



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1  
 Пусть  $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot x$ ;  $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot y$ ;  $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot z$ , где  $x, y, z \in \mathbb{N}$   
 Тогда:  $\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot x & (1) \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot y & (2) \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot z & (3) \end{cases}$  умножим (1), (2) и (3):  
 $a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot x y z$

Т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \Rightarrow$  в произведении  $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot x y z$  каждый множитель должен быть в четной степени.  $59 \cdot 2 \Rightarrow$  либо  $x$ , либо  $y$ , либо  $z$  кратно 3, то есть хотя бы 3.

Предположим, что какое-то из чисел  $x, y, z$  равно 3, а остальные равны 1. Тогда в произведении  $ab$  степень 3 равна 11, в  $bc = 13$ , в  $ac = 28$ .

Пусть  $a$  и  $b$  входят в степени  $k$ ,  $b$  и  $c$  в степени  $f$ ,  $a$  и  $c$  в степени  $p$ .

Тогда: (строим пример):  
 Пусть  $p = 3$   
 Тогда:  $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

Пусть  $a = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$ ;  $b = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^p$ ;  $c = 2^v \cdot 3^w \cdot 5^i$   
 Т.к. ровно одно из  $x, y, z$  равно 3, то в произведениях  $ab, bc, ac$  степени входящие 2 и 5 не поменялись. Получается система:

$$\begin{cases} d+k=6 & (4) \\ k+v=14 & (5) \\ d+v=16 & (6) \\ f+p=11 & (7) \\ p+i=13 & (8) \\ f+i=28 & (9) \end{cases}$$

$$(4)-(5): \begin{cases} d-v=-8 \\ d+v=16 \end{cases} \Rightarrow d=4 \Rightarrow v=12 \Rightarrow k=2$$

(Такая тройка подходит)

$$(7)-(8): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow i=15 \Rightarrow p=-2$$

Тогда  $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{-2}$ . Но тогда получается, что  $b \notin \mathbb{N}$ . Противоречие. Получается, что  $x y z = 25$  (т.к. степень двойки в  $a^2 b^2 c^2$  четная).

Если  $x=5$  и  $y=5$ :

$$\begin{cases} f+p=12 & (10) \\ p+i=14 & (11) \\ f+i=28 & (12) \end{cases}$$

$$(10)-(11): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13$$

$\downarrow$   
 $p=-1$   
 $\downarrow$   
 $b$  - снова менатурание

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad x = 25: \begin{cases} f+p=13 \\ p+i=13 \\ f+i=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=0 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{3} \quad y = 25 \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=15 \\ f+i=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=-4 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=12 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$$

Если мы будем брать  $y: 5$  или  $y: 25$  помети, что либо  $f$ ,  
либо  $p$  будет отрицательным

$$\textcircled{4} \quad z = 25 \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=13 \\ f+i=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=30 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-3 \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{5} \quad z = 5 \text{ и } x = 5: \begin{cases} f+p=12 \\ p+i=13 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-1 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{6} \quad z = 5 \text{ и } y = 5: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=14 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-3 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$$

Получается, что  $xyf$  не может быть кратно только  $5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xyf : 5^4$  (т.к. в  $a^2 b^2 c^2$  5 входит в чет. степени)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow xyf : 5^4 \cdot 3$ ,  $\Rightarrow xyf$  хотя бы  $5^4 \cdot 3$ .

Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$ ;  $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$

Заметим, что он удовлетворяет условию: Тогда

минимум  $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

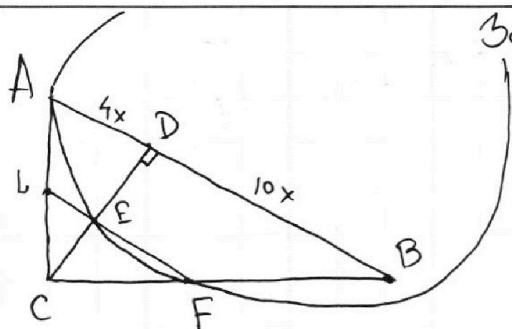
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} \Rightarrow AD = 4x, DB = 10x$$

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$AC = \sqrt{4x \cdot 14x} = 2x\sqrt{14}$$

$$CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{4x \cdot 10x} = 2x\sqrt{10}$$

EF || AB; ED - секущая  $\Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$  (по соотв.)

Пусть  $BC = a \Rightarrow AB = 2x\sqrt{14} - a$

$$\triangle CBE \sim \triangle CAD \Rightarrow \frac{4x}{BE} = \frac{2x\sqrt{14}}{a} \Rightarrow BE = \frac{4xa}{2x\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}$$

$$\triangle BEC - \text{пря.} \Rightarrow \text{по т. Пифагора: } CE = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} a$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB: \frac{EF}{10x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} a}{2x\sqrt{10}} \Rightarrow EF = \frac{10\sqrt{5} a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$LF = \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$AB^2 = LE \cdot LF$  (т.к. AC - касат.); A - т. касан, LF - секущая

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot a + a^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} a + a^2 - a^2 = 0$$

$$D = 16 \cdot 14a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16(a^2 - a^4) = 16 \cdot 14a^2 - 16 \cdot 14a^2 + 16 \cdot 14a^4 = 16 \cdot 14a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} \pm \sqrt{16 \cdot 14a^4}}{8 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14} \pm a^2\sqrt{14}}{28}$$

$$S_{ABC} = \frac{4x \cdot 2x\sqrt{10}}{2} = 4x^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}x^2$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot a = 0$$

$$x(4 \cdot 14x - 4a\sqrt{14}) = 0$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14}}{4 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14}}{14}$$

$$S_{ABC} = 4x^2\sqrt{10} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot 14 \cdot \sqrt{10}}{14^2} = \frac{4\sqrt{10} a^2}{14} = \frac{2\sqrt{10} a^2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\text{CEF}} = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{7}} \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{5}a^2}{2 \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{10}a^2}{2 \cdot 14}$$

$$\frac{S_{\text{ACD}}}{S_{\text{CEF}}} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{14} = \frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{\text{ACD}}}{S_{\text{CEF}}} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{28} = \frac{2 \cdot 28}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$= \frac{16}{10} = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$
$$-4\pi = 8x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$
$$-4\pi = 8x$$
$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\pi k + \beta, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \beta \in [0; 2\pi)$$

$$10 \arccos(\sin(2\pi k + \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\sin \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10(\frac{\pi}{2} - \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$5\pi - 10\beta = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$8\beta = -4\pi + 4\pi k$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \text{ получается, } \sin x = 0, \text{ либо } \sin x = 1, \text{ либо } \sin x = -1$$

①  $\sin x = 0$

$$10 \arccos 0 = 9\pi - 2x$$

$$5\pi = 9\pi - 2x$$

$$2x = 4\pi$$

$$x = 2\pi \quad (+)$$

②  $\sin x = 1$

$$10 \arccos 1 = 9\pi - 2x$$

$$10 \cdot 0 = 9\pi - 2x$$

$$x = \frac{9\pi}{2} \quad (+)$$

③  $\sin x = -1$

$$10 \arccos -1 = 9\pi - 2x$$

$$10\pi = 9\pi - 2x$$

$$2x = -\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad (+)$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$(2) (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

$x^2 + y^2 = 25$        $x^2 + (y+9)^2 = 4$

$$5x + 6ay - b = 0$$

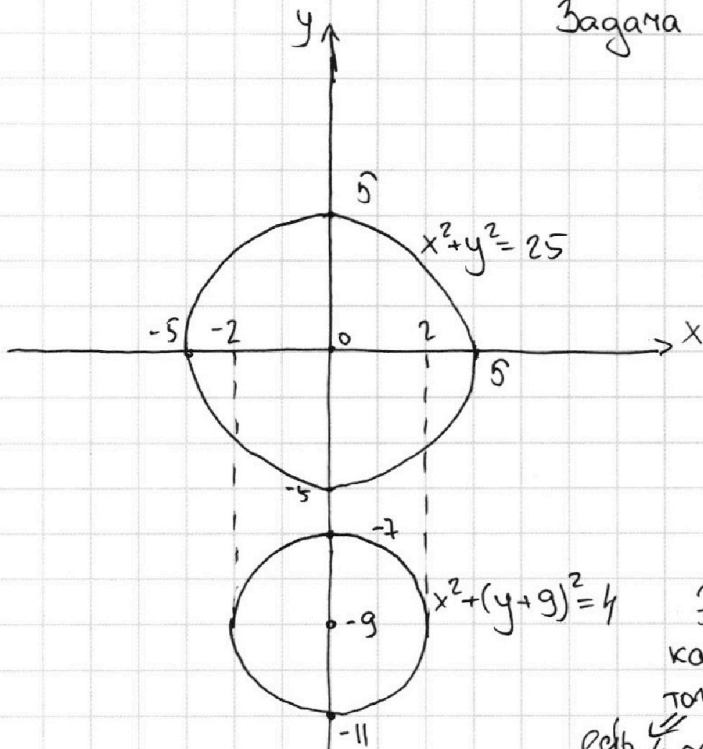
①  $a = 0$ . Пусть  $b = 0 \Rightarrow 5x = 0$   
 $x = 0$

← Это прямая, которая пересекает окр. из (2) в четырёх точках  $\Rightarrow$  где  $a = 0$  такой  $b$  есть 4 реш. существует.

② ~~как это~~  $a \neq 0$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$y = \frac{b - 5x}{6a}$  — это прямая, она должна пересекать окружности в четырёх точках.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3 121} \frac{1}{5} - 5 \quad \text{ОДЗ: } x > 0; x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_{11} x = a, a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$$

$$\frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad f(a) = 3a^5 + 15a - 16 \Rightarrow f'(a) = 15a^4 + 15$$

$$15a^4 + 15 = 0$$

Таких  $a$  нет  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$  имеет ~~одно~~ 1 решение (при  $a \neq 0$ )  
 $f(0) = -16, f(1) = 2 \Rightarrow 0$  где-то достигается)

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} \frac{1}{5} - 5 \quad \text{ОДЗ: } y > 0; y \neq 2$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{11} 0,5y = b, b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b, b \neq 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0 \quad g(b) = 3b^5 + 15b + 16, g'(b) = 15b^4 + 15$$

$$15b^4 + 15 = 0$$

Таких  $b$  нет  $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(b) \uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^5 + 15b + 16 = 0$  имеет ~~одно~~ одно решение  
( $f(0) = 16, f(-1) = -2 \Rightarrow 0$  где-то достигается).

Получается, что  $a+b$  определяется однозначно.

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad (1)+(2): 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$a+b=0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x = a \quad \log_{11} 0,5y = b$$

$$\log_{11} 0,5xy = a + b$$

$$0,5xy = \cancel{(a+b)} 11^{(a+b)}$$

$$xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$xy = 2 \cdot 11^0$$

$$xy = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a}$$

$$a^4 + \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = 0$$

$$a^4 + \frac{18+2}{3a} = 0$$

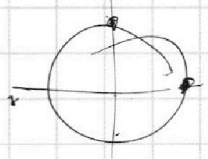
$$a^4 + \frac{-18+2}{3a} = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = 0$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = 0$$

$$10 \frac{\pi}{2} = 9\pi - 2x$$

$$\begin{aligned} 3a^5 &= 16 \\ a^5 &= \frac{16}{3} \\ a &= \sqrt[5]{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$



$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} 11^{-13} - 5$$

$$b = \log_{11} 0,5y$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$b^4 + \frac{3}{3b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$\sin \frac{9\pi}{3}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{3} \right)$$

$$\frac{15}{3}$$

$$\cos \left( \frac{3\pi}{6} - \frac{48\pi}{6} \right) = \cos -\frac{5}{3}\pi$$

$$\sin$$

$$\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{2\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} x &= 2\pi n + \beta \\ \frac{\pi}{2} - 3\pi &= 10 \arccos(\sin(2\pi n + \beta)) = 9\pi - 4\pi n - 2\beta \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = 10 \arccos(\sin \beta) = 9\pi - 4\pi n - 2\beta$$

$$\frac{\pi}{2} - x = n\pi + \beta \quad 10 \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$10 \arccos(\pi n)$$

$$\frac{m\pi}{a}$$



$$\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

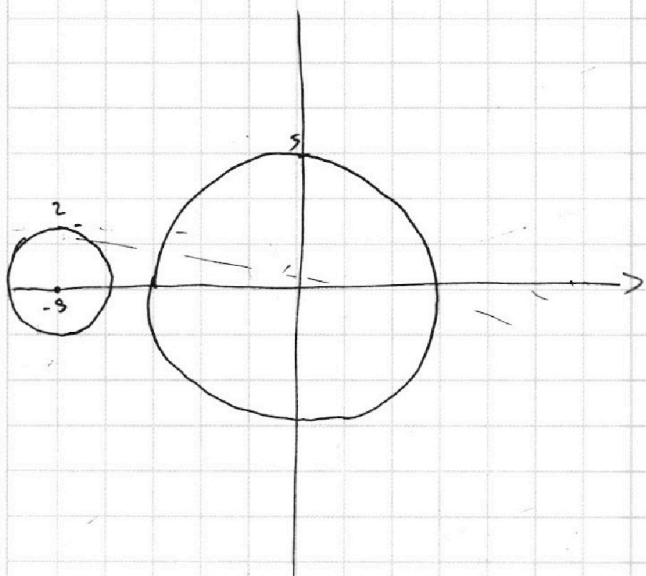
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 2^2$$

$$6ay - b + 5x = 0$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$-b + 5x = 0$$

$$5x = b$$

$$-5x + b = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} -2 < \frac{5 \cdot 9}{6a} + \frac{b}{6a} < 2 \\ -5 < \frac{b}{6a} < 5 \end{aligned} \right.$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$45 + b < 12a$$

$$b < 12a - 45$$

$$a < 0$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a} < 2$$

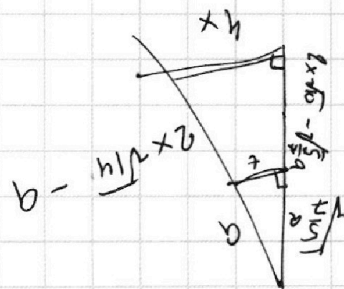
$$-12a > 45 + b > 12a$$

$$-12a - 45 > b > 12a - 45$$

$$2 \cdot \frac{b}{5} = \frac{b}{2.5} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{2b}{5} = x$$

$$\frac{4x}{2} = \frac{4 \cdot \frac{2b}{5}}{2} = \frac{4b}{5} = x$$

$$\frac{4x}{2} = \frac{4 \cdot \frac{2b}{5}}{2} = \frac{4b}{5} = x$$



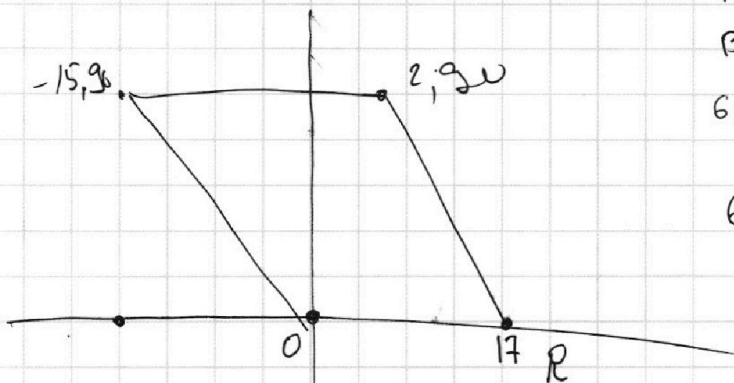
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



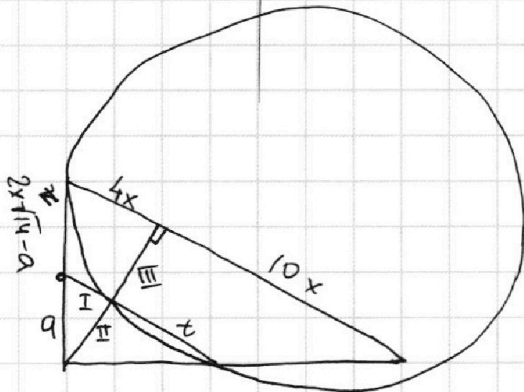
$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6x + y \leftarrow \cancel{6x} - 6x - y = 48$$

$$y = -6x + 48 - 6x - y,$$



$$4x \cdot 14x$$

$$2x\sqrt{14}$$

$$4x \cdot 10x$$

$$\textcircled{\text{IV}} 2x\sqrt{10} - \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\frac{\text{I}}{4x} = \frac{a}{2x\sqrt{14}}$$

$$\text{I} = \frac{4a}{2\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}$$

$$\text{II} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \sqrt{\frac{10a^2}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\frac{t}{10x} = \frac{\sqrt{\frac{5}{7}} a}{2x\sqrt{10}}$$

$$t = \frac{10\sqrt{5} a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\sqrt{5} a}{\sqrt{7}}$$

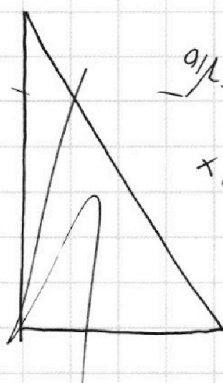
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

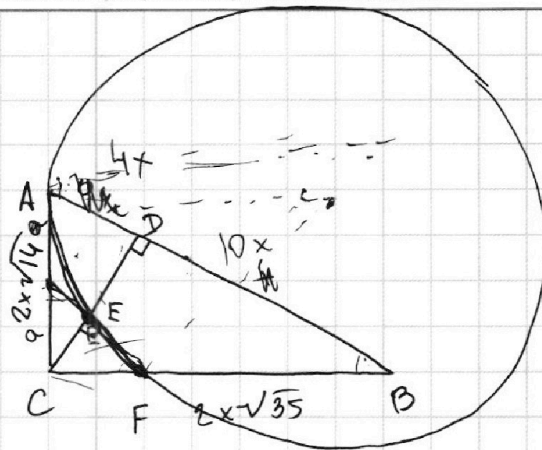
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten notes:  $0,1x, y$ ,  $0,1x, y$ ,  $x, 0,1x$



$$a = \log_{11} x \quad b = \log_{11} 0,5y$$

$$a + b = \log_{11} 0,5xy$$

$$0,5xy = 11^{a+b}$$

$$xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$40x^2 = 8x\sqrt{10}$$

$$\frac{2a}{3a} = \frac{18}{3a}$$

$$- \frac{16}{3a}$$

$$- \frac{2}{3} \log_{11} 11$$

$$5x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = -5$$

$$\frac{3b^5 + 16}{3b} = -5$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$3a^5 + 3b^5 + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$a+b=0$$

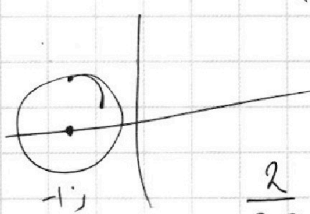
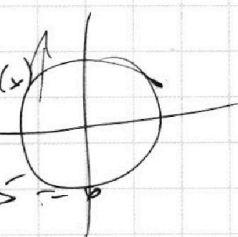
$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$3a^5 + 15a - 16 = f(x)$$

$$f'(x) = 15a^4 + 15$$

$$15a^4 + 15 = 0$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$



$$\frac{2}{3a} = \frac{18}{a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 \cdot 14 - 4xa\sqrt{14} + a^2 = \frac{4a^2}{14} \cdot \frac{49a^2}{14}$$

$$\cancel{4x^2 \cdot 14} \quad \cancel{4xa\sqrt{14}} \quad \cancel{a^2} \quad \cancel{a^4} = 0$$

$$D = 16a^2 \cdot 14 - 4 \cdot 4 \cdot 14(a^2 - a^4) =$$

$$= 16a^2 \cdot 14 - 16 \cdot 14a^2 + 16 \cdot 14a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} + 4a^2\sqrt{14}}{8 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28}$$

$$\boxed{\frac{4x \cdot 2x\sqrt{10}}{2} = 4x^2\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} a \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5} a \cdot 5a}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}} = 5\sqrt{5} a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos x = y$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos y = x$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos y$$

$$\arccos(\sin x) = y$$

$$\cos y = \sin x$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos^2 y = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 y + \cos^2 x = 1$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\cos(10 \arccos(\sin x)) = \cos(9\pi - 2x)$$

$\frac{\pi}{6}$

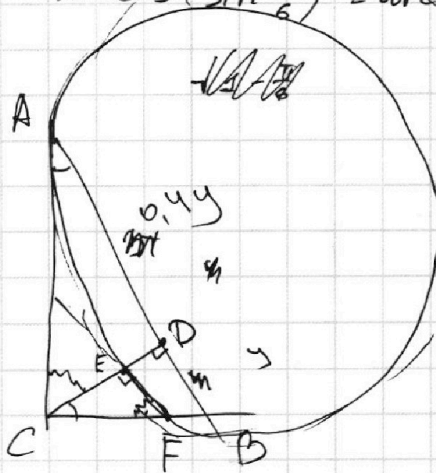
$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{6}$$

?



$$\frac{x+y}{y} = 1,4$$

$$x+y = 1,4y$$

$$x = 0,4y$$

$$\arccos \sqrt{1 - \cos^2 x} = y$$

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 y$$

$$\sin x = \cos y$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\arccos(\sin x) =$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

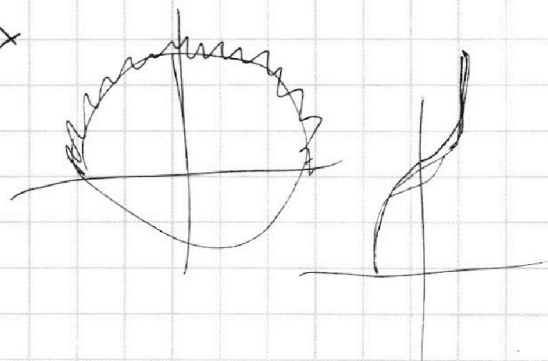
$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{6}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 ab &= 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k & \cdot 25 & & 21 \cdot 25 & & 1 \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot p & & & 21 & & 24 \\
 ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot v & & & 25 & & 28 \\
 a^2 b^2 c^2 &= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} & \cdot kpv & & 46 & & 52 \\
 & & & & 13 & & \\
 & & & & 59 & & \\
 abc &= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{20} & & & & & \\
 & & k=3 & & & & 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\
 ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \\
 a &= 5^f \quad b = 5^k \quad c = 5^L \\
 f+k &= 11 \\
 k+L &= 13 \\
 f+L &= 28 \\
 f-L &= -2 \\
 2f &= 26 \\
 f &= 13 \\
 L &= 15 \quad k = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+k &= 11 \\
 k+L &= 13 \\
 f+L &= 28 \\
 f-L &= 0 \\
 2f &= \\
 f &= \\
 f-L &= -4 \\
 f+L &= 28 \\
 2f &= 24 \\
 f &= 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+k &= 11 \\
 k+L &= 19 \\
 f+L &= 28 \\
 f-L &= -8 \\
 2f &= 20 \\
 f &= 10 \Rightarrow L = 9 \\
 k &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+L &= 11 \\
 L+f &= 17 \\
 f+p &= 28 \quad \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z & b &= 2^p \cdot 3^k \cdot 5^L & c &= 2^r \cdot 3^d \cdot 5^f \\
 x+p &= 6 & p+r &= 14 & x+r &= 16 \\
 y+k &= 14 & k+d &= 21 & y+d &= 25 \\
 z+L &= 11 & L+f &= 13 & z+f &= 28 \\
 \begin{cases} x-r &= -8 \\ x+r &= 16 \end{cases} & & 2x &= 8 \Rightarrow & x &= 4 & \Rightarrow & r &= 12 \\
 & & & & & & & & & p &= 2 \\
 y-d &= -7 & & & & & & & & z-f &= -2 \\
 y+d &= 25 & & & & & & & & z+f &= 28 \\
 2y &= 18 & & & & & & & & 2z &= 26 \\
 y &= 9 & \Rightarrow & d &= 16 & & & & & z &= 13 \Rightarrow & f &= 15 \\
 & & & & & & & & & & & & L &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{-2} \\
 b &= 4 \cdot 3^5 \cdot 0,25 \\
 b &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{-2} \\
 a &= 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \\
 c &= 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z-f &= -6 \Rightarrow z = 11 \\
 z+f &= 28 \\
 &\Downarrow \\
 L &= 0 \\
 &\Downarrow \\
 f &= 17
 \end{aligned}$$