



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, & \delta = \frac{7b-x}{3a} \text{ и } \frac{7b-x}{3a} - \frac{x}{3a} \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ (\lambda^2 + 7)^2 + \delta^2 - 4 \quad (\lambda^2 + \delta^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{1}$

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24} \quad (1)$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad (3)$$

$$(1) \cdot (2); (2) \cdot (3); (3) \cdot (1):$$

$$abc \cdot b : 2^{20} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}$$

$$abc \cdot c : 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61} \quad (X)$$

$$abc \cdot a : 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}$$

$$(abc)^4 : 2^{68} \cdot 3^{86} \cdot 5^{150}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{21,5} \cdot 5^{37,5}$$

т.к.  $abc$  - натуральное, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{но } abac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

пример:

$$a = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$\text{ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

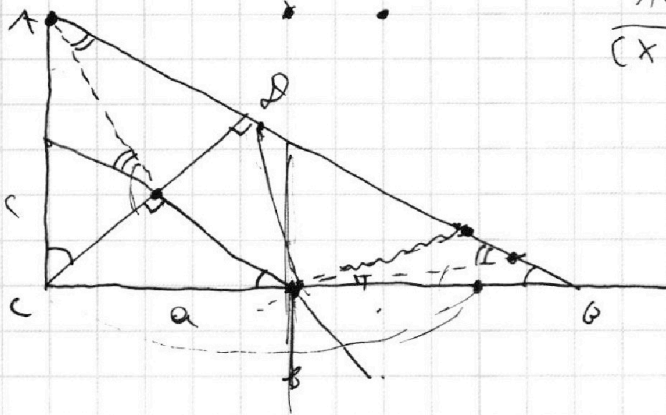
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CX} = \frac{\sqrt{10}a}{\sqrt{10}a}$$

$$\frac{(10n^2 + a^2)}{10n^2 + b^2} = \frac{10n^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot 10n^2}$$

$$10n^2 \cdot a^2 + a^4 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$(10n^2 + b^2)b^2 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$a^4 + 10n^2 \cdot a^2 + 10n^2 a^2 =$$

$$\frac{3^2 + 10^2}{10 + 100}$$

$$\frac{10n + a}{10n + b} = \frac{10n}{b} =$$

$$10bn + ab = 10n^2 + 10nb$$

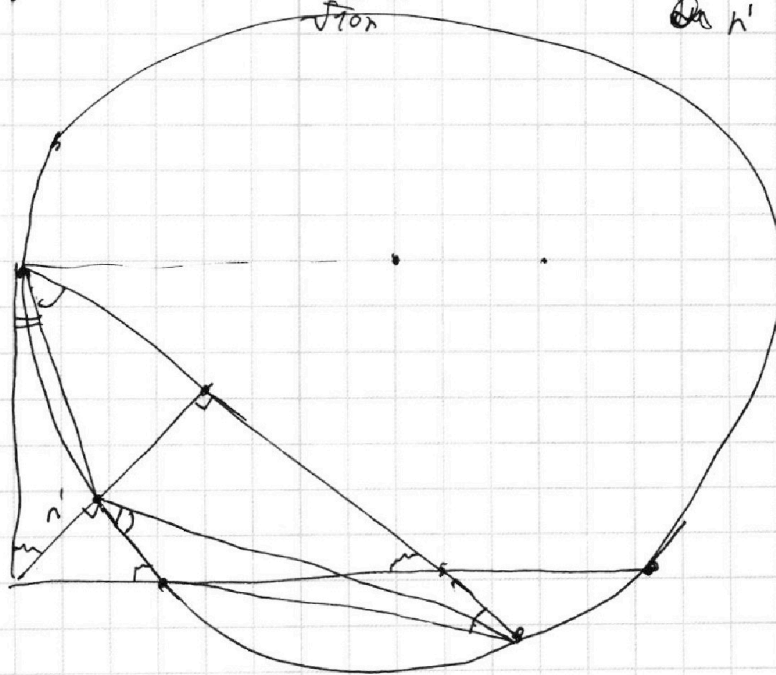
$$ab = 10n^2$$

$$\frac{c}{\sqrt{10}n} = \frac{a}{a}$$

$$\frac{\sqrt{30}n}{a} = \frac{\sqrt{10}n}{EF} = \frac{13n}{a}$$

$$\frac{27}{a} = 3$$

$$\frac{76}{3a}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ + 576 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 576 \\ 25 \\ \hline 2880 \\ 1752 \\ \hline 14400 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{10n}{EF} = \frac{\sqrt{130}n}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \frac{3x^2 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{13})^2}{380 \cdot x^2}$$

$$= \frac{3(10 + 13 + 2\sqrt{130})}{130} = \frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$$

расп. точек.  
в остальных случаях раздм-  
рается аналогично

ответ.  $\frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \frac{AO}{OB} = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{3}{10}, \text{ пусть } AO = 3x, \text{ тогда } OB = 10x$$

$$6) \triangle AOC - \text{прямоугольный, } \angle C - \text{остро-} \\ \text{угол} \Rightarrow OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{30^2 - 9^2} x$$

$$7) \triangle AOC: \angle COA = 90^\circ, \text{ значит} \\ AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{30^2 + 9^2} = \sqrt{39} x$$

$$8) \triangle COB: \angle COB = 90^\circ, \text{ значит} \\ CB = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{30^2 + 100^2} x = \sqrt{130} x$$

$$9) \frac{EC}{CB} = \frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{10}}, \text{ и}$$

$$EC = \sqrt{\frac{3}{10}} CB, \quad CB = \sqrt{\frac{10}{3}} EC.$$

$$10) CF = CB - FB = \sqrt{130} x - \frac{\sqrt{10}}{3} EC$$

$$11) \triangle FEC \sim \triangle OBC \quad (EF \parallel AO): \text{ значит}$$

$$\frac{FC}{EC} = \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{30^2 + 9^2} x}{\sqrt{30^2 + 100^2} x} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{130}}$$

$$FC \cdot \sqrt{3} = EC \cdot \sqrt{13}$$

$$\sqrt{390} x - \sqrt{10} EC = \sqrt{13} EC.$$

$$EC = \frac{\sqrt{390} x}{\sqrt{10} + \sqrt{13}}$$

$$12) \triangle AOC \text{ и } \triangle CFE: \angle E = \angle O = 90^\circ; \angle A = \angle FCE \\ \text{значит } \triangle AOC \sim \triangle CFE \text{ (по 2 углам)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

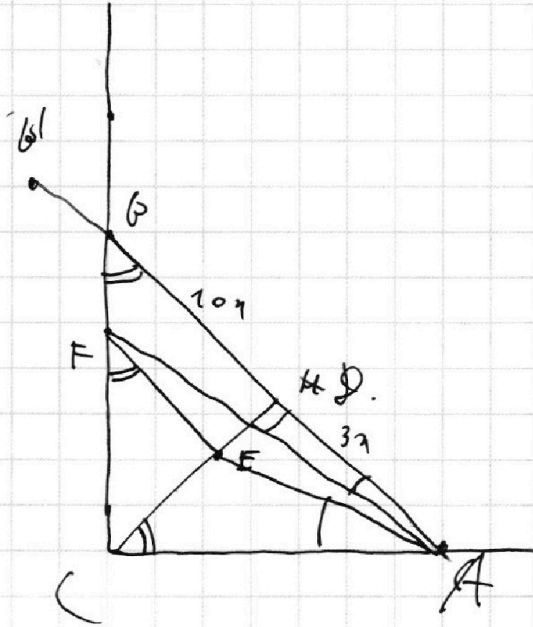
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



решение:

1) пусть  $AB \cap BC = B'$ , тогда  $B'A E F$  —  $BF$  —  $BW$   
трапеция, тогда она  $PLD \Rightarrow \angle AB'E =$   
 $= \angle B'AF$  (в силу не св-ства  $PLD$  трап.)

2)  $BW$ :  $W$  касат.  $BA$ ,  $\angle AB'E$  отражено  
по  $AB$   $BW \Rightarrow \angle AB'E = \angle WAE = \angle B'AF = \alpha$ .

3) пусть  $\angle CBA = \beta$ , тогда  $\angle ECA = \beta$  тоже.

4)  $\triangle AEC$  и  $\triangle AFB$ :  $\angle CAF = \angle EAC = \alpha$ ,  $\angle C = \angle ECA = \beta$   
 $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$  (по 2 углам)  $\frac{EC}{FB} = \frac{AC}{AB}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos \sin x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$I \arccos \sin x \in [0; \pi]$$

$$5 \arccos \sin x \in [0; 5\pi]$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$I \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x, \text{ если } \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi = 6x$$

$x = \frac{5\pi}{6}$  - не подходит

$$II \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi; \text{ если } \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \leq \pi$$

$$II \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$III \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{25\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ - не подходит при } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$IV \arccos \sin x = x + \frac{3\pi}{2} \text{ при } x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$V \arccos \sin x = x - \frac{5\pi}{2} \text{ при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$VI \arccos \sin x = -\frac{3\pi}{2} - x \text{ при } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0 - \frac{\pi}{2}\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\text{II} \quad 5x - \frac{5\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 8\sqrt{c}$$

$$\underline{x = \sqrt{c}} \quad \in [0; \sqrt{c}]$$

$$\text{IV} : 5x + \frac{15\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = -\frac{12\sqrt{c}}{2} < ; x < 0 \Rightarrow x \notin \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}; \frac{7\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$\text{V} \quad 5x - \frac{25\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 28\sqrt{c}$$

$$x = \frac{7\sqrt{c}}{2} \quad \in \left[-\frac{\sqrt{c}}{2}; 0\right]$$

$$\text{VI} \quad 6x = -\frac{15\sqrt{c}}{2} - \frac{3\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -\frac{18\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -9\sqrt{c}$$

$$\underline{x = -\frac{3\sqrt{c}}{2}} \quad \in \left[-\frac{3\sqrt{c}}{2}; -\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\sqrt{c}}{2}; \sqrt{c}; \frac{\sqrt{c}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

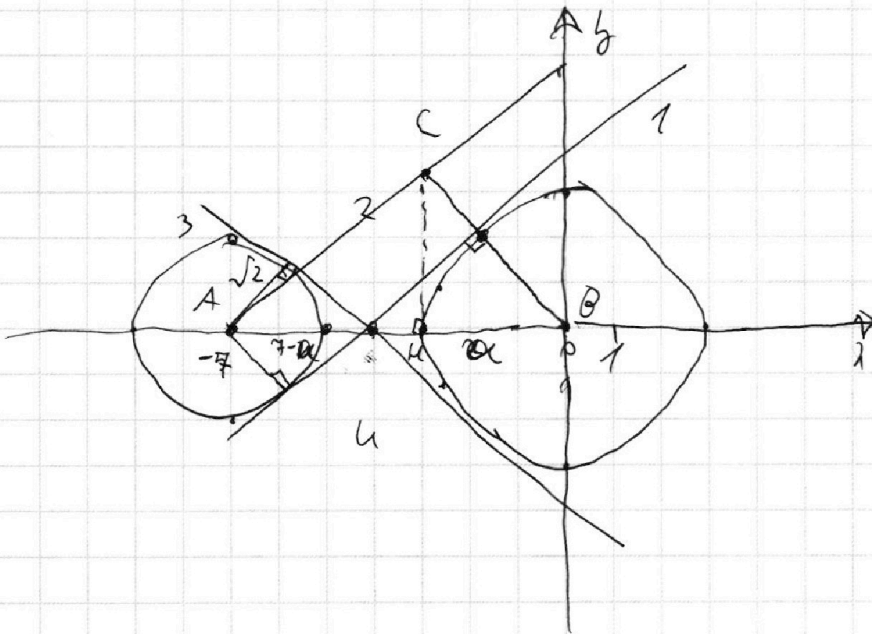
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

решение второй системы - 2 окр  
с центром в  $(-7; 0)$  и радиусом 2 и с центром в  
 $(0; 0)$  и радиусом 3.



$x + 3ay - 7b = 0$  - касательная к окружности,

$$x = 7b - 3ay; \quad 7b - 3ay = R \cdot F(x)$$

найдем, когда такая прямая имеет

и  $n$  пересек с окр: если только

проведем 2 общие <sup>вм</sup> касательные, они

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$\cos \angle P \neq A = \cos \angle P < A = \frac{5}{\sqrt{24}} = k, \text{ где } k - \text{гран}$$

меньше этой прямой, поэтому  
укажем наклонные угловые координаты  
прямых  $\frac{5}{\sqrt{24}}$  и  $(-\frac{5}{\sqrt{24}})$  в одну симметричную

~~меридиан~~ ~~наклон~~  $y = \frac{76-x}{3a} = \frac{76}{3a} - \frac{x}{3a}$

$$\text{н. л. } \begin{cases} -\frac{1}{3a} \leq \frac{5}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{3a} \geq -\frac{5}{\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{a} \geq \frac{-75}{-\sqrt{24}} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{45}{-\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} a \leq \frac{\sqrt{24}}{15} \\ a \geq \frac{\sqrt{24}}{-15} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

~~Ответ при  $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; \frac{\sqrt{24}}{15})$ .~~

Ответ: при  $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; 0) \cup (0; \frac{\sqrt{24}}{15})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) = \frac{3}{2} \log_7 6x + 2 \log_7 6x - 4 \\ \log_7^4(y) = \frac{5}{2} \log_7 y - 6 \log_7 y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2} \log_7 6x - 4 = \log_7^4(6x) & (1) \\ -\frac{7}{2} \log_7 y - 4 = \log_7^4(y) \end{cases}$$

$$\frac{7}{2} (\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$
$$\log_7 6x + \log_7 y = 0$$

$$\frac{\log_7 y + \log_7 6x}{\log_7 6x \cdot \log_7 y} = 0$$

$$\log_7 (y + 6x) = 0$$

$$6xy = 7^0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и прямые  $g$  параллельные прямые  
и вертикаль  $h$  имеют равные  
и тогда все прямые  $A$  имеют  
на левой стороне  $h$ , все  $B$  на  
правой и для  $A$  и  $B$  - любые  
из пары из точек эти прямые  
(целые координаты) (все  $A$  слева, т.к.  
мы их вычитали, а  $B$  справа).

всегда  $\geq 0$  т.к. они внутри парам  
и так, т.к. все медленные  
прямые имеют  $h$   $h = 4$ , то

на прямой  $Ox$  они проходят  
через все точки  $\frac{p}{4}$ ; где  $p \in [0; 18 \cdot 4]$

и  $p$  - целое (это очевидно из того  
что  $y_x = k + 4n_x$ , где  $k$  - целое)

теперь выберем 2 прямые из  
того семейства.

$$\begin{cases} y = -4x + a = f(x) \\ y = -4x + b = g(x) \end{cases}$$

$g(0) - f(0) = b - a$ , - искомого  
разности вертикальных  
линий.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что нам кардинально  
уменьшится время с помощью.

OK и OP с уравнениями  $y=x$  и  $xy=-4x$   
соответственно:

пусть  $y$  нас интересует

$$x_1 \text{ и } y_1, \text{ тогда } -(4x_1 + y_1) = k \text{ с } 0 \leq k \leq c.$$

$$4x_2 + y_2 = 40 - c.$$

$$y_2 = 40 - c - 4x_2 \text{ т. е. при } k \text{ заданном } c.$$

~~Итак как во время работы  
мы через координаты внутри паралле-  
лограммы это время пройдет  
так-то где  $x_1, y_1$ . то есть где  
каждой паре  $x_1, y_1$  точки с целыми  
координатами  $x_1, y_1$  все нужное  
в момент на 1-ей прямой, параллель-  
ной стороне, и где  $k$  тем выше.  
тогда задача сводится к водо-  
ру 2 прямой из всевозможных~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все наши прямые в точке  $O$  имеют  
целое значение от 0 до  $44018 \cdot 4$ .

(т.к. уравнение прямой имеет вид  $y = -4x + 18 \cdot 4$ )

Итак, перейдем теперь кал-во

целых точек прямой  $y = -4x + k$

внутри параллелограмма в зависимости  
места от  $k$ , заметим, что при

единичном отступе при движении  
по  $x$  и  $y$   $k$  это значение единично.

1)  $k=0$  - 17 точек ( $\frac{68}{4}$ )

2)  $k=1$  - 16 точек.

3)  $k=2$  - 16 точек.

4)  $k=3$  - 16 точек

Итак, кал-во возможных пар  $($

(разность в  $40$ ) - 37.

прямых из них со свободными членами

кратными  $4$  - 10 на каждой из них по

$4 \cdot 17$  внутренних точек, но оставшаяся по 16

$\Rightarrow$  всего  $17 \cdot 17 \cdot 10 + 16 \cdot 16 \cdot 27 = 7026 + 6812 + 2380 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

= 9302

ответ: 9302.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 88 - 4 \cdot 16 \cdot 10}}{4} = \frac{\sqrt{200 + 704 - 160}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{744}}{4} = \frac{\sqrt{186}}{2}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 \cdot 2 - 4 \cdot 88}}{4} = \frac{\sqrt{550 + 80 - 88}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{42}}{2}$$

иногда.

$$A_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 15 \cdot \frac{\sqrt{42 \cdot 186}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \cdot \sqrt{21 \cdot 83}}{2} =$$
$$= \frac{45 \cdot \sqrt{17 \cdot 31}}{2} = \frac{45}{2} \sqrt{217}$$

ответ:  $\frac{45}{2} \sqrt{217}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

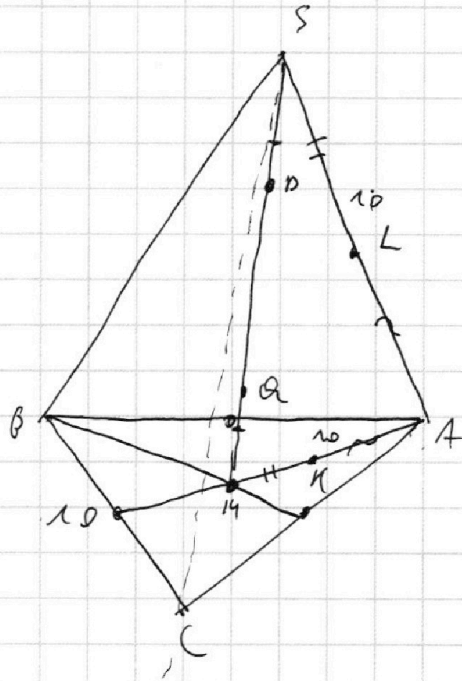
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



Решение: 1) Пусть  $\omega$  - <sup>плоскость</sup> сечение (SAM)

~~плоскость~~  $\omega$  - ~~шара~~ сферы  $\Omega$ , тогда  
 $\omega$  -  $\Omega$  касание  $\Omega$  с SA в L и AM в K,  
 $\omega$  кас SA в L и  $\omega$  кас AM в K.

2)  $\triangle S.MA$ :  $\angle \text{leg}(S; \omega) = SP \cdot SQ = SL^2$ , т.к

$SP \perp \omega$  кас AS в L,

$\angle \text{leg}(M; \omega) = MQ \cdot MP = MK^2$  т.к  $\omega$  кас  
AM в K, тогда в силу равенства

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = SQ, MP \cdot MQ = SP \cdot SQ \Rightarrow SL = MK.$$

3) в кос  $AS$  и  $AM$  в точках  $L$  и  $K$ .  $\Rightarrow$

$$AL = SK, AL = AK \text{ (как кас из } AKL)$$

$$4) AL = AK, SL = MK \Rightarrow AM = AS = 10.$$

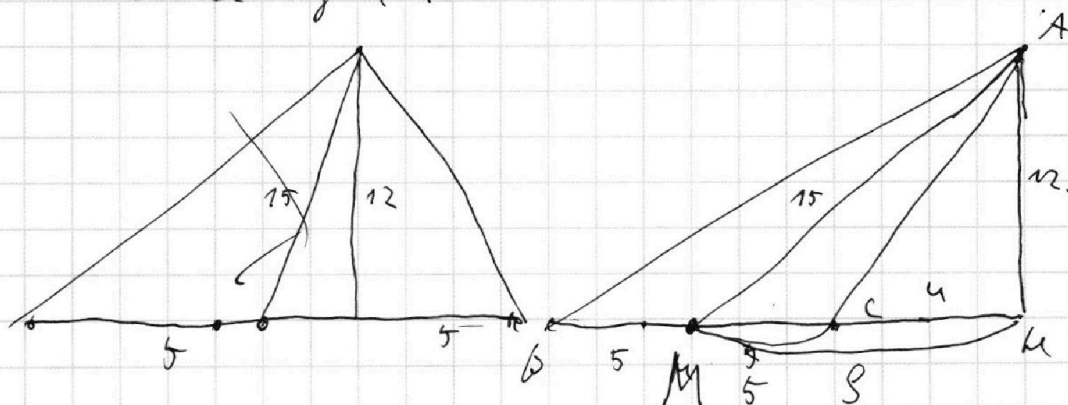
5)  $\triangle ABC$ :  $M$  - центр окружности  $ABC$ ,  $AM = 10 \Rightarrow$

$$AA_1 = 15, \text{ где } AA_1 \text{ - высота } ABC.$$

6)  $\triangle ABC$ :  $BC = 10$ ;  $S_{ABC} = 60 \Rightarrow BK = 12$ , где

$BK$  - высота из  $B$

7)



$$\triangle AMK \text{ - прямоугольный } \Rightarrow MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = 9, \text{ тогда}$$

$$CK = 9 - 5 = 4.$$

$$\triangle AKC \text{ - прямоугольный: } AC^2 = 12^2 + 4^2 = 4^2(1 + 9) = (4\sqrt{10})^2$$

$$AC = 4\sqrt{10}$$

$$\triangle BCK \text{ - прямоугольный: } AB^2 = 12^2 + 14^2 = 2^2(6^2 + 7^2) = (2\sqrt{85})^2.$$

тогда по формуле  $\frac{\sqrt{2a^2b^2 - c^2}}{c}$  найдем  $\cos \alpha$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = kx \quad -17; 68$$

$$y = -\frac{1}{4}k$$

$$y = -4x$$

$$4x_2 + y_2 = 40 + k$$

$$\begin{array}{r} 100 + \dots - 520 \\ 200 + 320 \end{array} \begin{array}{l} 178 \\ 178 \end{array}$$

$$(2, 68)$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 24 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$y_2 = 40 + k - 4x_2$$

$$2(25 + 88 - 20)$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 4 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 186 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 3 \\ \hline 246 \end{array}$$

$$204$$

$$-11$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ \times 2 \\ \hline 372 \end{array}$$

$$(18; 0) \quad y_2 = -4x_2 + 40 + k$$

$$\left(\frac{1}{2}, 68\right)$$

$$(-17; 68)$$

$$(0; 0)$$

$$(k, 68)$$

$$\frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{4}$$

$$15^2 = 225$$

$$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$4k_2 - 40 = 4x_1 + y_1 \quad 2(4 \cdot 81 + 4 \cdot 10)$$

$$y_1 = k_2 - 40 - 4x_1$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 42 \\ \hline 78 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ + 49 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 4 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 564 \\ + 160 \\ \hline 724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 160 + 144 \\ + 186 \\ \hline 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 380 \\ + 360 \\ + 260 \\ \hline 1000 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(x) = \frac{7}{2} \log_7 x - 4 \\ \log_7^4(y) = -\frac{7}{2} \log_7 y - 4 \end{cases}$$

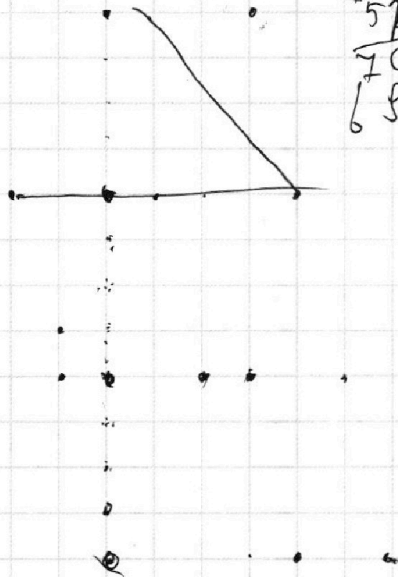
$$\begin{array}{r} 040 \\ 32 \\ \hline 3676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 178 \\ 64 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$a: \begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ + 27 \\ \hline 1792 \\ + 512 \\ \hline 2304 \\ - 1012 \\ \hline 1292 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 77 \\ \hline 118 \\ + 17 \\ \hline 235 \\ 28 \end{array}$$



$$0 = -4 \cdot 18 + 6$$

$$6 = 4 \cdot 18$$

$$-4x +$$

$$\begin{array}{r} +6812 \\ 2880 \\ \hline 9692 \end{array}$$

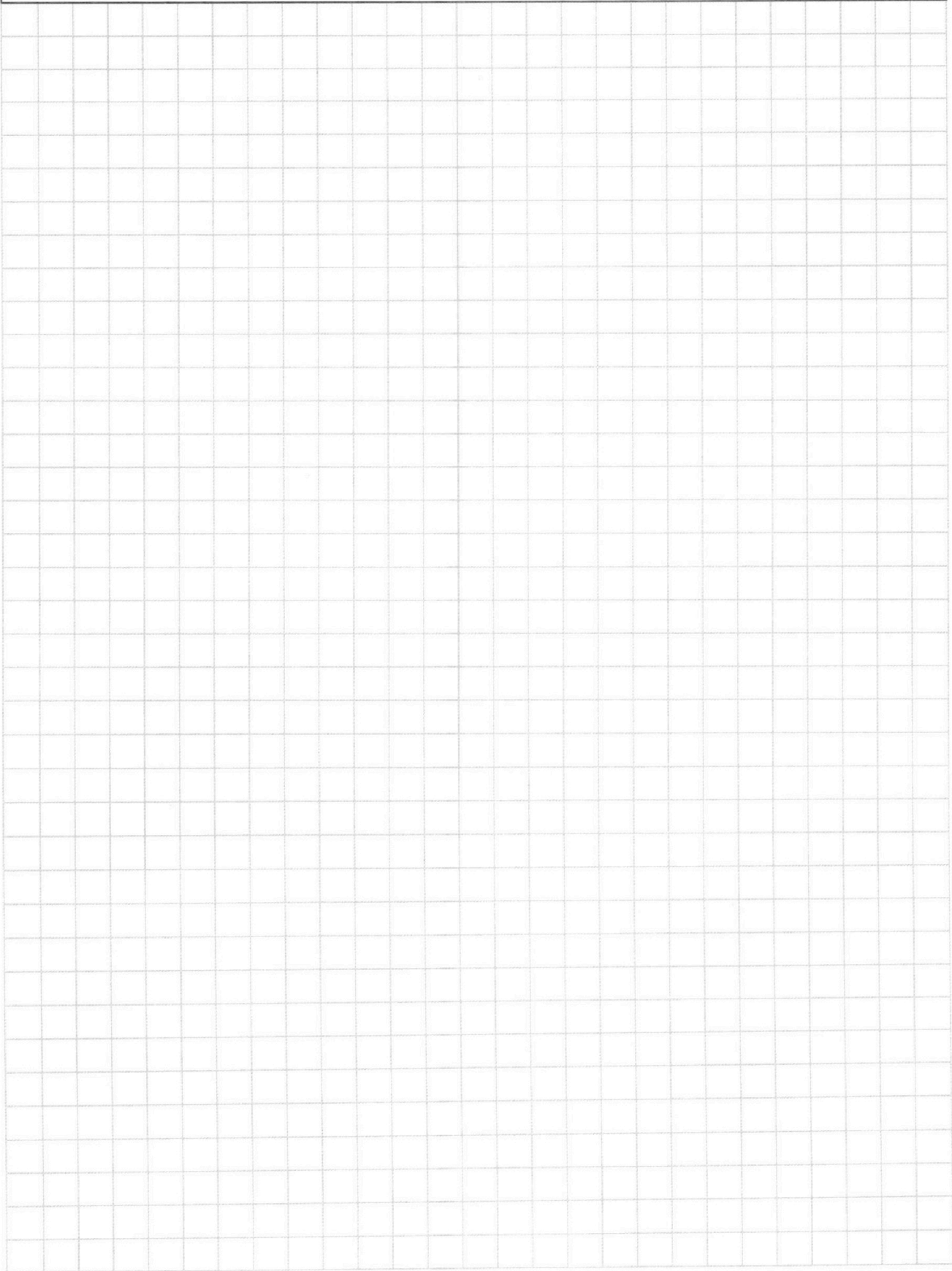


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

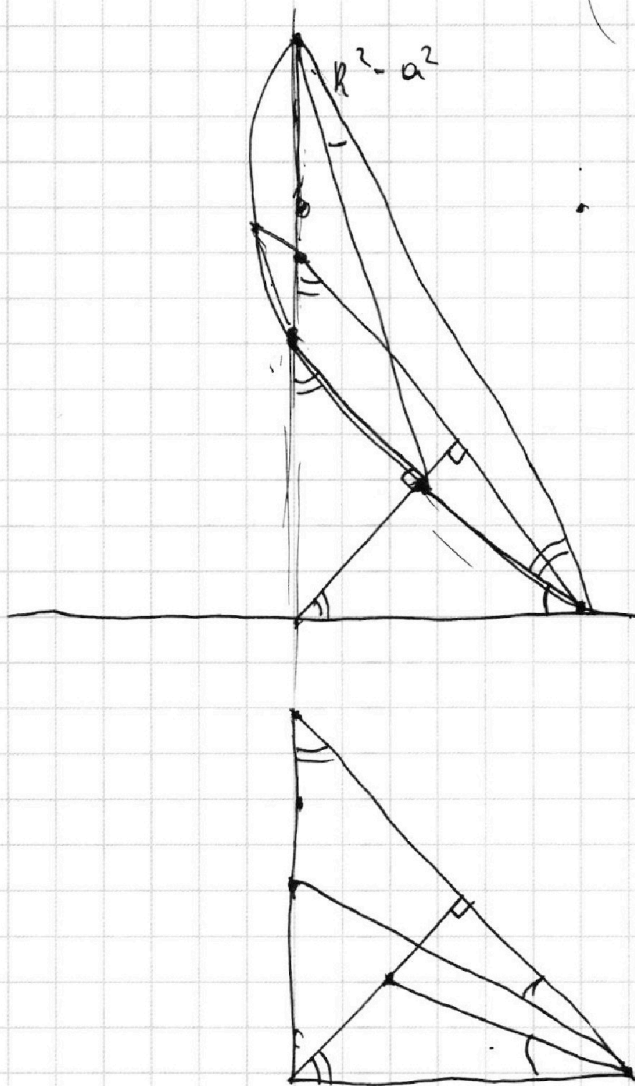
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\pi \left( \pi + 2\sqrt{R^2 - a^2} \right) = a^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ca: 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$abc \cdot b: 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}$$

$$bcb \cdot a: 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{37}$$

$$abc \cdot c: 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}$$

abc - min?

$$\begin{array}{r} 43 \\ +18 \\ \hline 61 \end{array} \quad \begin{array}{r} 57 \\ +61 \\ \hline 118 \end{array} \quad 120 | 30$$

$$11+15+11+17+15+17$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ +2 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +8+6+5 \\ \hline 22 \end{array}$$

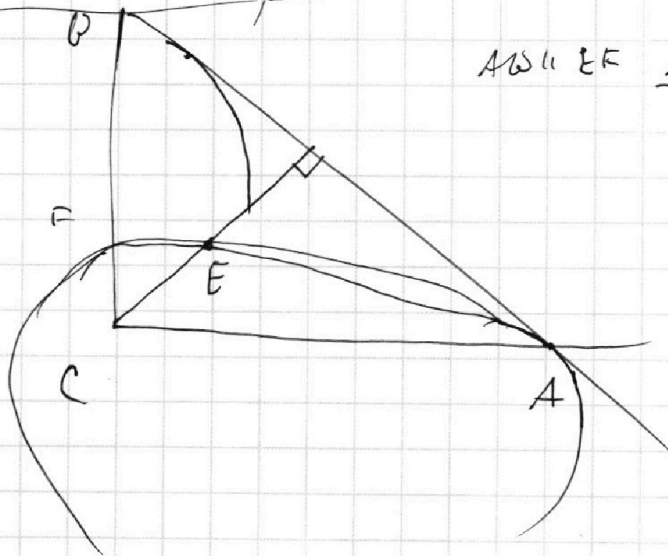
$$abc: 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{38}$$

$$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{63}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ -14 \\ \hline 24 \end{array} \quad 37,5$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cdot 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 93 \\ -29 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c &= 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29} \\ a &= 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{26} \\ b &= 2^3 \cdot 3^5 \cdot x \end{aligned}$$



$$AD \parallel EF \quad \frac{AD}{b_{EF}} = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

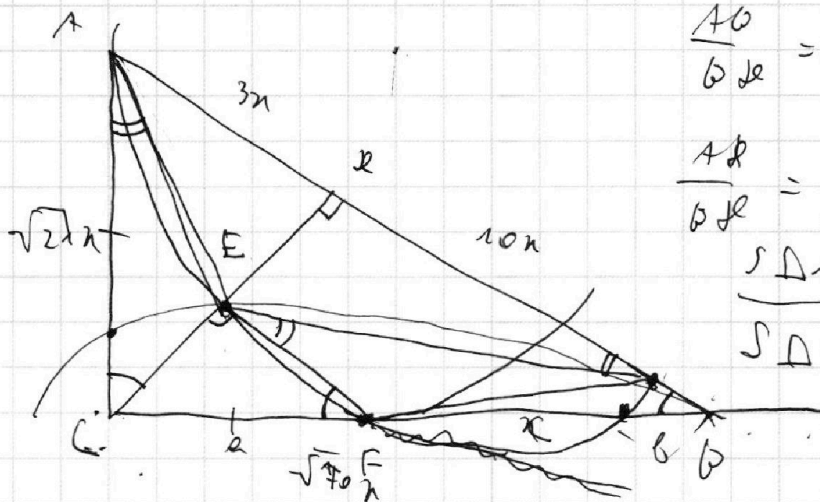
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{2} = \frac{12}{2}$$



$$\frac{AB}{BC} = 1,5 = \frac{15}{10}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$\frac{-30}{-21} \frac{a(a+c)}{b(b+c)} = 21x^2$$

$$\frac{3x}{h} = \frac{h}{10x} \quad h = \sqrt{30}x$$

$$\log_7^4(6n) - 2 \log_7 6n^7$$

$$\arccos \alpha = n$$

$$\cos \alpha = \alpha$$

$$\cos n = \sin n$$

$$\arccos \sin n = n$$

$$\cos \alpha = \sin n$$

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

$$\alpha = \pi - n$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - n) = \sin n$$

$$\arccos \sin n = \frac{\pi}{2} - n$$

$$\log_7 36x^2 \cdot 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6n) = 2 \log_7 6n^7 =$$

$$= \frac{3}{2} \log_7 6n^7 - 4$$

$$\log_7^4(6n) = \frac{7}{2} \log_7 6n^7 - 4; \log_7^4 y = -\frac{7}{2} \log_7 y - 4$$