МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$ab \vdots 2^9 \cdot 3^{19} \cdot 5^{10}$ $\quad (a \cdot b \cdot c)^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ $\quad (a \cdot b \cdot c)_{min} \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Докажем, что меньше быть не может

Допустим, что макс. степень 2, на которую делится abc, равна 20

$ab \vdots 2^9$, т.е. макс. степень 2, на которую может делится c, равна 11

$bc \vdots 2^{14}$, т.е. макс. степень 2, на которую может делиться a, равна 6

$11 + 6 = 17 < 19 \Rightarrow ac \not\vdots 2^{19}$ – не может быть

$abc \vdots 2^{21}$:

$ab \vdots 2^9 \Rightarrow c \vdots 2^{12}$

$bc \vdots 2^{14} \Rightarrow a \vdots 2^7$

$12 + 7 = 19 \Rightarrow ac \vdots 2^{19}$

Аналогично для степеней 3 и 5

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

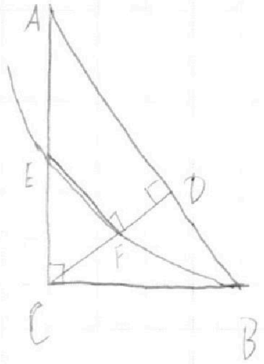
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.



$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$; Пусть $AD = 3x$; $DB = x$

$CD^2 = AD \cdot DB$; $CD = x\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 2x$ $\qquad AB = 4x$

$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

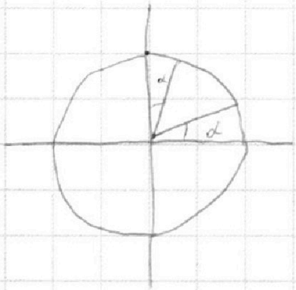
№3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

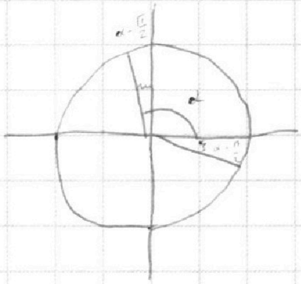
$5\arcsin(\cos x) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$



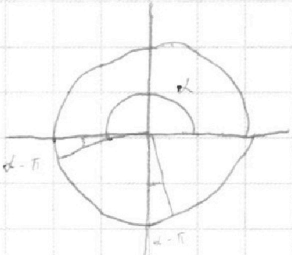
I чет:

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$



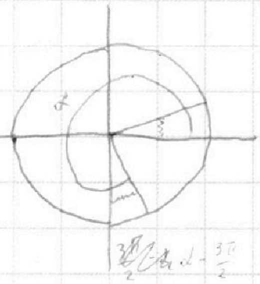
II чет:

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$



III чет:

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$



IV чет:

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

Рассмотрим уравнения на разных отрезках x:

$x \in [-3\pi; -2\pi]$ (III и IV чет)

$5\arcsin(\sin(x + \frac{5\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$

$4x = -12\pi$

$x = -3\pi$

$x \in [-2\pi; -\pi]$ (I и II чет)

$5\arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = -8\pi; \quad x = -\frac{4\pi}{3}$

$x \in [-\pi; 0]$ (III и IV чет)

$5\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(x + \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$

$x + \frac{\pi}{2} = 0; \quad x = -\frac{\pi}{2}$

$x \in [0; \pi]$ (I и II чет)

$5\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$

~~$x \in [0; 2\pi]$~~

$x \in [\pi; 2\pi]$ (III и IV чет)

$5\arcsin(\sin(x - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$

$4x = 8\pi; \quad x = 2\pi$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. (начало)

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \quad (1) \\ x^2+y^2-12x+32=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $x^2+y^2-9=0$

$x^2+y^2=9$

Ур-е окр-ти с центром (0;0) и радиусом 3

(2) $x^2+y^2-12x+32=0$

$(x-6)^2+y^2-36+32=0$

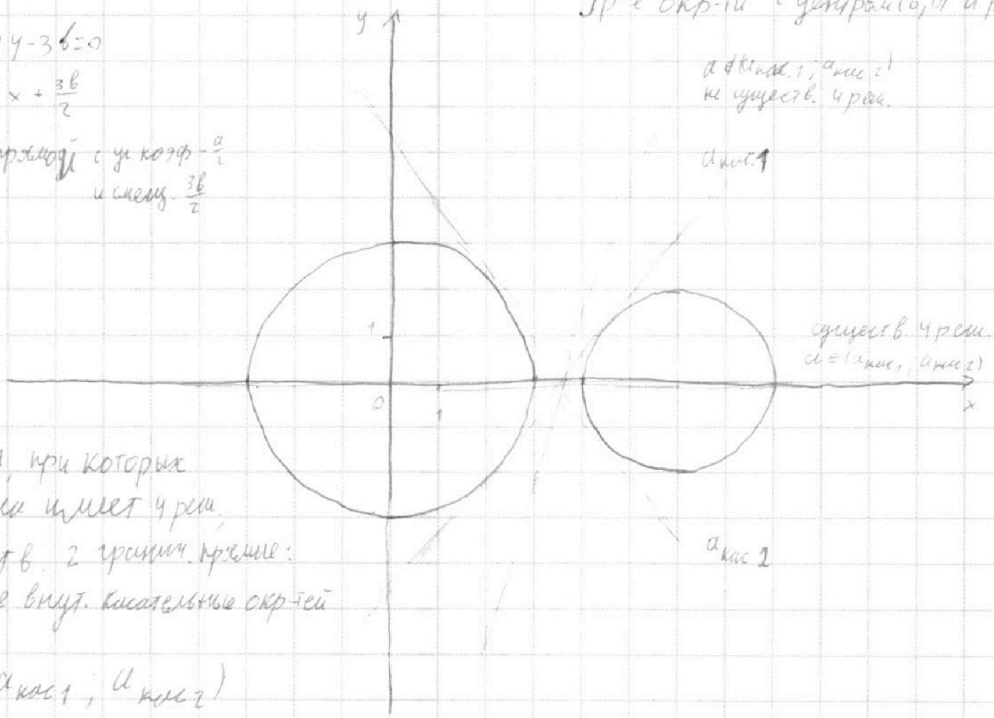
$(x-6)^2+y^2=4$

Ур-е окр-ти с центром (6,0) и рад. 2

$ax+2y-3b=0$

$y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$

Уравн. прямой с уг. коэф. $-\frac{a}{2}$ и смещ. $\frac{3b}{2}$



Для a, при которых система имеет 4 реш.
Существ. 2 гранич. прямые:
2 общие внут. касательные окр-тей

$a \in (a_{кас 1}, a_{кас 2})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (продолжение 1)

Найдём $a_{\text{кас}\,1}$

Данная прямая касается первой окр-ти снизу, и второй - сверху

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}=-\sqrt{9-x^2} \quad (3) \\ -\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}=\sqrt{4-(x-6)^2} \quad (4) \end{cases}$$

$(3)\quad \frac{a^2}{4}x^2-\frac{3ab}{2}x+\frac{9b^2}{4}=9-x^2$

$\left(\frac{a^2}{4}+1\right)x^2-\frac{3ab}{2}x+\left(\frac{9b^2}{4}-9\right)=0$

$D=\frac{9a^2b^2}{4}-4\left(\frac{a^2}{4}+1\right)\left(\frac{9b^2}{4}-9\right)=\cancel{\frac{9a^2b^2}{4}}-\cancel{\frac{9a^2b^2}{4}}-9b^2+9a^2+36=9(a^2-b^2+4)$

Условие касания: $D=0$: $a^2-b^2+4=0$ $\qquad x=\frac{\frac{3ab}{2}}{2\left(\frac{a^2}{4}+1\right)}=\frac{3ab}{a^2+4}$

$(4)\ \frac{a^2}{4}x^2-\frac{3ab}{2}x+\frac{9b^2}{4}=4-x^2+12x-32$

$\left(\frac{a^2}{4}+1\right)x^2-\left(\frac{3ab}{2}+12\right)x+\left(\frac{9b^2}{4}+32\right)=0$

$D=\frac{9a^2b^2}{4}+36ab+144-4\left(\frac{a^2}{4}+1\right)\left(\frac{9b^2}{4}+32\right)=\cancel{\frac{9a^2b^2}{4}}+36ab+144-\cancel{\frac{9a^2b^2}{4}}-9b^2-32a^2-128=$
$=-32a^2-9b^2+36ab+16$

$D=0$: $-32a^2-9b^2+36ab+16=0$

$$\begin{cases} a^2-b^2+4=0\ ;\ b^2=a^2+4 \\ -32a^2-9b^2+36ab+16=0 \end{cases}$$

~~$-32a^2-9a^2-36+36a\sqrt{a^2+4}+16=0$~~

~~$-41a^2+52+36a\sqrt{a^2+4}=0$~~

~~$36a\sqrt{a^2+4}=41a^2-52$~~

~~$\begin{cases} a^2>\frac{52}{41} \\ 1296a^4+5184a^2=1681a^4-4264a^2+2704 \end{cases}$~~

~~$385a^4-9448a^2+2704=0$~~

~~$\frac{D}{4}=$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение 2)

$$\begin{cases} b^2 = a^2+4 \\ 32a^2+9b^2-36ab-16=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 6a=b \\ 6a=5b, \quad b=\frac{6}{5}a \end{array}\right.$$

$(9b^2-36ab+36a^2)-4a^2-16=0$

$(3b-6a)^2-4a^2-16=0$

$(3b-6a)^2-4b^2=0$

$(3b-6a-2b)(3b-6a+2b)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 36a^2=a^2+4; \quad a=\pm\frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{36}{25}a^2=a^2+4; \quad a=\pm\frac{10}{\sqrt{11}} \end{array}\right.$$

$a_{кас 1}: -\frac{a}{2}>0 \Rightarrow a<0$

$\begin{cases} a=-\frac{2}{\sqrt{35}} \\ b=-\frac{12}{\sqrt{35}} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-\frac{10}{\sqrt{11}} \\ b=-\frac{12}{\sqrt{11}} \end{cases}$

$a_{кас 1}$ должно соответствовать внут. касательной, т.е. $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$

$y=0: x\in(3;4)$

$\frac{x}{\sqrt{35}}-\frac{18}{\sqrt{35}}=0 \qquad \frac{5x}{\sqrt{11}}-\frac{18}{\sqrt{11}}=0$

$x=18\notin(3;4) \qquad x=3,6\in(3;4)$

$a_{кас 1}=-\frac{10}{\sqrt{11}}$

Как можно заметить по графику, обе касательные симметричны относительно оси OX (т.к. центры окружностей лежат на этой оси), а это значит, что $a_{кас 2}=-a_{кас 1}=\frac{10}{\sqrt{11}}$

$a\in\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} - 8$

Замена $\log_3 x = t \neq 0$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\log_3(5y)} - 8$

Замена $\log_3(5y) = s \neq 0$

$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{11}{2s} - 8$

$s^4 - \frac{7}{2s} + 8 = 0$

$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right) = 0$

$(t^4 - s^4) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$

$(t^2+s^2)(t+s)(t-s) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$

$(t+s)\left((t^2+s^2)(t-s) + \frac{7}{2ts}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t+s=0 \\ 2ts(t^2+s^2)(t-s)+7=0 \end{array}\right.$$

$2t^4s - 2t^3s^2 + 2t^2s^3 - 2ts^4 + 7 = 0$

нет решений

$t+s=0$; $\log_3(5xy)=0$

$5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

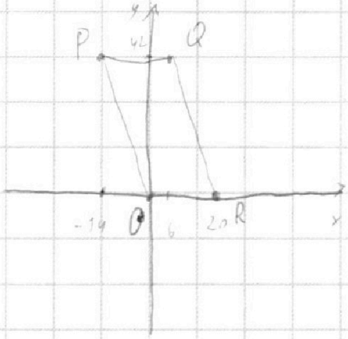
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.



$tg\,\widehat{ORQ} = \frac{42}{20-6} = 3$

Т.е. на сторонах PO и QR расстояние по оси OY между соседними 2 точками с целочисленными координатами равно 3

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$ когда $y=0$: $x_{min} = 0$ $x_{max} = 20$; когда $y=1$: $x_{min}=0$ $x_{max}=19$; когда $y=2$: $x_{min}=0$ $x_{max}=19$

$n = \big(\underbrace{(20-11+1)+(19-11+1)+(19-11+1)}_{=28}\big)\left(\frac{42}{3}\right) + \underbrace{(20-11+1)}_{=10} = 402$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 3 \end{cases}$ когда $y_A=0$: $x_{min A} = 0$ $x_{max B} = 19$; когда $y_A=1$: $x_{min A}=0$ $x_{max B}=18$; когда $y_A=2$: $x_{min A}=0$ $x_{max B}=18$

$n = \big(\underbrace{(19-10+1)+(18-10+1)+(18-10+1)}_{=28}\big)\left(\frac{42}{3}-1\right) + \underbrace{(19-10+1)}_{=10} = 374$

. . .

$\left(x_{max B} = 20 - \frac{33}{3}\right)$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 33 \end{cases}$ когда $y_A=0$: $x_{min A} = 0$ $x_{max B} = 9$; когда $y_A = 1$ $x_{min A}=0$ $x_{max B}=8$; когда $y_A=2$ $x_{min A}=0$ $x_{max B}=8$

$n = \big(\underbrace{(9-0+1)+(8-0+1)+(8-0+1)}_{=28}\big)\cdot\left(\frac{42}{3}-11\right) + \underbrace{(9-0+1)}_{=10} = 94$

Найдя закономерность, получим: $n = 28\cdot(14-k)+10$, где $k = \frac{y_2-y_1}{3}$

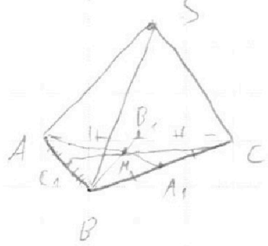
$k \in [0; 11]$; $k \in \mathbb{Z}$

$N_{общ} = 28\cdot 14\cdot 12 - 28\cdot\frac{11\cdot 12}{2} + 10\cdot 12 = 12(392-154+10) = 12\cdot 248 = 2976$

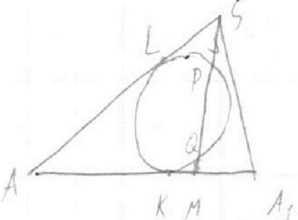
кол-во пар A и B

Ответ: 2976.

N 7



Рассмотрим плоскость (ASA_1):



$AL = AK$ как касательные к одной окр-ти из одной точки

$LS^2 = SP \cdot (SP + PQ)$

$KM^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$ (по теор. о кас. и сек.)

$SP = MQ \Rightarrow LS = KM$

$AS = AM = 12$

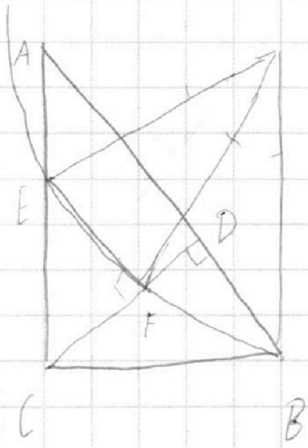
$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1}$ (по св-ву медиан) $\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

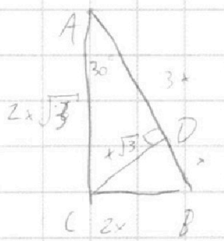
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$



$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

$x_{max} - x_{min} = 34$

$y_{max} - y_{min} = 42$ $(x_{max} - x_{min}$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$ $n = (20 \cdot 11 + 1) \cdot 42 = 43^{\circ}$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 1 \end{cases}$ $n = (20$

42 ↑

14 →

$3 \cdot 2a^2 + 9b^2 + 36ab + 16 = 0$

$\sqrt{4} \cdot 24$

$4 \cdot 224$

$\overline{46}$

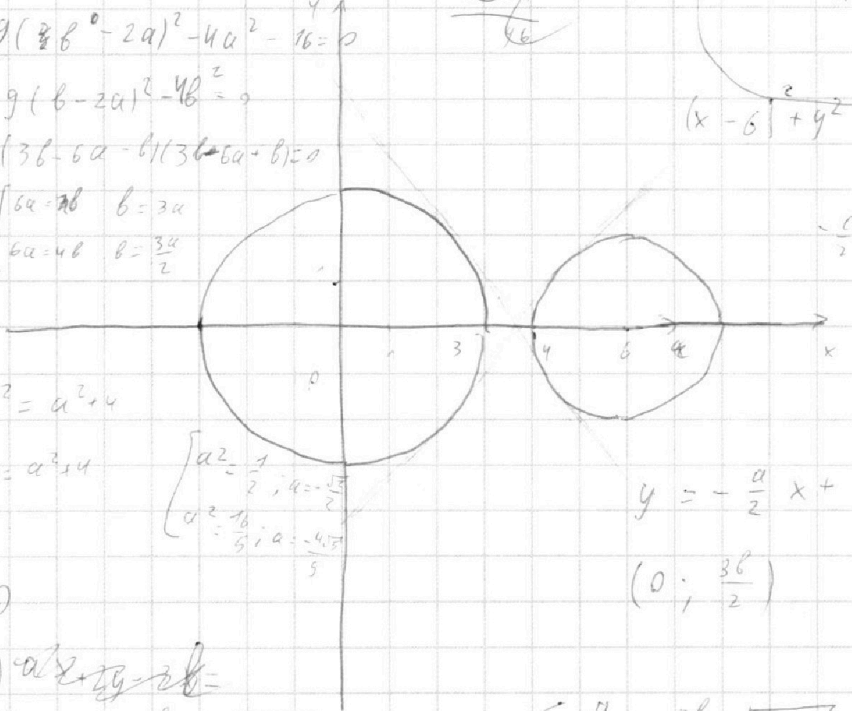
$9(\frac{4}{3}b - 2a)^2 - 4a^2 - 16 = 0$

$9(b - 2a)^2 - 4b^2 = 0$

$(3b - 6a - b)(3b - 6a + b) = 0$

$\left[\begin{array}{ll} 6a = 2b & b = 3a \\ 6a = 4b & b = \frac{3a}{2} \end{array}\right.$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$



$-\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = 0$

$x = \frac{3b}{a}$

$x \in (3, 4)$

$\left[\begin{array}{l} 9a^2 = a^2 + 4 \\ \frac{9a^2}{4} = a^2 + 4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{2};\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = \frac{16}{5};\ a = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$(0; \frac{3b}{2})$

$x > -3\sqrt{2}b$ $x > -\frac{3\sqrt{5}}{2}b$

$b < -3$ $b < -3$

$x > 9\sqrt{2}$ $x > \frac{9\sqrt{5}}{4}$

$2 < \sqrt{5} < 3$

$12 < 4\sqrt{3} < 27$

$a < 0$

1) ~~$ax + 2y - 3b =$~~

$\left[\begin{array}{l} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4 - (x+6)^2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4 - (x+6)^2} \end{array}\right.$

$x = \frac{\frac{3}{2}ab}{\frac{a^2}{4} + 1}$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{4}b}{\frac{9}{8}}$

$= b \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{9} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}b$

$D = 0$ везде

между

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

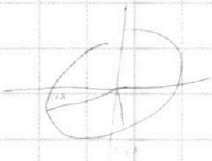
Черновик

№1

$(abc)^7 \vdots 2^{47} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$(abc)_{min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}$



$\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{s^4}\right) + \frac{7}{2}(s+t) = 0$

№5

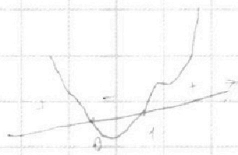
$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_3 x} - 8$

$\log_3 x = t \neq 0$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \mid \cdot t$

$t^5 - 6 - \frac{5}{2} + 8t = 0 \mid \cdot 2$



$2t^5 + 16t - 17 = 0$

$\sqrt[4]{128}$

$2t^5 + 16t - 7 = 0$

$256\sqrt{128} \quad 16\sqrt{128}$

$t^4 + \frac{17}{2t} + 8 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t+s=0 \\ (t-s)(t^2+s^2) + \frac{7}{2ts} = 0 \end{array}\right.$

$a^4 - a^3 - a^2 - a + \frac{7}{2s^5} = 0$

$a(a-1)(a^2-1) = -\frac{7}{2s^5}$

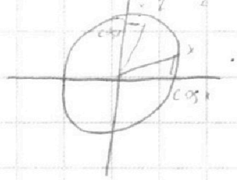
$t^3 - t^2s + ts^2 - s^3 = -\frac{7}{2ts}$

$t^4s - t^3s^2 + t^2s^3 - ts^4 = -\frac{7}{2}$

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

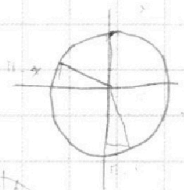


$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi$

$x = \frac{\pi}{3}$



$x = y + 2\pi k$

$5\arcsin(\cos y) = y + \frac{\pi}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y \in [0;\pi): 5\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = y + \frac{\pi}{2} \\ y \in [-\pi; 0): 5\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = y + \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2\log_3(5y)} - 8$

$\log_3(5y) = s \neq 0$

$\left[\begin{array}{l} y \in [0;\pi): y = \frac{\pi}{3} \\ y \in [-\pi; 0): y = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{11}{2s} - 8$

$s^4 - \frac{7}{2s} + 8 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$

$(t^4 - s^4) + ($

$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right) = 0$

$(t-s)(t^3 + t^2s + ts^2 + s^3)$

$(t+s)(t^2+s^2)(t-s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$

$(t+s)\left((t-s)(t^2+s^2) + \frac{7}{2ts}\right) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

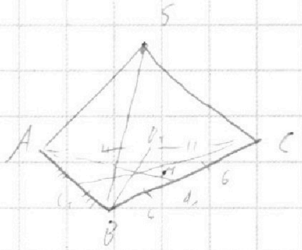
$2ts(t^2+s^2)(t-s)+7=0$

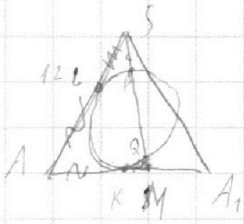
$2t^4s-2t^3s^2+2t^2s^3-2ts^4+7=0 \; | : s^5$

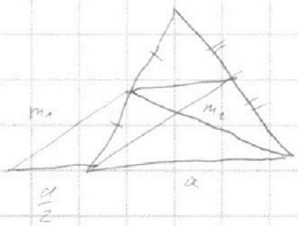
$2\left(\frac{t}{s}\right)^4-2\left(\frac{t}{s}\right)^3+2\left(\frac{t}{s}\right)^2-2\left(\frac{t}{s}\right)+\frac{7}{s^5}=0$

Замена: $\frac{t}{s}=k\neq 0$, $\frac{7}{s^5}=a$

$2k^4-2k^3+2k^2-2k+a=0$







$AM=12$

$AA_1=18$

$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 6\sin$