МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\,(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

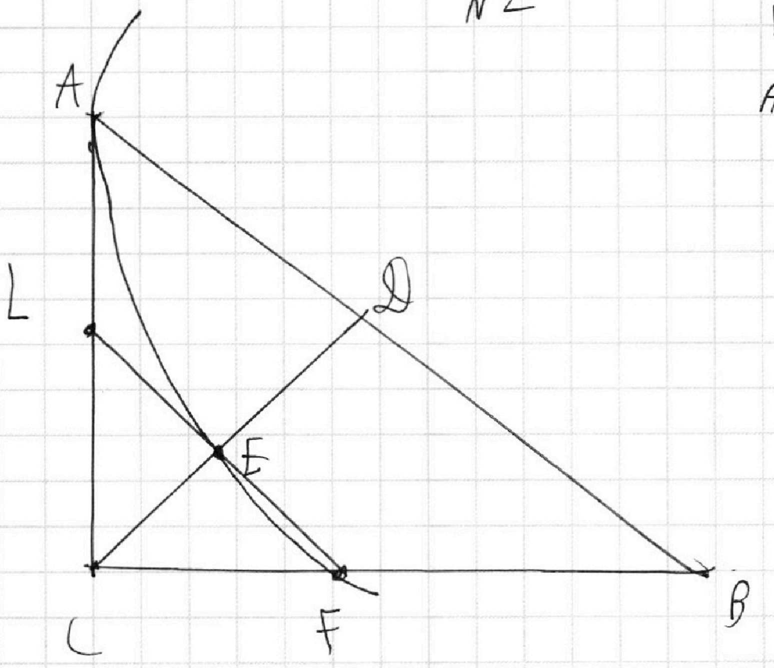
МФТИ

№1

Т.К. $ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$, $bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$, $ac \vdots 2^{16} 3^{25} \cdot 5^{28}$, то $ab \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$, $ac \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, значит $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = ab \cdot bc \cdot ac \geq$ $\geq 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$. Заметим, что слева стоит квадрат, а справа нет т.к. 3 стоит в нечётной степени, при этом т.к. ~~каждое~~, каждое из трёх произведений делится на 3 в определённой степени, то $a^2b^2c^2$ делится на 3^{59}. ~~степе~~ наименьший квадрат больший $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ и делящийся на это число ($a^2b^2c^2$ делится на него ~~т.к.~~, из-за того что это произведение ab, bc и ac) это число $2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, но тогда наименьшее возможное значение $abc = \sqrt{a^2b^2c^2} =$ $= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

N2



Дано:

ACB - прямоуг. треуг,

ω - окр,

AC - касательная ω

$CD \cap \omega = E$

$CB \cap \omega = F$

$EF = AB$

$AB : BD = 1{,}4$

Найти: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

1. т.к. $EF \parallel AB$, то $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$\frac{CE}{CD} = k$

2. Допустим $BD = x$, тогда

$AB = 1{,}4x$, $AD = AB - BD = 0{,}4x$

3. Продлим EF до пересечения с AC,

$AC \cap EF = L$, $LF \parallel AB$, значит, $\triangle LEC \sim \triangle ADC$

$k_1 = \frac{CE}{CD} = k$, также $\triangle LCF \sim \triangle ACB$,

$k_2 = \frac{LC}{AC} = \frac{CE}{CD}$ (из $\triangle LEC \sim \triangle ADC$) $= k$

4. По теореме о касательной и секущей

$AL^2 = LE \cdot LF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $AL = AC - LC = AC - k \cdot AC = AC(1-k)$

(из $\triangle LEC \sim \triangle ACD$)

6. из $\triangle LEC \sim \triangle ACD$, $LE = k \cdot AD$

из $\triangle LCF \sim \triangle ACB$, $LF = k \cdot AB$

7. $AL^2 = AC^2(1-k)^2$

$\tau\ LE \cdot LF = k^2 \cdot AD \cdot AB$,

т.к. $\triangle ACB$ — прямоуг., а CD — высота проведённая к гипотенузе, то $AD \cdot AB = AC^2$

8. $AL^2 = LE \cdot LF$, $AC^2(1-k)^2 = k^2 \cdot AD \cdot AB$,

$AC^2(1-k)^2 = AC^2 \cdot k^2$, $(1-k)^2 = k^2$

$(1-k)^2 - k^2 = 0$

$1 \cdot (1-2k) = 0$

$k = \frac{1}{2}$

9. $S_{ACD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{CD \cdot 0{,}4x}{2}$

$S_{CEF} = S_{CDB} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot DB}{2} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot 0{,}4x}{2} \cdot \frac{2}{CD \cdot \cancel{DB} \cdot x} \cdot 4 =$

$= \frac{0{,}4}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1{,}6$

Ответ: 1,6

№3

$$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$$

Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi$, $0 \leq 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \leq 10\pi$,

значит и $0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$, $-9\pi \leq -2x \leq \pi$,

$9\pi \geq 2x \geq -\pi$, $\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$, также

заметим, что в зависимости от промежутка, где находится x, $\arcsin(\sin x)$ выражается по разному через x

1 случ: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\cancel{x}\sin x) = x$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \text{подх.}$$

2 случ: $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$$10\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$12x = 14\pi$

$x = \frac{14}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi$ — подх.

3 случ. $x \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$16\pi = 8x$

$x = 2\pi$ — подх.

4 случ. $x \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$

$10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x$

$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$

$12x = 34\pi$

$x = \frac{34}{12}\pi = \frac{17}{6}\pi$ — подх.

5 случ. $x \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin x) = x - 4\pi$

$10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$36\pi = 8x$

$x = \frac{36}{8}\pi = \frac{9}{2}\pi$ — подх.

т.к. $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$, то больше случаев нет

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = 2\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi$, $x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} 5x+bay-6=0 & (1) \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 & (2) \end{cases}$$

Преобразуем (2)

$$(x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0$$

Данное уравнение равносильно ~~системе~~ совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \\ x^2+(y+9)^2-4=0 \end{array} \right.$$

Данная совокупность задаёт на плоскости две окружности ω_1 и ω_2 с ценрами $(0,0)$; $(0;-9)$ и радиусами 5; 2 соответственно. (1) 1 уравнение задаёт прямую, но т.к. нам нужно найти a, при которых найдётся b, то b можно считать произвольным параметром при фиксированном a_f. Значит (1) задаёт семейство ~~пря~~ параллельных друг другу прямых, у каждой прямой из этого семейства одинаковый угловой коэффициент

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

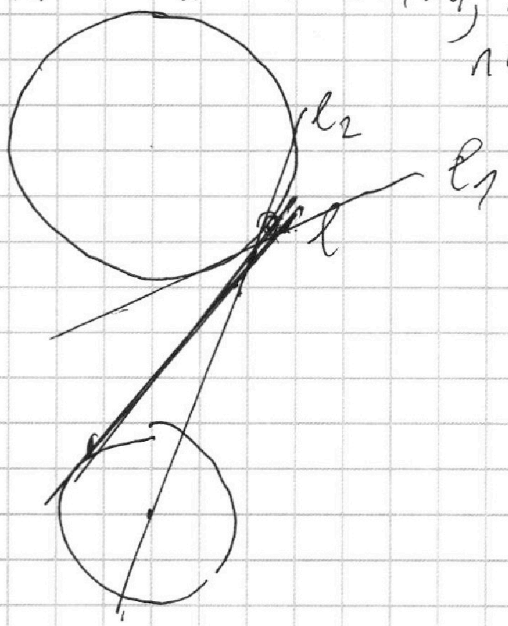
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если угловой коэффициент больше 0 и больше $\frac{4\sqrt{2}}{7}$, то найдётся такое b, что одна из прямых пересечёт обе окружности, а иначе нет (l_2 пересекает обе окружности, а l_1 либо одну, либо другую)



Аналогично для $k<0$, получаем, что $k<-\frac{4\sqrt{2}}{7}$, случаи $k=\pm\frac{4\sqrt{2}}{7}$ нам не подходят, ведь прямые только касаются. Случай $k=0$ тоже, ведь тогда прямая параллельна Ox и, очевидно, не может сразу пересечь две окружности. (k — угловой коэффициент семейства прямых),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

НАЙДЁМ k ЧЕРЕЗ a

$$5x+6ay-6=0$$

$$5x-6=6ay$$

$$\frac{5}{6a}x-\frac{6}{6a}=y, \text{ ЕСЛИ } a\neq 0$$

ЕСЛИ $a=0$, ТО ПРЯМАЯ ЗАДАЁТСЯ УРАВНЕНИЕМ $5x-6=0$ И ПАРАЛЛЕЛЬНА ОСИ OY, ТАКОЕ a НАМ ПОДХОДИТ, Т.К. ПРИ $a=0$ ПРЯМАЯ ПЕРЕСЕКАЕТ ОБЕ ОКРУЖНОСТИ.

ИТАК, $\left[\begin{array}{l} k>\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ k<-\frac{4\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{5}{6a}>\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \frac{5}{6a}<-\frac{4\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}>\frac{24\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a}<-\frac{24\sqrt{2}}{35}\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{a}>\frac{24\sqrt{2}}{35} \qquad \frac{1}{a}<-\frac{24\sqrt{2}}{35}$$

$$0<a<\frac{35}{24\sqrt{2}} \qquad 0>a>\frac{-35}{24\sqrt{2}}$$

получаем

$$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ 0<a<\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ 0>a>-\frac{35}{24\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Итоговый промежуток $a\in\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}};\frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

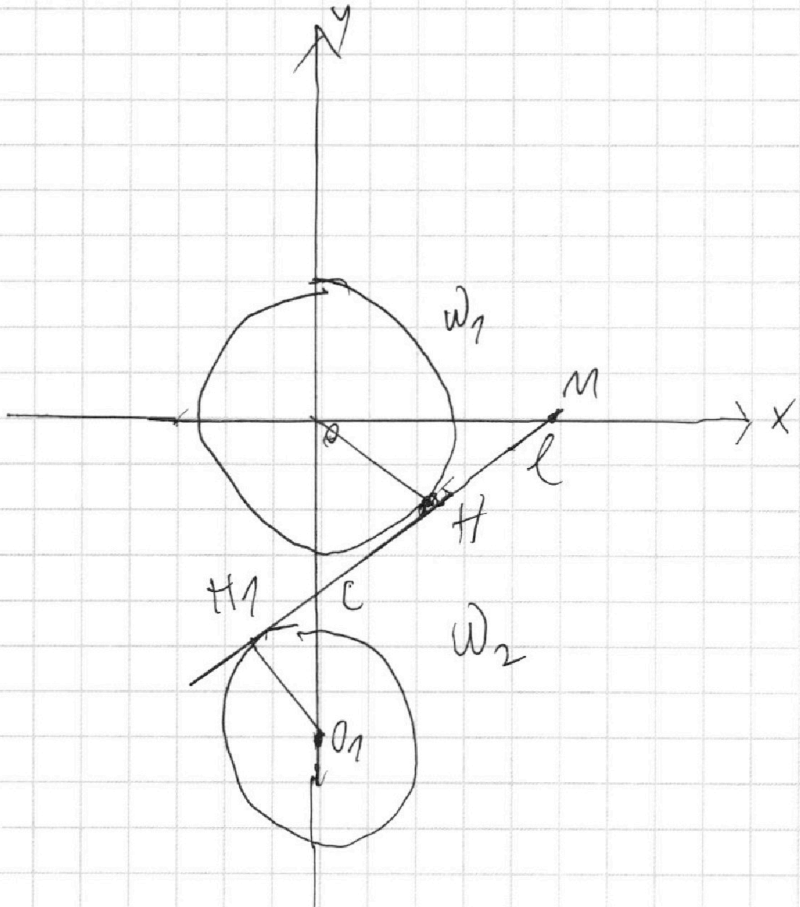
Ответ: $a\in\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}};\frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы нашлось b такое, что система имеет 4 решения, нужно, чтобы среди семейства прямых нашлась хотя бы 1 прямая, пересекающая обе окружности. Рассмотрим граничный случай, когда есть прямая, касающаяся обеих окружностей,



Допустим O - центр ω_1, O_1 - центр ω_2, l - общая касательная, $l \cap \omega_1 = H$, $l \cap \omega_2 = H_1$, $HH_1 \cap OO_1 = C$. Рассмотрим $\triangle HOC$ и $\triangle H_1O_1C$. Они оба прямоугольные, $\angle H_1CO_1 = \angle OCH$ как вертикальные. Тогда $\triangle HOC \sim \triangle H_1O_1C$.

$\frac{OC}{CO_1} = \frac{\cancel{H_1O}\,OH}{O_1H_1}$, $\frac{OC}{OO_1 - OC} = \frac{5}{2}$, $\frac{OC}{9-OC} = \frac{5}{2}$,

$2OC = 45 - 5OC$, $7OC = 45$, $OC = \frac{45}{7}$.

Допустим, l пересекает ось абсцисс в точке M. $\triangle OCM$ - прямоуг, OH - высота, значит $\angle OMC = \angle COH$, $\operatorname{tg} OMC = \operatorname{tg} COH$

$\operatorname{tg} COH = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 COH} - 1} = \cancel{\sqrt{1}} \sqrt{\frac{OH^2}{C\theta^2} - 1} =$

$= \cancel{\sqrt{5 \cdot \frac{7}{45}}} = \sqrt{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$

$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

Заметим, что в виду симметричности окружностей относительно OY, вторая общая касательная имеет противоположный угловой коэффициент

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} (11^{-13}) - 5$

$0{,}5y = t$

$xy = 2tx$

$\log_{11}^4 (t) + \log_t 11 = \log_{t^3} (11^{-13}) - 5$

ОДЗ: $x > 0$, $t > 0$, $t \neq 1$, $x \neq 1$

На ОДЗ $\log_{t^3}(11^{-13}) = -\frac{13}{3}\log_t 11$

$\log_t 11 = \frac{1}{\log_{11} t}$, $\log_{x^3}\frac{1}{121} = -\frac{2}{3}\log_x 11$

$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$

Заменим, $\log_{11} t = d$, $\log_{11} x = q$, получим

$d^4 - \frac{6}{d} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{d} - 5$ (1)

$q^4 + \frac{1}{q} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{q} - 5$ (2)

т.к. $t \neq 1$, $x \neq 1$, то на ОДЗ

(1) мы можем домножить на d,

(2) на q, получим

$d^5 - 6 + \frac{2}{3} = -5d$ (3)

$q^5 + 1 + \frac{13}{3} = -5q$ (4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Сложим (3) и (4), получим $x^5+y^5=-5(x+y)$

$x^5+5x+y^5+5y=0$

Рассмотрим $f(x)=x^5+5x+y^5+5y$, y - фиксирована

$D(f)=\mathbb{R}$

$f(x)$ монотонна на $\mathbb{R}$, значит уравнение $f(x)=0$ имеет не более 1 решения, при этом $x=-y$ является решением (но т.к. $x\ne0$, $y\ne0$, $(0,0)$ - не является решением)

Подставим $x=-y$ в ~~первое~~ третье уравнение

$$-y^5-6+\frac{2}{3}=5y$$

$$y^5+5y=\frac{16}{3}$$

При этом (4) можно переписать как

$$y^5+\frac{16}{3}=-5y$$

$$y^5+5y=-\frac{16}{3}$$

3 верно, значит единственным решением системы является $(-y,y)$, $y\ne0$

Тогда $x=-y$, ~~$\log_{11}x$~~ $\log_{11}t=-\log_{11}x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11} t = \log_{11} \frac{1}{x}$

$t = \frac{1}{x}$

$t > 0,\ t \neq 1$

тогда $xy = 2tx = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$

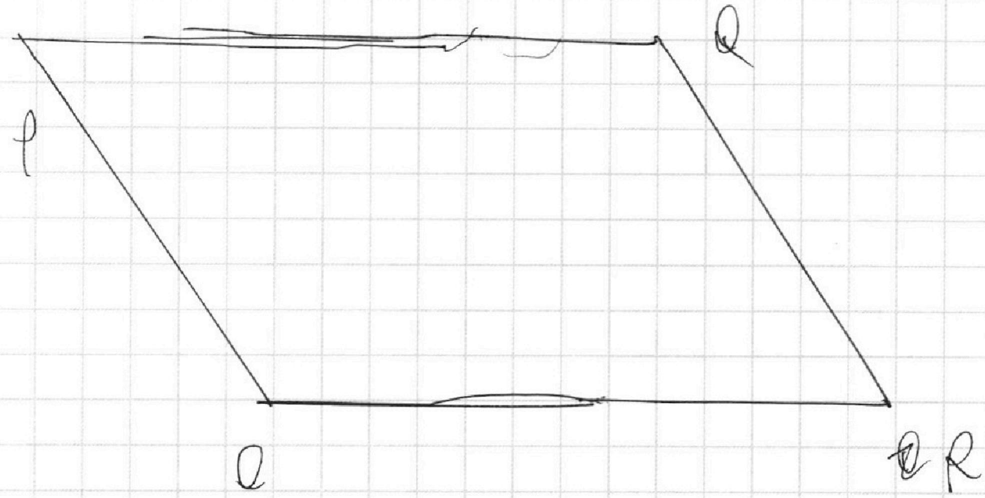
ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



НАЙДЕМ tg ORQ.

$\mathrm{tg}\, ORQ = \frac{90}{15} = 6$ (т.к. ~~Q(2;90)~~

~~Q~~ y-координата Q — 90, y-координата R — 0,

x-координата Q — 2, x-координата R — 17,

$\cancel{\mathrm{tg} = 90}$ ~~O~~ $\mathrm{tg}\, ORQ = \frac{90-0}{\cancel{17-2}\ 17-2} = 6$)

ЗАМЕТИМ, ЧТО ЕСЛИ МЫ УЖЕ ВЫБРАЛИ ТОЧКУ B, ТО НАМ НАДО НАЙТИ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ $6x+y+6x_2+y_2=48$, ТАКИЕ, ЧТО x, y ~~цело числ~~ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ И A ЛЕЖИТ ВНУТРИ PQRO.

ЗАМЕТИМ, ЧТО ТАКАЯ ПРЯМАЯ СИММЕТРИЧНА ~~QR ОТНОСИТЕЛЬНО~~ O ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ QR, ОТНОСИТЕЛЬНО Ox.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

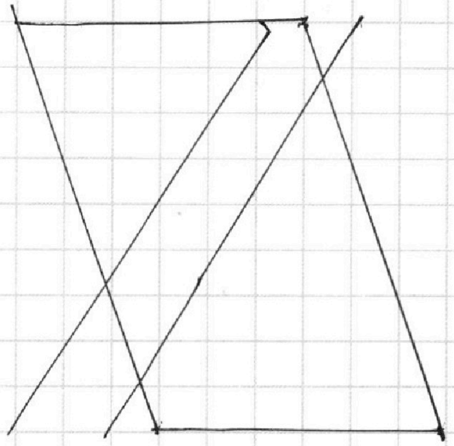
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~зам~~ перепишем уравнение в виде $y = 48 + 6x_2 + y_2 - 6x$, т.к. мы должны точки внутри параллелограмма, то и прямая должна ~~л~~ лежать внутри параллелограмма хотя бы частично. Но т.к. целочисленных точек на ~~границе~~ нижней или верхней стороне всего ~~[illegible]~~ 66, а $48 + y_2 + 6x_2$ — целое число, то таких прямых всего и не более ~~[illegible]~~ 3664 (т.к. такая прямая пересекает нижнюю или верхнюю сторону параллелограмма в целочисленной точке, нам не подходят точки $(0,0)$ и $(-15, 90)$, так как в этом случае прямая пересечет параллелограмм в одной точке, значит всего прямых не более 6264

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Ч~~ Чтобы прямая лежала хотя бы частично, она должна пересечь верхнюю или нижнюю сторону или

их проекции, отсюда и следует оценка на ~~64~~ 66 прямых, т.к. на объединении стороны и проекции $17-(-15)+1=$ $=33$ ~~я~~ целочисленных точки, а всего их в 2 раза больше), но т.к. $y=48+6x_2+y_2-6x$, то если прямая пересекла нижнюю сторону или проекцию верхней в целочисленной точке, то и верхнюю сторону или проекцию нижней она пересечёт в целочисленной точке (т.к. сдвиг по y будет 90, то сдвиг по x будет 15), значит, каждую прямую мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

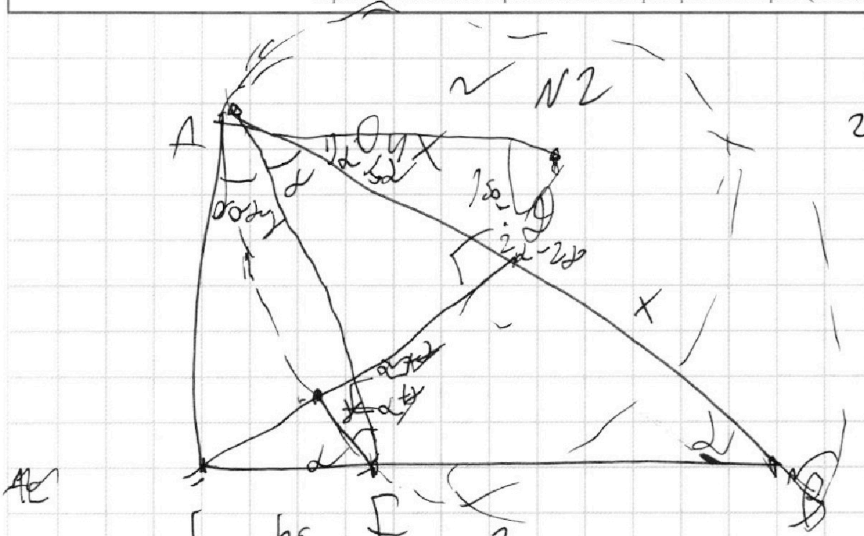
посчитали 2 раза, то есть их всего $\frac{64}{2} = 32$. Для прямых пересекающих параллелограмм в точках от (~~2,17~~ 17,0) (17,0) до (~~15~~ 16,0) целочисленных точек внутри параллелограмма и на прямой нет. Для (15,0) она одна

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2



$\sin 2\gamma = \frac{AC}{r}$

$2\sin\gamma \cdot \cos\gamma = \frac{AC}{r}$

$BB_1 : BD = 1{,}4$

$CD = \sqrt{0{,}4}\,x$

$2\sin^2\gamma = \frac{CF}{r}$

$k^2 \cdot AD \cdot AB = AC^2$

$2\alpha + 2\gamma = 90 - \alpha + \alpha + \alpha + \gamma = 2\alpha + \gamma$

$k = \frac{1}{2}$

$(CF - R)^2 + AC^2 = R^2$

$AC^2 = CF \cdot (2R - CF)$ ~~$90 + 2\gamma$~~

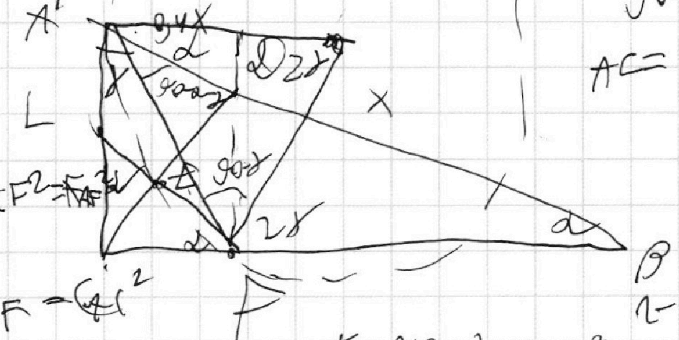
$\operatorname{tg}\gamma = \frac{CF}{AC}$

$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{AC}{r - CF}$

$90 - \alpha - \gamma$

$AC = AC - CC = AC - AC$

$\frac{2CF}{AF^2} = \frac{AC}{r - CF}$



$CD = \sqrt{0{,}4}\,x$

$AC^2 (1 - k)^2 = AD \cdot AB \cdot k^2$

$2CF r - CF^2 = AF^2$

$\frac{CE}{AC} = \frac{EF}{CB} = \frac{AB}{CF}$

$1 - k = k$

$LE \cdot LF = AC^2$

$\frac{2CF \cdot AC}{AF^2} = \frac{AC}{r - CF}$

$\alpha + 90 - \alpha - \gamma + 90 - \gamma$

$1 - k = k$

$\frac{1}{1{,}4}$

1080

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{x}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{CD}{0{,}4x}$

$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{0{,}4x}{x} = 0{,}4$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{0{,}4}$

$\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}^2\gamma} = \frac{AC}{r - CF}$

$\frac{2\frac{CF}{AC}}{1 + \frac{CF^2}{AC^2}} = \frac{AC}{r - CF}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{48} \cdot 5^{42}$

$a = 2^x 3^y 5^z$

$b = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$

$c = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$

$y + y_1 = 13$

$y_1 + y_2 = 21$

$y_2 + y = 25$

$x + x_1 \geq 6$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$x + x_2 \geq 16$

$x_2 - x = 8$

$$\begin{cases} x + x_1 = 6 \\ x_1 + x_2 = 14 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$2^{18} 3^{30} 5^{21}$

$x_2 - x = 8$

$x + x_2 = 16$

$x_2 = 12$

$x = 4$

$x_1 = 2$

$5\Pi - 5\Pi \cdot 10 \alpha x = 9\Pi - 2x$

$8x$

$10 \sqrt{1 - x^2} = 9\Pi - 2x$

$y_2 - y_1 = 12$

$y_2 + y_1 = 21$

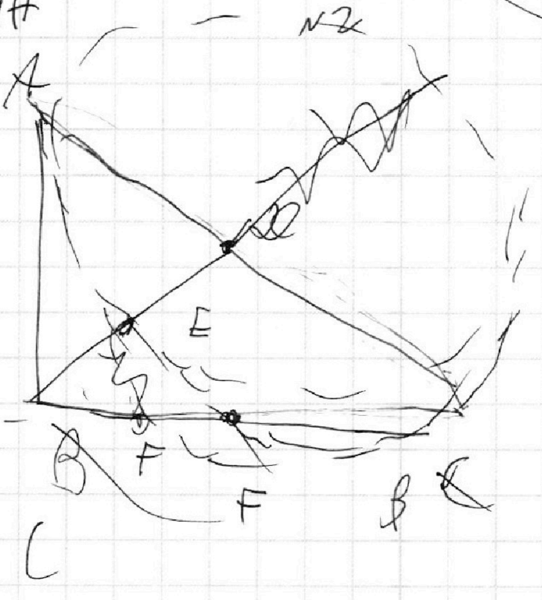
$2y_2 = 33$

$10 - 10x^2 = 4x^2 - 36\Pi x + 81\Pi^2$

$-8x = 4\Pi$

$x = -\frac{\Pi}{2}$

$14x^2 - 36\Pi x + 81\Pi^2 - 10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4(t) + \log_t 11 = \log_{t^3}(11^{-13)}) - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 + \frac{2}{3}\log_x 11 = -5$

$x = 1 \quad a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = -5$

$0{,}5y = 1 \quad a\ g^4 + g\frac{1}{g} + \frac{13}{3g} = -5$

$a^5 - \frac{16}{3} = -5a$

$g^5 + \frac{16}{3} = -5g$

$\log_{11} x = \log_{11}\frac{1}{t} \quad a^5 + g^5 = -5(a+g)$

$x = \frac{1}{t} \quad \cancel{a^5 + 5a = \frac{16}{3}}$

$x = \frac{1}{0{,}5y} \quad g^5 - a^5 + \frac{32}{3} = -5\cdot(g-a)$

$x \cdot y = \frac{1}{0{,}5y} = \cancel{(g-a)(g\ldots\ldots) = -\frac{32}{3}}$

$= 2$

$a(a^4+5) + g(g^4+5) = 0$

$a = -g$

$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 \cdot 0{,}8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

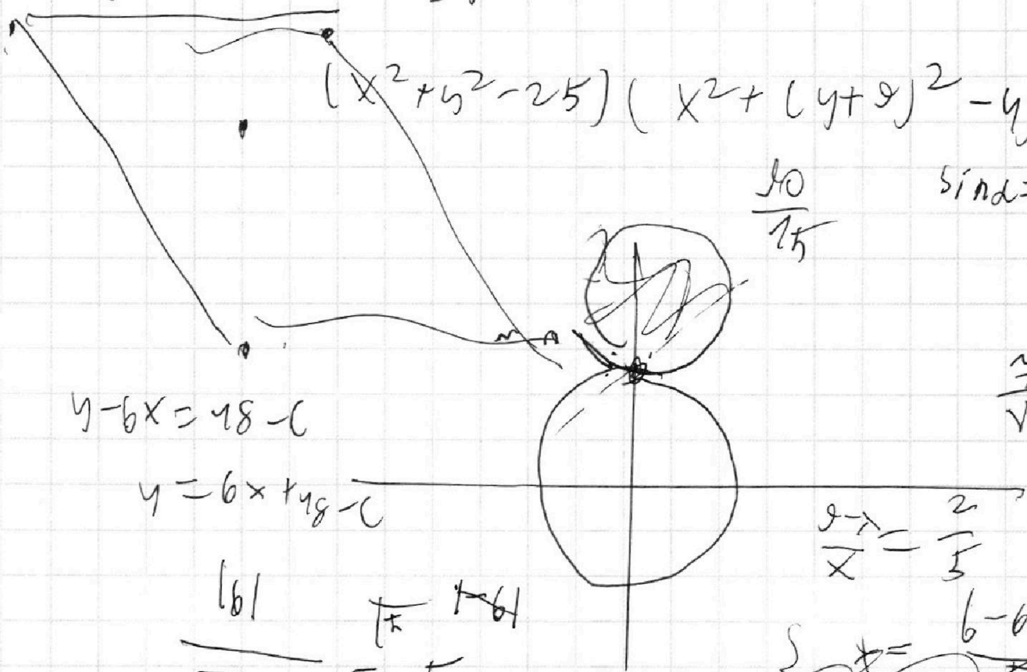
$6(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=48$ №4

$(x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0$

$\sin\alpha = 5\cdot\frac{7}{45} = \frac{7}{9}$

$\frac{10}{15}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{32}}{9}$



$\frac{7}{\sqrt{32}}$

$y-6x=48-c$

$y=6x+48-c$

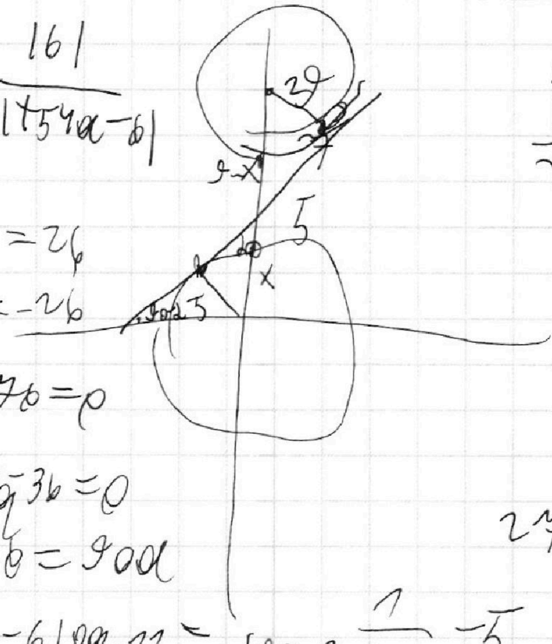
$\frac{9-x}{x}=\frac{2}{5}$ $\quad 45-5x=2x$

$\frac{|b|}{\sqrt{25+36a^2}}=5$ $\quad |5 \quad 1-6|$

$x=\frac{6-6ay}{5}$ $\quad 45-7x=0$

$x=\frac{45}{7}$

$\frac{5}{2}=\frac{|b|}{|-54a-b|}$



$\frac{|54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}}=2$

$270-56=26$

$270-56=-26$

$|54a-b|=$

$=|-6|$

$270-76=0$

$270-36=0$

$54a-6=6$

$b=90a$

$27a=\frac{6}{\cancel{8a}}$

$\log_{11}^7 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121}-5$