a_i; b_i; c_i$  - это степень  $i$  которая входит

в  $a, b$ , или  $c$  соответственно.

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$  то  $a_i; b_i; c_i \geq 0$  и  $i \in \mathbb{Z}$ .

~~$$b_2 \geq 2, \quad c_2 - b_2 \geq 10, \quad c_3 - a_3 \geq 3$$~~

~~$$2c_2 \geq 24$$~~

~~$$2c_3 \geq 21$$~~

мин решаем  
этих нерав.

~~$$c_2 \geq 12$$~~

~~$$c_3 \geq 10,5$$~~

т.е. мин  $c_3$  может  
быть только 11

~~$$(a_2, b_2, c_2) = a_2 \geq 7$$~~

~~$$b_3 \geq 2,5$$~~

~~$$(7; 2; 12) \quad b_2 \geq 2$$~~

~~$$a_3 \geq 7,5$$~~

② можно из нерав.

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

т.к.  $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$

запишем  
то  $(a_3; b_3; c_3) =$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

мин значение  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$

$$= (7, 3, 11)$$

логично.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) шопинг 3 черав. :

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 26,5$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 13,25$$

$$\text{т.е. } a_1 + b_1 + c_1 \geq 13$$

~~т.е. мин. знач.  $a_1 + b_1 + c_1 \geq 13$ .~~

Однако заметим, что есть более строгое нерав.

$$a_1 + c_1 \geq 30 \quad \text{т.к. все } b \text{ целых неотриц. числа}$$

и можно сразу ограничить, что  $a_1 + b_1 + c_1 \geq 30$  и мин. значение равно 30.

2) шопинг 3 черав. :

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

мин значение 21 при  $(a_2; b_2; c_2) = (7; 7; 7)$

$$\text{поэтому } abc = 2^{7+7+7} \cdot 3^{7+7+7} \cdot 5^{7+7+7} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$$

т.е. шопинг.

или мин значение  $a_i + b_i + c_i$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$

1  2  3  4  5  6  7



№ 2

Дано:

$\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{3}{1}$$

$CD$  - высота.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:

из теоремы о отрезках в прямоугольном  $\triangle ABC$  и высоте  $CD$ :

$$AC = \sqrt{AD \cdot AB} =$$

$$2x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{BD \cdot BA} =$$

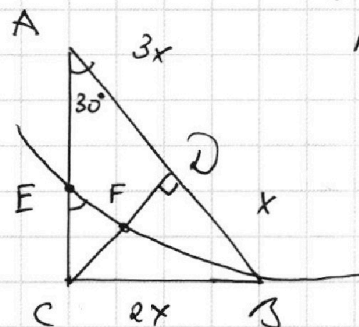
$$2x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{3}$$

Пусть  $DB = x \Rightarrow AD = 3x \Rightarrow AB = 4x$

заменим, что  $2CB = AB \Rightarrow$  впр.  $\triangle ABC$

$\angle CAB = 30^\circ$  и  $\angle CBA = 60^\circ$



т.к.  $EC \parallel AB$  и  $4x$ -мк  $AEFB$  вписан в  $\square$ .  
и  $AE \parallel FB$

и  $AEFB$  - трапеция, является равнобедренной.

т.к.  $\angle EAB = \angle FBA = 30^\circ \Rightarrow FB$  - биссектр.

$\triangle CBD$  ( $\angle CBD = 60^\circ$ ,  $\angle FBD = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ$ )

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow \frac{CF}{2x} = \frac{FD}{x} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} CF = 2FD \\ FD = \frac{CF}{2} \end{matrix}$$

т.к.  $FE \parallel AB$  и

$\angle EFL = \angle ADC = 90^\circ = \angle ACB$ .

$\angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{2x\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 3$$

$FD + CF = x\sqrt{3}$ .

$\frac{3}{2}CF = x\sqrt{3}$ .

$CF = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ .

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



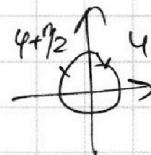
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \pi/2. \quad \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\leq \frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\leq \frac{2\pi}{5} & x &\leq 2\pi \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\geq -\frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\geq -\frac{3\pi}{5} & x &\geq -3\pi. \end{aligned}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi\alpha = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\pi + 2\pi\alpha \\ x &= -\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\beta = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\pi + 2\pi\beta \end{aligned} \right.$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi\alpha, \quad \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2\pi\beta,$$

$$4x = -2\pi + 10\pi\alpha, \quad \eta = \frac{2}{6}\pi + \frac{10}{6}\pi\beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha, \quad 2) \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta,$$

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \leq 2\pi. \quad -\frac{5\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \geq -3\pi \quad 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{5}{2}\alpha \leq 2,5$$

$$5\alpha \leq 5$$

$$\alpha \leq 1$$

$$\alpha \in \{-1; 0; 1\}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi\alpha \geq -3\pi.$$

$$\frac{5}{2}\alpha \geq -2,5.$$

$$\alpha \geq -1$$

$$2) \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta \leq 2\pi \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi\beta \geq -3\pi \quad \text{т.е. } \beta \in \{-1; 0; 1\}$$

$$1 + 5\beta \leq 6$$

$$5\beta \leq 5 \quad \beta \leq 1$$

$$1 + 5\beta \geq -9. \quad \beta \geq -\frac{8}{5}$$

$$5\beta \geq -8 \quad \beta \geq -1,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } x = -\frac{n}{2} - \frac{5}{2}n = -\frac{6n}{2} = -3n.$$

$$x = -\frac{n}{2}.$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{5}{2}n = 2n.$$

$$x = \frac{n}{3} + \frac{5n}{3} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} - \frac{5n}{3} = -\frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{n}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -3n; -\frac{4n}{3}; -\frac{n}{2}; \frac{n}{3}; 2n \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & - \text{окружность с центром в } (0;0) \text{ и} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 & \text{радиусом } 3. \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad - \text{окружность с центром в } (6;0) \text{ и} \\ \text{радиусом } 2.$$

$$(1) 2y = 3b - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$

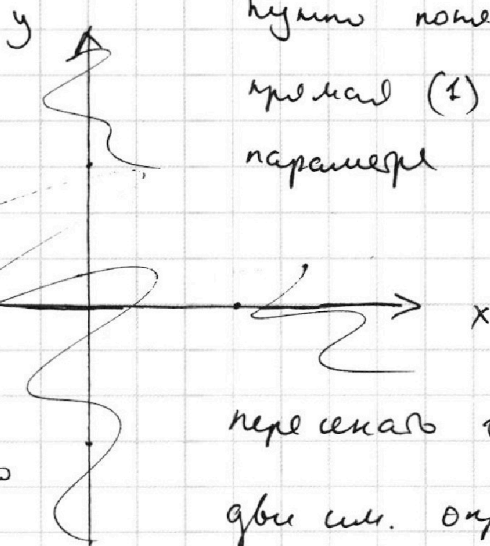
Также заметим  
что параметр  
b отвечает за

угловую

частоту наклона

от оси абсцисс  
(вплоть до горизонтальной  
линии  $Ox$ ) и т.д.

b - произвольный параметр  
угловую частоту можно задать  
любым; a - задает кон-  
станту наклона.



линию по мере поворота

прямой (1) при любом  
параметре b не будет

пересекать в 4х точках

двух из окружностей.

(прямая горизонтальность может  
пересекать макс в 2х точках)

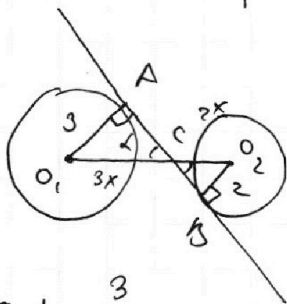
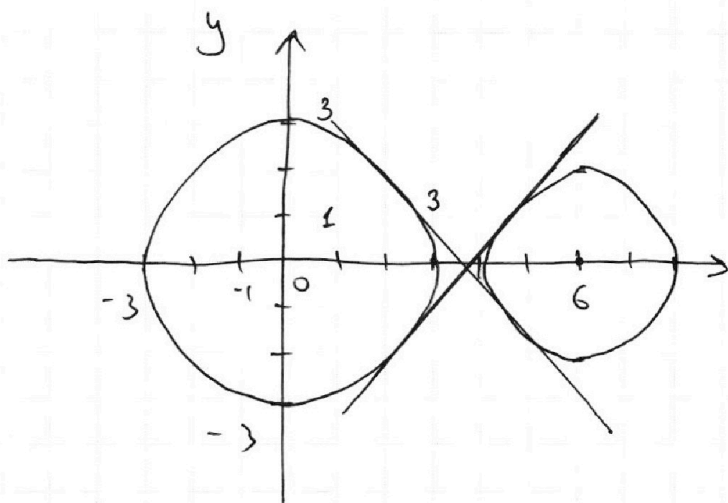
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{AC}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{18}{r}\right)^2 - 9} = \frac{3}{5}\sqrt{11}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{т.е. } \frac{-a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}} \quad (\text{орис. танг.})$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Всегда где  $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$

Ч. наименьший угол не может прилюб. в. где вех остальных значений а можно найти. <sup>тоже</sup> <sup>танг</sup> в, то прямая будет пересекать две окр. в двух точках <sup>касательн.</sup> и т.д. Ответ:

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Заметим что  
тангентам  
касательные  
(общие выпр.)  
к двум окр.  
перпендикулярны  
кас. выпр. она  
будет касаться окр. окр.  
в двух точках и выпр.  
не пересек.

Заметим если линия  
будет угл.  $\angle$  наименьший  
тангентам (наименьший  
 $\angle$ ) по тангентам  
будет аналогичной  
одну и касается вех  
точках, выпр. не  
касательн.

и аналогично где выпр.  
касательн.  
 $a = -\frac{10}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

55

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 - \frac{5}{2} \log_x^3 = -8.$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x^3 = -8. \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8$$

$$sy > 0 \quad y > 0$$

$$sy \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{s}$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy}^3 - \frac{11}{2} \log_{sy}^3 = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) - 3,5 \log_{sy}^3 = -8. \quad \log_3^4 sy - \frac{3,5}{\log_3 sy} = -8$$

Рассмотрим выражение

$$\log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 t} = -8. \quad \text{⊖}$$

$$\text{⊖} \quad \log_3^4 t + \frac{3,5}{-\log_3 t} = \log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}} \quad \text{⊖}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} \quad \text{т.е.} \quad \log_3^4 t - \frac{3,5}{\log_3 t} = \log_3^4 \frac{1}{3t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{3t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sxy} + 3,5 \left( \frac{\log_3 x sy}{\log_3 \frac{1}{3t} \log_3 x} \right) = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 5xy + \frac{3,5 \log_3 5xy}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} = 0.$$

$$\log_3 5xy \left( \log_3^3 5xy + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} \right) = 0.$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}.$$

$$\log_3^3 5xy = -\frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x}$$

$$\left( \log_3 5y + \log_3 5x \right)^3 \log_3 xy \log_3 x = 3,5.$$

$$(a+b)^3 = \frac{3,5}{ab}.$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

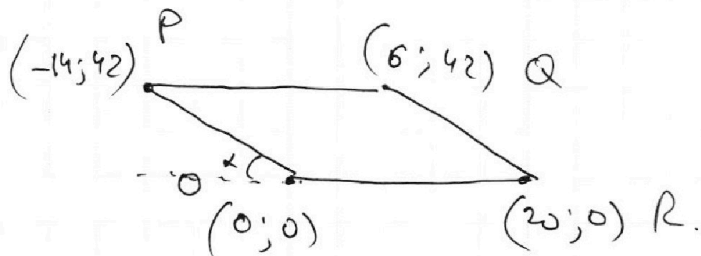
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$k_{y_d} = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

т.е. прямая PO имеет вид  $y = -3x$

$$PQ: y = 42$$

$$OR: y = 0$$

$$QR: y = -3x + b$$

$$0 = -60 + b$$

$$b = 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 3\Delta x + \Delta y = 33$$

§

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$\Delta y_{\max} = 42 - 0 = 42$$

$$\Delta y_{\min} = 0 - 42 = -42$$

$$\Delta x_{\max} = 20 - 0 = 20$$

$$\Delta x_{\min} = 0 - 20 = -20$$

$$33 + 60 = 93$$

$$33 - 3\Delta x = 42$$

$$-9 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = -3$$

$$33 + 6 = 39$$

$$33 - 3\Delta x = -42$$

$$75 = 3\Delta x \quad \Delta x = 25$$

$$\frac{42}{-33} \\ \hline 9$$

$$33 - 60 =$$

$$\frac{-60}{-27}$$

$\Delta x$        $\Delta y$

-20

93

⊖

-19

-3      42

-2      39

-1      36

0      33

1      30

2      27

3      24

20      -21

возрастает

т.е. все вар. 24. Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

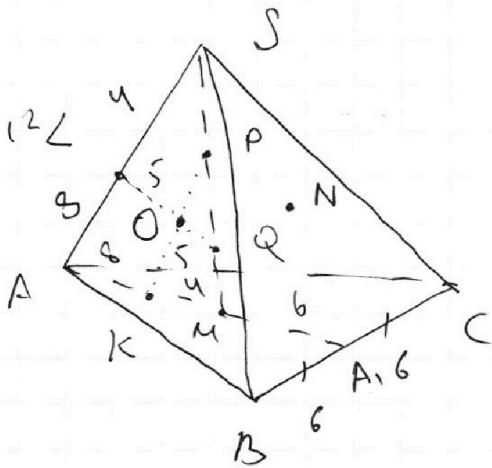
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



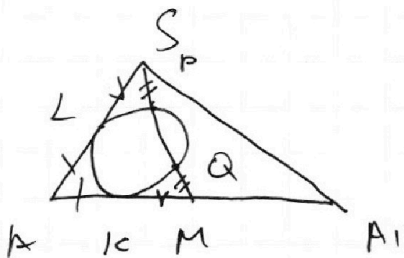
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$SQ = PM$   
 $SP = MQ$  (невыпуклая  
 расстояние от верш. фигуры  
 P и Q по отрезкам будет  
 всегда равно)

$S_{\triangle ABC} = 90$   
 $SA = BC = 12$



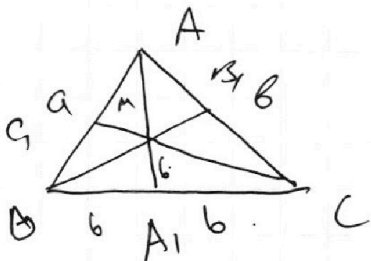
$AL = AK$  - отрезки кас. к  $\omega$   
 $SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{MQ \cdot MP} = KM$

$\therefore SA = AM = 12$

$AM = \frac{2}{3} AA_1$

$12 = \frac{2}{3} AA_1, \quad AA_1 = 18$

пусть  $AB = a, AC = b$ .



$\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 12^2}{4}} = 18$

$2a^2 + 2b^2 - 144 = 324 \cdot 4$

$2a^2 + 2b^2 = 1440 \quad || : 2$

$a^2 + b^2 = 720$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \sqrt{18} \\ 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \\ \times 4 \\ \hline 1296 \\ + 144 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$CG = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2b^2 - a^2}{4}}$

$BB_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2a^2 - b^2}{4}}$

~~$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{18}{4} \sqrt{288 + 2a}$~~

Заметим, что в  $\triangle BMC$  - прямоугольн.  $MA_1$  - мед.  $= \frac{1}{2} BC = 6$ .

$\therefore \angle BMC = 90^\circ$  тогда  $BM \cdot MC = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = 30$ .

(пусть  $MO$  -  $BM$ ;  $MC$  и  $AM$  - мед.  $\omega$  мед. центр  $S_{\triangle ABC}$  на  $\frac{1}{2}$ )

$BM = \frac{30}{MC}$   
 $MC = \frac{30}{BM}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \quad | \cdot AA_1$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{30 \cdot 18 \cdot 9}{42} = 1215$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 15 \\ \hline 405 \\ + 81 \\ \hline 1215 \end{array}$$

SN кас. W  
и SL кас. W (сечение сферы  
по плоскости SN ⊥)

так как SN = SL = 4. ⇒ ∠A = 8

AH - высота в ΔABC.

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\Delta} \quad AH = 15$$

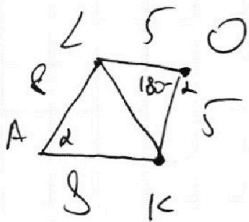
нужно найти  
высоту у т. S в Δ  
SAC.

$$\frac{AH \cdot 18}{2} = 90$$

~~АА~~ no.

по с. кос:

$$25 + 25 + \cos 2 \cdot 25 \cdot 2 = 64 + 64 - 2 \cdot 64 \cos \alpha$$



$$\begin{array}{r} 128 \\ + 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$- \frac{128}{80}$$

$$\begin{array}{r} 78 \cdot 2 \\ 36 \cdot 2 \\ 18 \\ \hline 192 \cdot 2 \\ 96 \cdot 2 \\ 48 \cdot 2 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$192 \cos \alpha = 78$$

$$\cos \alpha = \frac{78}{192} = \frac{13}{24} = \frac{3}{8}$$

так как по с. кос гнул Δ

$$ASA_1: \quad 12^2 + 18^2 - 12 \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = SA_1^2 = 231$$

$$SA_1 = \sqrt{231}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 1144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ + 216 \\ \hline 216 \\ - 632 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 79 \\ \times 3 \\ \hline 237 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \\ - 237 \\ \hline 231 = 11 \cdot 21 \end{array}$$

Ответ: 1215

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$$\sqrt[5]{\log_x 3}$$

$$243 \sqrt[5]{81}$$

$$\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4} = 3^{4/5}$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 x$$

$$-8 = \frac{5 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{3}} + \frac{3,5 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{3}}$$

$$-8 = \frac{7 \log_3^4 x}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\log_3^4 t + 3,5 \log_t 3 = -8$$

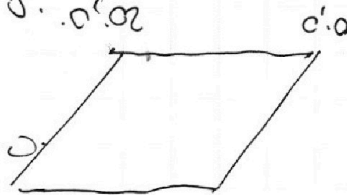
$$\log_3^4 x + 3,5 \log_{3x} 3$$

$$\log_3^4 x \log$$

$$= \frac{8}{3} \log_3^4 x$$

$$t^4 + 3,5 \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$t^4 - \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

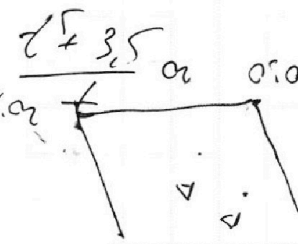


$$\log_x 2 = 3^{12-5} = \log_x 2^7$$

$$\log_{25} 2^3 = \log_{(5^2)} 2^3 = \log_{5^2} 2^3$$

$$\log_x 2$$

$$\log_{x^2}$$



$$\log_3^4 5xy + 3,5 \log_x 3 - 3,5 \log_{5y} 3 = -16$$

$$3,5 (\log_{3x} 3 - \log_{5y} 3) =$$

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 5y}$$

$$\frac{\log_3 5y - \log_3 x}{\log_3 x \log_3 5y}$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{x}$$

$$t^4 + \frac{3,5}{t} = -8$$

$$t^4 - \frac{3,5}{t} = -8$$

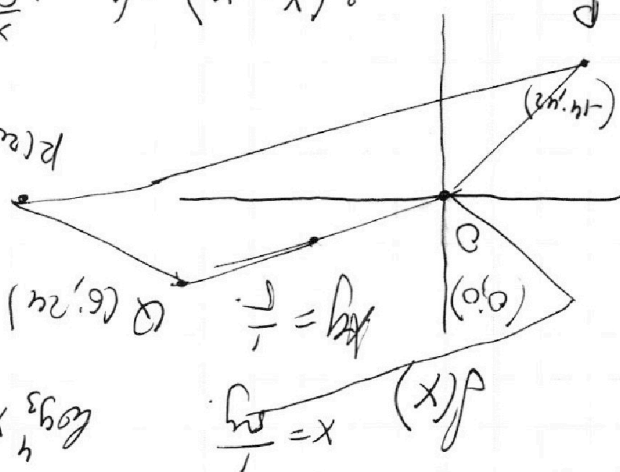
$$\log_3 \frac{xy}{x} = \log_3 (x-2y) + \log_3 (y-2x)$$

$$\log_3 x$$

$$\log_3 x$$

$$\log_3^4 x - \frac{3,5}{x}$$

$$x = \frac{xy}{y}$$



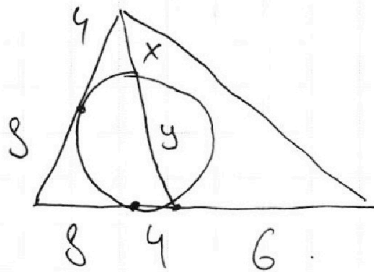
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

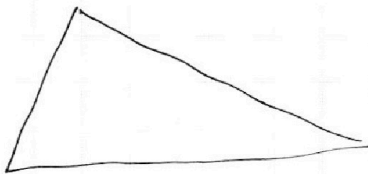
 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = x(x+y)$$

*Черновик*



$$\frac{64}{x^2}$$

$$128 - x \cdot 64 \cdot 2 = 25 + 2 \cdot 25x$$

$$103 = 104x$$

x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

*черновик*

$$\begin{array}{r} 243 \text{ } \frac{18}{27} \\ -18 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\log_3^4 x + \log_x^3 = -8$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$\log_3^4 x + \log_3 x = -8$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

$$t^4 + \frac{1}{t} = -8$$

$$t^5 + 1 + 8t = 0$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -25 \\ \hline 3,5 \end{array}$$

$$\log t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 3,5 + 8t = 0$$

$$2t^5 + 7 + 16t = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} + 3,5 = \log_x^2 243 - 8$$

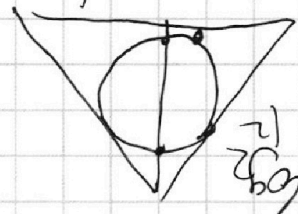
$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} + 3,5 = \log_3^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} + 3,5 = 18 - 8 = 10$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} = 6,5$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} = 6,5$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} = 6,5$$



$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = \log_3^4 54 = 3,5 \log_3 54$$

$$\frac{11}{2} \begin{array}{r} -5,5 \\ 2,0 \\ \hline 3,5 \end{array}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 54 = -1,5 (\log_3^3 x + \log_3 54)$$



$$-1,5 \log_3^3 x + 8 - 5 \log_3 54 - 8$$

$$\frac{1}{2} \log_3^3 x - \frac{1}{4} \log_3^3 x = \frac{3}{4} \log_3^3 x$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} + 3,5 = 10$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} = 6,5$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{\log_3 x} = 6,5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sinh^2 x}$$

*Зеркально*

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad 2y = -ax + 3b$$

$$\frac{4 \log_3 4}{x \ln 3} = \frac{1}{3.5}$$

$$\log_3 \frac{1}{5xy} = 3.5$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 4 = 0$$

$$144 - x^2 - y^2 = 140$$

*Handwritten mathematical work on grid paper, including:*

- Geometric diagrams of a pyramid and a sphere.
- Algebraic calculations:  $15 - 12 = 3$ ,  $3 \cdot 2 = 6$ ,  $18 \cdot 12 = 216$ ,  $3 \cdot 12 = 36$ ,  $3 \cdot 12 = 36$ ,  $3 \cdot 12 = 36$ .
- Trigonometric and logarithmic equations:  $\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{10}$ ,  $\sin(2 \operatorname{arcsin} \frac{1}{2})$ ,  $\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$ .
- Coordinate geometry:  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $(x-6)^2 + y^2 = 4$ .
- Calculus:  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{d}{dx} \ln 3 = \frac{1}{3}$ .
- Other notes:  $4 \log_3 4$ ,  $\log_3 \frac{1}{5xy}$ ,  $3.5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$uv : 2^9 3^{10} 5^{10}$      $a+b+c \geq 21$   
~~7~~ 3 11

$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$     2 1    23

$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{20}$     53 22  
~~2~~ 11

$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc = d \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = t \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$

$a^2 b^2 c^2 = k \cdot d \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{25} \sqrt{k \cdot d \cdot 3 \cdot 5}$

41    3 · 3    ab    3 · 5.  
 bc  
 ac

$$\begin{array}{r} 5^{10} \\ + 40 \\ + 13 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3^{10} \cdot 3^{13} \cdot 3^{18} \\ \hline 3^{23} \\ + 718 \\ \hline 41 \end{array}$$

$b-c = -10$   
 $a+b=9$      $b=2$   
 $b+c=14$      $c=12$   
 $a+c=19$      $a=7$

8 5 ∞  
 3 6 3  
 11 ✓ 10

$2^9 3^{10} 5^{10}$     a b  
 $2^{19} 3^{18} 5^{20}$     a c  
 ~~$a+b=9$~~      $a+b=10$   
 ~~$a+c=15$~~      $a+c=18$   
 ~~$b+c=14$~~      $b+c=14$

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 14 \\ \hline 42 \end{array}$$

$10 = a+b$   
 $30 = a+c$      $14 = a-b$   
 $14$      $13 = b+c$      $a-b=10$   
 $16 = a-b$      $b=3$   
 $2a = 26$      $a=13$      $a=10$   
                           $b=0$   
                           $c=20$      $a=7$

$b-c$      $c-b=8$   
 $b+c=13$   
 $2c=22$   
 $c=11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

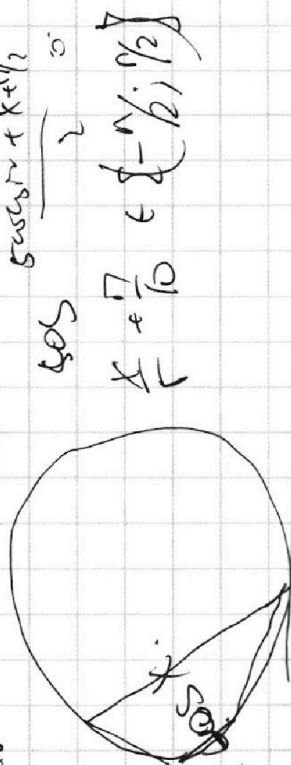
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$AD = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

$$AD = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

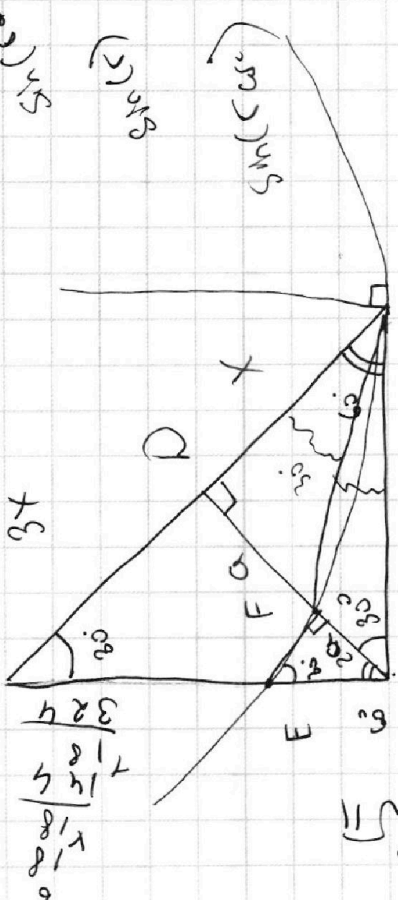
$$\frac{324}{58} = \frac{22}{25}$$

$$\frac{324}{58} = \frac{22}{25}$$



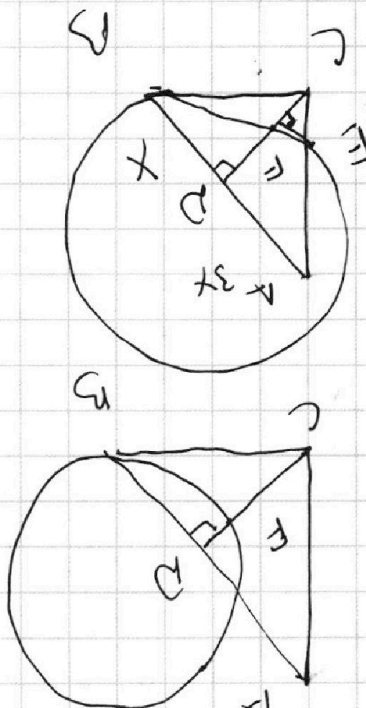
$$\cos X = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\cos X = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right)$$



$$\frac{2x}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$