



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

т.к.  $a^6: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$ ,  $b^6: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$   
 $a^6 \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$ ,  $b^6 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$   
 $a^6 \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$ ,  $b^6 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$   
 $a^6 \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$  ЗНАЧИТ  $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 \geq$   
 $\Rightarrow 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ . ЗАМЕТИМ, ЧТО СЛЕВА СТОИТ  
КВАДРАТ, А СПРАВА НЕТ Т.К. 3 СТОИТ  
В НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ, ПРИ ЭТОМ Т.К.  
~~КАЖДОЕ~~ КАЖДОЕ ИЗ ТРЕХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ  
ДЕЛИТСЯ НА 3 В ОПРЕДЕЛЕННОЙ СТЕПЕНИ, ТО  
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$  ДЕЛИТСЯ НА  $3^{59}$  ~~СЛЕВА~~ НАИМЕНЬШИЙ  
КВАДРАТ БОЛЬШИЙ  $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$  И ДЕЛЯЩИЙСЯ  
НА ЭТО ЧИСЛО  $(a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)$  ДЕЛИТСЯ НА НЕГО, Т.К.  
ИЗ-ЗА ТОГО ЧТО ЭТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ  $(a^6, b^6 \text{ И } c^6)$   
ЭТО ЧИСЛО  $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ , А ТОГДА НАИМЕ  
НЬШЕЕ ВОЗМОЖНОЕ ЗНАЧЕНИЕ  $a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} =$   
 $= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$   
ОТВЕТ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

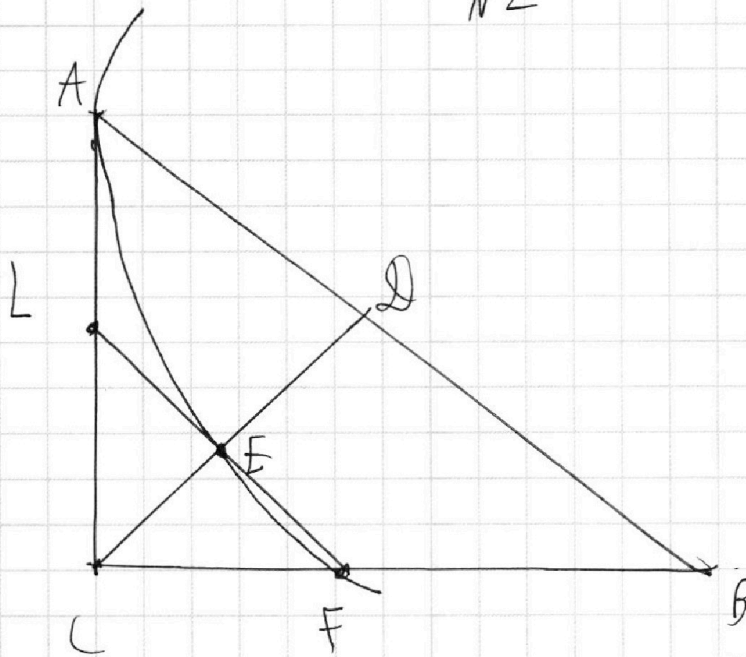
1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



N2



Дано:

ACB - прямоугол.

Треугол.

AB

ω - окр.

AC - касательная

ω

$(D \cap \omega) = E$

$(B \cap \omega) = F$

$EF = AB$

$AB : BD = 1 : 4$

Найти:

$\frac{S_{ACD}}{S_{CBF}}$

$\frac{S_{CBF}}{S_{CBF}}$

1. Т.к.  $EF \parallel AB$ , то  $\triangle EEF \sim \triangle \omega \omega B$   
 $\frac{LE}{\omega \omega} = k$

2. Возьмем  $BD = x$ , тогда  
 $AB = 4x$ ,  $AD = AB - BD = 3x$

3. Проведем  $EF$  и пересечем  $AC$ ,

$AC \cap EF = L$ ,  $EF \parallel AB$ , значит,  $\triangle LEC \sim \triangle ADB$

$k_1 = \frac{CE}{\omega \omega} = k$ , также  $\triangle LFC \sim \triangle ACB$ ,

$k_2 = \frac{LC}{AC} = \frac{CB}{\omega \omega}$  (из  $\triangle LEC \sim \triangle ADB$ ) =  $k$

4. По теореме о касательной и секущей

$$AL^2 = LE \cdot LF$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5. AL = AC - LC = AC - k \cdot AC = A(1-k)$$

$$(из \triangle LEC \sim \triangle ACD)$$

$$6. из \triangle LEC \sim \triangle ACD, LE = k \cdot AD$$

$$из \triangle LEF \sim \triangle ACB, LF = k \cdot AB$$

$$7. AL^2 = A^2(1-k)^2$$

$$+ LE \cdot LF = k^2 \cdot AD \cdot AB,$$

т.к.  $\triangle ACB$  - прямоугол., а  $CD$  - высота проведённая к гипотенузе, то  $AD \cdot AB = AC^2$

$$8. AL^2 = LE \cdot LF, A^2(1-k)^2 = k^2 \cdot AD \cdot AB,$$

$$A^2(1-k)^2 = A^2 \cdot k^2, (1-k)^2 = k^2$$

$$(1-k)^2 - k^2 = 0$$

$$1 \cdot (1-2k) = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$9. S_{ACD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{CD \cdot 0,4x}{2}$$

$$S_{CEF} = S_{CDB} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot DB}{2} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{CD \cdot 0,4x}{2}}{\frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}} \cdot 4 =$$

$$= \frac{0,4}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1,6$$

ОТВЕТ: 1,6



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$$

Заметим, что  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \leq \pi, \quad 0 \leq 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \leq 10\pi,$$

$$\text{значит } 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi, \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi,$$

$$9\pi \geq 2x \geq -\pi, \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ также}$$

Заметим, что в зависимости от промежутка, где находится  $x$ ,  $\arcsin(\sin x)$

выражается по разному через  $x$

$$1 \text{ случай: } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) =$$

$x$

$$x \cdot 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - 10\pi x,$$

$$2 \text{ случай: } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$10\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi - \text{период } x,$$

$$3 \text{ (1) ч. } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = x - 2\pi$$

$$10 \left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi - \text{период } x,$$

$$4 \text{ (1) ч. } x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right], \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = 3\pi - x$$

$$10 \left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{34}{12}\pi = \frac{17}{6}\pi - \text{период } x,$$

$$5 \text{ (1) ч. } x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = x - 4\pi$$

$$10 \left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$36\pi = 8x$$

$$x = \frac{36}{8}\pi = \frac{9}{2}\pi - \text{период } x,$$

т.к.  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$ , то больше значений нет

$$\text{ОТВЕТ: } x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7}{6}\pi, x = 2\pi, x = \frac{17}{6}\pi, x = \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 & (2) \end{cases}$$

ПРЕОБРАЗУЕМ (2)

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

Полученное уравнение равносильно системе (совокупности)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Полученная совокупность задается на плоскости две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $(0,0)$ ;  $(0, -9)$  и радиусами  $5$ ;  $2$  соответственно. (1) и уравнение задает прямую, но т.к. нам нужно найти  $a, b$ , при которых найдется  $a, b$ , то  $b$  можно считать произвольным параметром. При фиксированном  $a, b$ , значит (1) задает семейство прямых параллельных друг другу прямых, у каждой прямой из этого семейства один и тот же угловой коэффициент.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



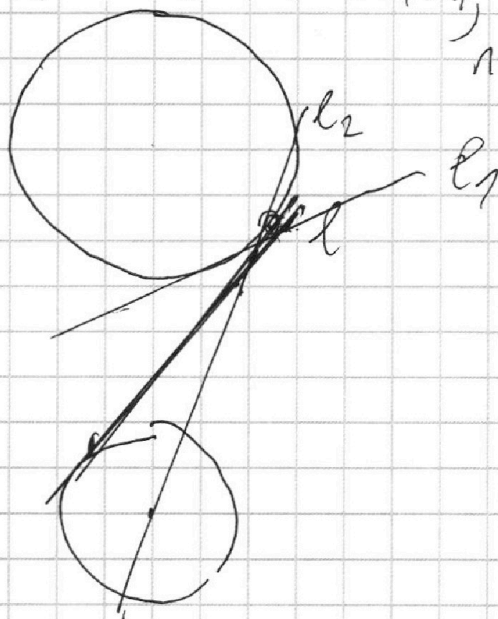
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если угловой коэффициент больше 0  
и больше  $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ , то найдётся такое  $b$ ,  
что одна из прямых пересечёт  
обе окружности, в иначе нет

( $L_2$  пересекает обе окружности, а  $e$ , либо одну,  
либо ни одну)



Аналогично для  $k$  получаем,  
что  $k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ , случаи  $k = \pm \frac{4\sqrt{2}}{7}$  нам  
не подходят, ведь прямые только касаются  
случай  $k = 0$  тоже, ведь тогда прямая  
параллельна  $Ox$  и очевидно, не может  
сразу пересечь обе окружности, (в-на  
вои коэффициенту семейства прямых),

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

НАБВЕМ  $bx + by - 6 = 0$

$$5x + by - 6 = 0$$

$$5x - 6 = by$$

$$\frac{5}{b}x - \frac{6}{b} = y, \text{ если } b \neq 0$$

Если  $b = 0$ , то прямая задается

уравнением  $5x - 6 = 0$  и парал-

лельна оси  $OY$ , такое  $b$  нам подходит,

т.к. при  $b = 0$  прямая пересекает

все окружности.

и так,  $\left[ \begin{array}{l} b > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ b < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{5}{b} > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{5}{b} < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \end{array} \right. \quad \text{X}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \\ 0 > a > \frac{-35}{24\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ПОЛУЧАЕМ

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 < \alpha < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ \alpha > \alpha > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

Итого вый промежуток  $\alpha \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

ОТВЕТ:  $\alpha \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

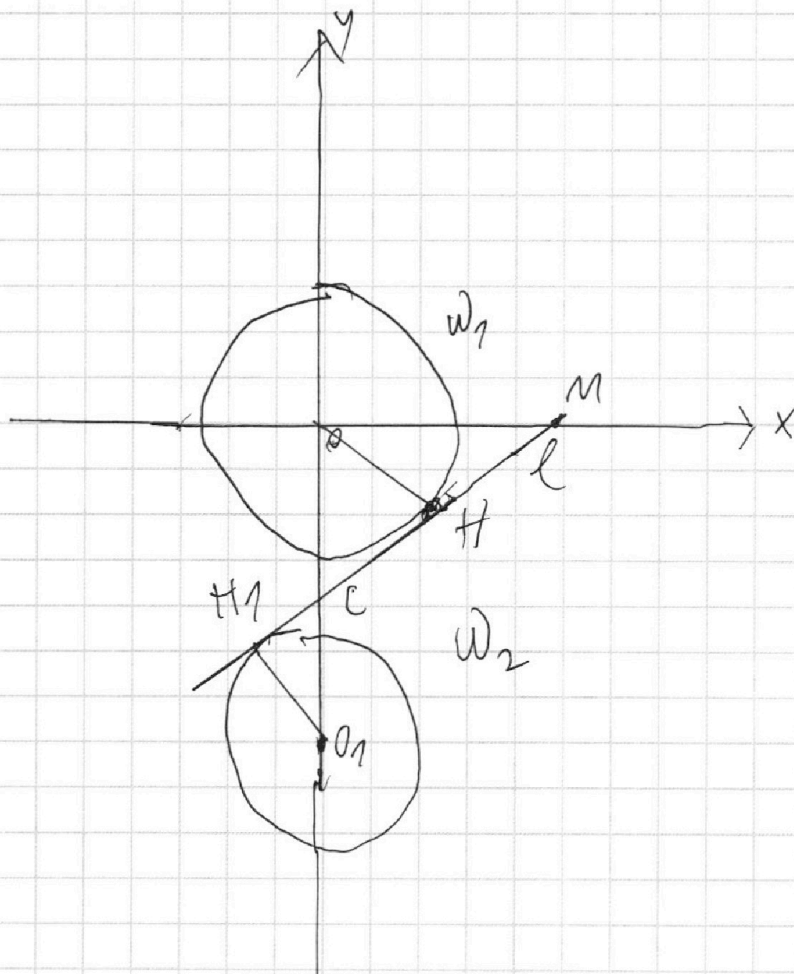
МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чтобы нашлось  $b$  такое, что система  
имеет 4 решения, нужно, чтобы  
(решу семейства прямых нашлась хотя бы)  
1 прямая, пересекающая обе окружности,  
рассмотрим граничный случай, когда есть  
прямая, касающаяся обеих окружностей,



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Допустим  $O$  - центр  $\omega_1$ ,  $O_1$  - центр  $\omega_2$ ,  
 $\ell$  - общая касательная,  $\ell \cap \omega_1 = H$ ,  $\ell \cap \omega_2 = H_1$ ,  
 $HH_1 \perp OO_1 = \ell$ , рассмотрим  $\triangle HOC$  и  $\triangle H_1O_1C$   
они оба прямоугольные,  $\angle H_1CO_1 = \angle OCH$  как  
вертикальные, тогда  $\triangle HOC \sim \triangle H_1O_1C$ .

$$\frac{OC}{CO_1} = \frac{HO}{O_1H_1}, \quad \frac{OC}{O_1O - OC} = \frac{5}{2}, \quad \frac{OC}{9 - OC} = \frac{5}{2},$$

$$2OC = 45 - 5OC, \quad 7OC = 45, \quad OC = \frac{45}{7}.$$

Допустим,  $\ell$  пересекает ось абсцисс

в точке  $M$ ,  $\triangle OCM$  - прямоугольник,  $OH$  - высота,

значит  $\angle OCM = \angle OCH$ ,  $\tan OMC = \tan OCH$

$$\tan OCH = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 OCH} - 1} = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2} - 1} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{7}{\frac{81}{49}} - 1} = \sqrt{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Заметим, что ввиду симметричности

окружностей относительно  $OY$ , вторая

общая касательная имеет противоположные

угловый коэффициент

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,125}^3 (11^{-13}) - 5$$

$$0,54 = t$$

$$xy = 2tx$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_t^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{matrix} x > 0 & t \neq 1 \\ t > 0 & t \neq 1 \end{matrix}$$

$$\text{На ОДЗ} \quad \log_x^3 (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log_x 11$$
$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}, \quad \log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$
$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$$

Заменим,  $\log_{11} t = a$ ,  $\log_{11} x = g$ , получим

$$a^5 - \frac{6a}{g} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{g} - 5 \quad (1)$$

$$a^5 + \frac{1}{g} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{g} - 5 \quad (2)$$

т.к.  $t \neq 1$ ,  $x \neq 1$ , то на ОДЗ

(1) кмы можем домножить на  $g$ ,

(2) на  $g$ , получим

$$a^5 - 6 + \frac{2}{3} = -5a \quad (3)$$

$$a^5 + 1 + \frac{13}{3} = -5a \quad (4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ложим  $(\frac{3}{x})$  и  $(\frac{4}{y})$ , получим  $x^5 + y^5 = -5(x+y)$

$$x^5 + 5x + y^5 + 5y = 0$$

рассмотрим  $f(x) = x^5 + 5x + y^5 + 5y$ ,  $y$  - фиксировано

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$f(x)$  монотонна на  $\mathbb{R}$ , значит

уравнение  $f(x) = 0$  имеет не более

1 решения, при этом  $x = -y$  является

решением (но т.к.  $x \neq 0, y \neq 0, (0,0)$  -

не является решением)

подставим  $x = -y$  в  $\text{третье}$  уравнение

$$-y^5 - 6 + \frac{2}{3} = 5y$$

$$y^5 + 5y = \frac{16}{3}$$

при этом (4) можно переписать как

$$y^5 + \frac{16}{3} = -5y$$

$$y^5 + 5y = -\frac{16}{3}$$

Зверно, значит единственным решением

системы является  $(-y, y)$ ,  $y \neq 0$

тогда  $x = -y$ ,  $\log_{11} x = -\log_{11} t = -\log_{11} x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{17} t = \log_{11} \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$t > 0, t \neq 1$$

$$\text{Тогда } xy = 2tx = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$$

ОТВЕТ: 2

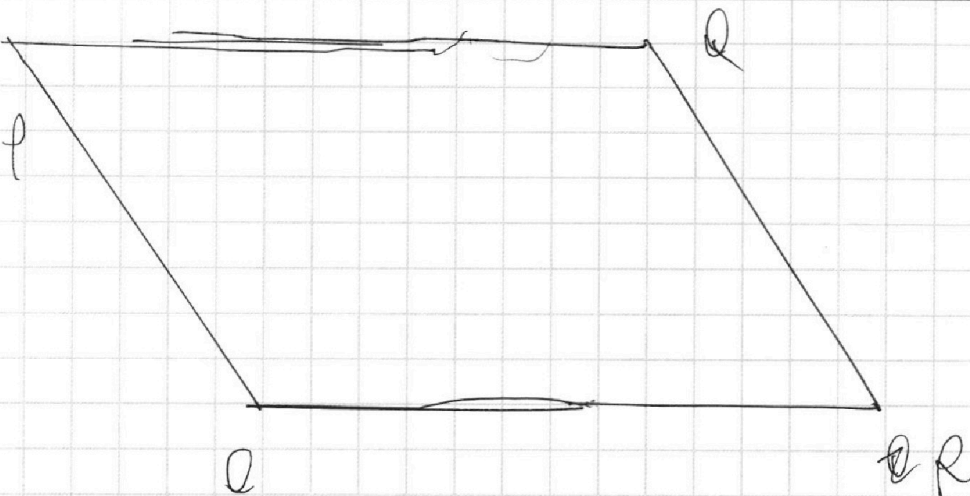
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



НАЙДЕМ  $\operatorname{tg} \angle ORQ =$

$$\operatorname{tg} \angle ORQ = \frac{90}{15} = 6 \quad \text{т.к. } \angle Q = 90^\circ$$

$\circledast$   $y$ -координата  $Q - 90$ ,  $y$ -координата  $R - 0$ ,  
 $x$ -координата  $Q - 2$ ,  $x$ -координата  $R - 17$ ,  
 $\operatorname{tg} = \frac{90}{17-2} = 6$   $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle ORQ = \frac{90-0}{17-2} = 6$

Замечим, что если мы уже выбрали точку  $B$ , то нам надо найти точки на прямой  $6x + y + 6x_2 + y_2 = 18$ , такие, что  $x, y$  — ~~целые числа~~ целочисленные и  $A$  лежит внутри  $\triangle PQR$ .

Заметим, что такая прямая симметрична  $QR$  относительно  $O$  прямой, параллельной  $QR$ , относительно  $Ox$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

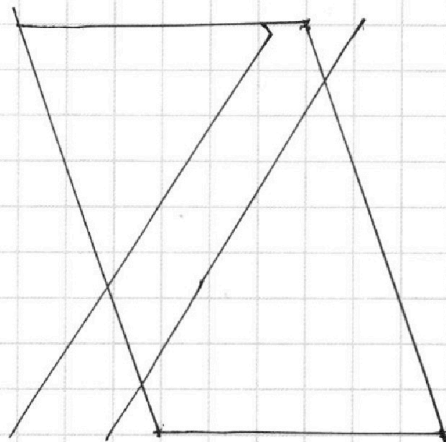
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чтобы прямая  
лежала хотя бы  
частично, она должна  
пересечь верхнюю  
или нижнюю  
сторону или

их проекции. Состав и следуют оценка  
на  $66$  прямых, т.к. на объективных  
сторонах и проекциях  $17 - (-15) + 1 =$   
 $= 33$  целочисленных точек, а всего  
их в 2 раза больше), но т.к.,  
 $y = 48x_2 + y_2 - 6x$ , то если прямая  
пересекла нижнюю сторону или  
проекцию верхней в целочисленной  
точке, то и верхнюю сторону или  
проекцию нижней она пересечёт  
в целочисленной точке т.к. шаг  
по  $y$  будет  $90$ , то шаг по  $x$  будет  
 $15$ ). значит, каждую прямую мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посчитали 2 раза, то есть их всего  
 $\frac{64}{2} = 32$ , для прямых пересекающих  
параллелограмм в точках от ~~(2,0)~~  
(17,0) до (15,0) целочисленные  
точки внутри параллелограмма  
и на прямой нет. Для (15,0) она  
отсюда



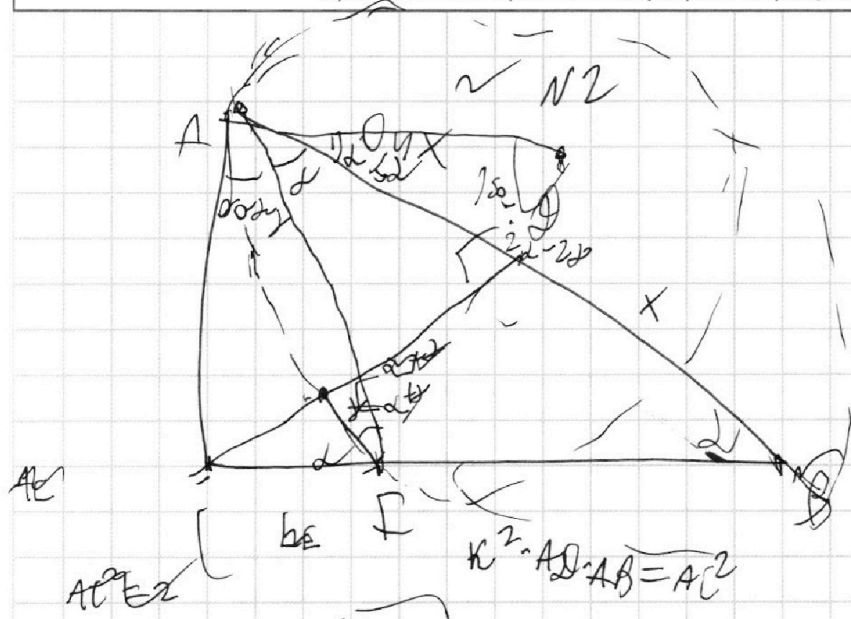
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2\gamma = \frac{AC}{R}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{AC}{R}$$

$$BB:BA = 1/4$$

$$\omega = \sqrt{0,4} \times$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{CF}{R}$$

$$2 = 2 \cdot 2 = ?$$

$$1 = \sqrt{0,5}$$

$$R^2 \cdot AD \cdot AB = AC^2$$

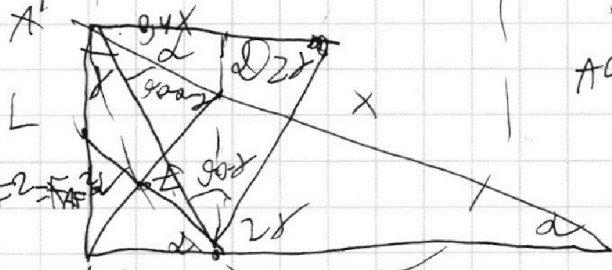
$$90^\circ - \alpha + \alpha + \alpha = 2 \cdot 2 \alpha \quad R = \frac{1}{2}$$

$$(CF - RR)^2 + AC^2 = R^2$$

$$AC^2 = (R(CF - C) + R - CF) \cdot 90 + 2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{CF}{AC}$$

$$\frac{2CF}{AF^2} = \frac{AC}{AF}$$



$$AC = AB - EC = AC - RAC$$

$$\omega = \sqrt{0,4} \times$$

$$AC^2 (1 - \frac{1}{2})^2 = AB^2 \cdot AB \cdot R^2$$

$$LE \cdot LF = AC^2$$

$$\frac{CF}{1-R} = \frac{EF}{R} = \frac{AB \cdot CF}{CF \cdot AB}$$

$$1 - R = \frac{1}{4}$$

$$\frac{AE}{AF^2} \cdot 2(CF \cdot AC) = \frac{AC \cdot CF}{CF}$$

$$\tan \alpha = \frac{CF}{AC}$$

$$EO \cdot \tan \alpha = \frac{\omega}{0,4 \times}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{0,4 \times}{x} = 0,4$$

$$\frac{2 \tan \alpha}{2 + \cos^2 \alpha} = \frac{AC}{R - CF}$$

$$\frac{2 \frac{CF}{AC}}{2 + \frac{CF^2}{AC^2}} = \frac{AC}{R - CF}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$b = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$$

$$c = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$$

$$y + y_1 = 13$$

$$y_1 + y_2 = 21$$

$$y_2 + y = 25$$

$$x + x_1 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 11$$

$$x + x_2 \geq 16$$

$$2^{18} 3^{30} 5^{21}$$

$$\begin{cases} x + x_1 = 6 & x_2 - x = 8 \\ x_1 + x_2 = 11 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$$511 - 5110 \cdot x = 911 - 2x$$

$$x_1 = 2$$

$$\begin{cases} x_2 - x = 8 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$$x_2 = 12$$

$$x = 4$$

$$20 \cdot \sqrt{1-x^2} = 911 - 2x$$

$$y_2 - y_1 = 12$$

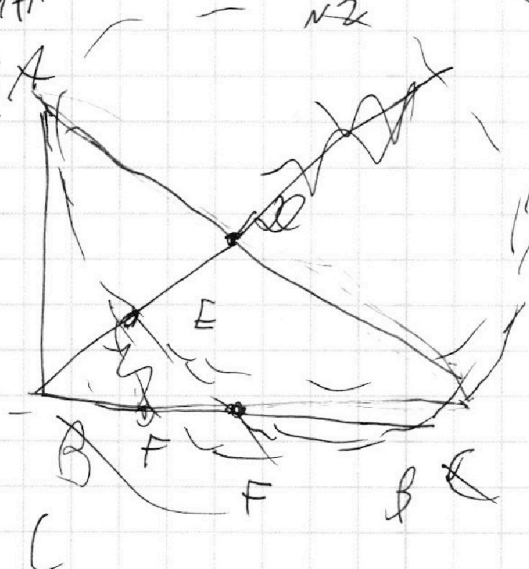
$$y_2 + y_1 = 21$$

$$60 - 10x^2 = 4x^2 \Rightarrow 364 > 14x^2 \Rightarrow 2y_2 = 33$$

$$-8x = 411$$

$$x = -\frac{411}{8}$$

$$14x^2 - 364x + 1811^2 - 10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log x^{11} = \log x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11} (x) + \log x^{11} = \log_{11} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11} x^x - 6 \log x^{11} + \frac{x^2}{3} \log x^{11} = -5$$

$$x=1 \quad x^x - \frac{6}{x} + \frac{2}{3x} = -5$$

$$0,5^0,5 \quad x^x + 9 \frac{1}{9} + \frac{13}{3 \cdot 9} = -5$$

$$x^5 - \frac{26}{3} = -5x$$

$$9^5 + \frac{26}{3} = -5 \cdot 9$$

$$\log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{x} \quad x^5 + 9^5 = -5(x+9)$$

$$x = \frac{1}{x} \quad x^5 + 5x = \frac{26}{3}$$

$$x = \frac{1}{0,5y} \quad 9^5 - x^5 + \frac{32}{3} = -5 \cdot (9 - x)$$

$$x \cdot y = \frac{1}{0,5y} = \frac{2}{y} = \frac{(9-x)(9-\dots)}{3} = -\frac{32}{3}$$

$\approx$

$$x(x^4+5) + 9(9^4+5) = 0$$
$$x = -9$$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 18 \quad N4$

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$

$\sin \alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5}$   
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$

$\frac{10}{15}$

$y - 6x = 18 - c$   
 $y = 6x + 18 - c$

$\frac{|b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} = 5$

$\frac{5}{2} = \frac{|6|}{|54a - 6|}$

$270 - 56 = 26$   
 $270 - 56 = -26$   
 $270 - 76 = 0$   
 $270 - 36 = 0$   
 $b = 90a$

$\log_{11} x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} x^{\frac{1}{72}} - 5$

$\frac{54a - 6}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} = 2$

$|54a - 6| =$   
 $= | -6 |$   
 $54a - 6 = 6$   
 $27a = 6$