



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}, bc : 2^{12} 3^{20} 5^{15}, ac : 2^{14} 3^{27} 5^{39}$$

Пусть $a : 2^x$, тогда $b : 2^{8-x}$, $c : 2^{14-(8-x)} = 2^{6+x}$
 $c : 2^{14-x}$, тогда $14-x = 6+x \Rightarrow x = 5$

Проверим сами $a : 2^5, b : 2^3$ то $ab : 2^8$,
 $c : 2^9$ тогда $bc : 2^{12}, ac : 2^{14}$ - верно!

Пусть $a : 3^y$, тогда $b : 3^{14-y}$, $c : 3^{27-(14-y)} = 3^{13+y}$
 $c : 3^{13-y}$, тогда $13-y = 13+y \Rightarrow y = 0$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то рассм. $\frac{1}{2}$ делит 2 ,
знач. $y \in \mathbb{N}$, получим:

При $y = 2$: $a : 3^2 \Rightarrow b : 3^{12} \Rightarrow c : 3^{29} \Rightarrow ac : 3^{31}$, а
 необходимо чтоб $bc : 3^{24}$ - значит не
 подходит.

При $y = 3$: $a : 3^3, b : 3^{11}, c : 3^{24} \Rightarrow ac : 3^{27}$ -
 подходит

Пусть $a : 5^z$, тогда $b : 5^{12-z} \Rightarrow c : 5^{15-(12-z)} = 5^{3+z}$
 $c : 5^{15-z}$, тогда $3+z = 3+z \Rightarrow z = 1$

проверим: $a : 5^1 \Rightarrow c : 5^{16} \Rightarrow ac : 5^{17}$,
 $ab : 5^{13}$ (удовлет.) $bc : 5^{22}$ (удовлет.)

Итого $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ - мин. возм. произв.

Ответ $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

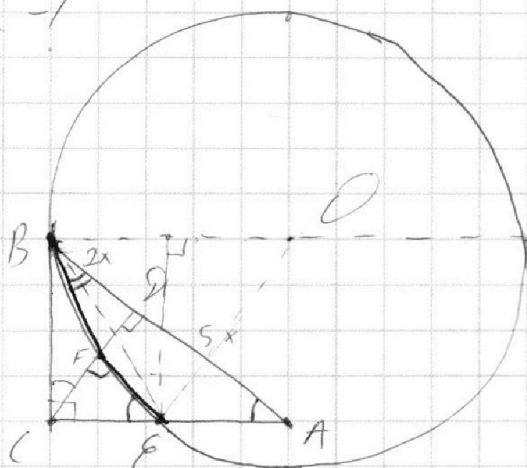
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ABC} \rightarrow$
 S_{CFE}



1) Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$

2) $ABFE \sim \triangle ABC$

т.к. $FE \parallel AB$ и $AB \perp DC$,
то $FE \perp DC \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

3) $\triangle ABC \sim \triangle CFE$
 $CB^2 = CE \cdot CA$

4) $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$ т.к. $AB \perp CD$
 $CD \perp AB$ - высота в равнобедренном $\triangle ABC$

$CD = \sqrt{2x \cdot 10x} = 2\sqrt{5}x$

5) Пусть O - центр окружности, тогда $OB \perp BC$ по свойству касательной к окружности.

6) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$; $S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{CD \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{\triangle CFE \sim \triangle CDA}{\triangle CFE \sim \triangle CDA}$ по угл. 7.1

$\angle DCA = \angle CFE$, $\angle CFE = \angle CPA = 90^\circ$

след. $\frac{CD}{CF} = \frac{CA}{CE} = \frac{DA}{FE}$, тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{AB \cdot AD}{FE \cdot FE} = \frac{45x^2}{FE^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{TO } \sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\sin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ при } x \in [-1; 1]$$

$$\text{TO } \sqrt{1-x^2} = 2-2x, \text{ т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2-2x > 0$$

т.к. $x \approx 3,79$ $2x \leq 2$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$\text{TO } (1-x^2) = 2^2 - 4x + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 104x^2 - 4x + 2^2 - 100 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 104 \cdot 2 = 16^2 - 832 = 16(4 - 52) = 16(-48)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4 + \sqrt{16 - 48}}{208} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208} < 1 - 4 \quad \pi > 3$$

$$\frac{4 - \sqrt{16 - 36}}{208} < 196$$

$$330 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нет.

следов. $x > 0$

$$\frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208} > -1$$

$$\text{т.к. } \frac{4}{208} - \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4}{208} - \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4}{208} > 0, \text{ а } \frac{4}{208} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{208}$$

5835
796
+ 796

1796
+ 264

196
38416 > 38000

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



предел не равен

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{7}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Всегдав при $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$ - 4 реш. ~~то~~
при нек. зн. α

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$ - все \rightarrow 4 реш. ~~то~~ при
люб. зн. α

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$ - 4 реш. ~~то~~ при нек. зн. α

Ответ: $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



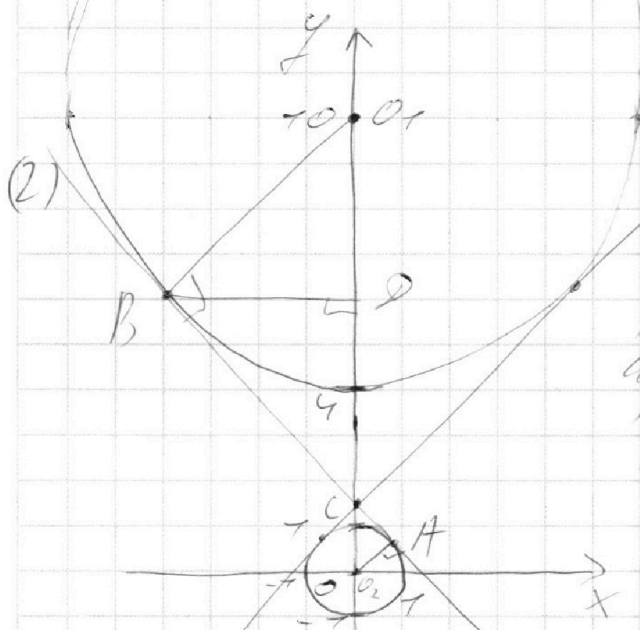
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20x + 64) = 0 \end{cases}$$

ур - иде кругов
 $x^2 + y^2 = 7$ - ур. окр.
 $x^2 + (y - 10)^2 = 36$ - ур. окр.

$\alpha x - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \frac{\alpha}{3}x + \frac{4}{3}b$ - ур. прямой



(1) Проведем две окружности касаясь в точке O_1 и O_2 соответственно. Если провести с O_1 касательную к окружности O_2 касаясь в точке A , то не будет касания с окружностью O_1 . Если провести с O_2 касательную к окружности O_1 касаясь в точке C , то не будет касания с окружностью O_2 . Проведем касательную к окружности O_1 касаясь в точке B , то не будет касания с окружностью O_2 . Проведем касательную к окружности O_2 касаясь в точке A , то не будет касания с окружностью O_1 .

будет касание. Не проводим касательных в O_1 и O_2 касаясь в A и C соответственно. Найдем угол касания касаясь в A . Пусть O_1, O_2 - центры окр. с радиусами 6 и $\sqrt{7}$. B и A - т. кас. окр. O_1 с O_2 соответственно. C - касаясь окр. с осью x в точке A и C соответственно.

$\triangle O_1 B C \sim \triangle O_2 A C$ по 2 углам. $\angle O_1 B C = \angle O_2 A C = 90^\circ$
 Но $\angle B O_1 C$ - угол касания O_1 с O_2 касаясь в A и C соответственно.
 $\frac{O_1 B}{O_2 A} = \frac{O_1 C}{O_2 C} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{\sqrt{7}} \Rightarrow O_1 C = 6 O_2 C$

$O_1 C + O_2 C = 7$ (т.к. $O_1 C$ - радиус O_1) $\Rightarrow 3 O_2 C = 7 \Rightarrow O_2 C = \frac{7}{3}$
 $\Rightarrow O_1 C = \frac{14}{3} \Rightarrow O_1 C = \frac{60}{3}, O_2 C = \frac{10}{3}$ - касаясь т.к.

по оси x . $\frac{10}{3} = \frac{4}{3} b \Rightarrow b = \frac{75}{4}$. Проведем $B A$ и $O_2 C$

$\triangle O_1 B A \sim \triangle O_1 C B$ по 2 углам. $\angle O_1 B A = \angle O_1 C B = 90^\circ$
 $\angle B O_1 C$ - угол касания. Тогда $\frac{O_1 B}{O_1 C} = \frac{B A}{C B} = \frac{6 \cdot 7}{60 \cdot 10} = \frac{7}{10} = \cos 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } 8x^3 = (2x)^3 \\ 625 = 5^4 \end{array}$$

Пусть $\log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{13}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 4 + 4 + \log_{\frac{4}{5}} 5 = \log_{\frac{4}{5^3}} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 4 + \frac{4}{\log_5 4} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 4} - 3 \\ 4 \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

Пусть $\log_5 4 = n \Rightarrow 5^n = 4, 4 \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$

тогда $n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \quad \cdot n \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \quad \text{сomm. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{cases}$$

нет реш.

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9 \text{ или } y_2 - y_1 \geq 0$$

9) $x_2 - x_1 \leq 8$ или $y_2 - y_1 \leq 0$
т.е. граница пересечения $x \leq 8$

$$L = \frac{80}{16} = 5 - \text{услов. колл. 2-ой интервал}$$



т.е. количество 5 отч. по оси y
выбран. целые коор. по оси x
при $y=0$: 7 кар $(x_2 - x_1) = 9$

т.е. во всем карат $M = \left(\frac{80}{5} + 1\right) = 17$

$= 17 \cdot 9 = 153$ кар y котор. один знак.
по оси y и выкат. $y_1 \geq 0$ и $y_2 - y_1 \geq 0$,
повторяющиеся

при $y_2 - y_1 = 7$ $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$ колл.
долг, 2 11 5 7 11

при $\left. \begin{matrix} y_2 - y_1 = 5, & x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, & x_2 - x_1 = 9 \end{matrix} \right\} 9$ случаев

$$y_2 - y_1 = 45 \quad x_2 - x_1 = 0$$

I $18 - 8 + 7 = 17$ кар $(x_2 - x_1)$ и 16 кар $(y_2 - y_1)$
итого $16 \cdot 17$ кар y 17 16

II $18 - 7 + 7 = 18$ кар $(x_2 - x_1)$ и 8 кар $(y_2 - y_1)$
итого $12 \cdot 8$ кар y 18 8

III $18 - 6 + 7 = 19$ кар $(x_2 - x_1)$ и 6 кар $(y_2 - y_1)$
итого $13 \cdot 6$ кар y 19 6

IV $18 - 5 + 7 = 20$ кар $(x_2 - x_1)$ и 4 кар $(y_2 - y_1)$
итого $14 \cdot 4$ кар y 20 4

V $18 - 4 + 7 = 21$ кар $(x_2 - x_1)$ и 3 кар $(y_2 - y_1)$
итого $15 \cdot 3$ кар y 21 3

VI $18 \cdot 2 = 36$; VII $17 \cdot 2 = 34$

VIII $18 \cdot 2 = 36$; IX ~~17 \cdot 2 = 34~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

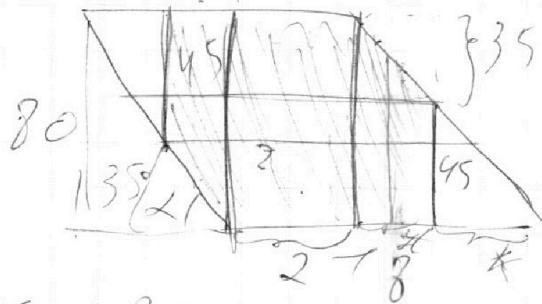
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



кредитные

1X (ср.)



$$y_2 - y_1 = 45$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \text{ (ср.)}$$

тогда $k = 9 \Rightarrow t = 5$ тогда ср. 44 руб.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см. в сеч. } (y_2 - y_1) = 45$$

$36 \cdot 3$; ~~так~~ расчет тр. (ср. кр. 1)

при в сеч. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 36 \text{ см } y \text{ сеч.}$$

$$\text{трапеция } \text{итого в } \text{X} \text{ в } 37 \cdot 36 \cdot 2 + 36 \cdot 3 = 36 \cdot 40 \text{ метров}$$

W - всего метров, тогда при $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ метров } \frac{W}{2} = \frac{1}{2} \text{ (ср.) в сеч. метров}$$

$$\text{итого: } 9 \text{ метров } + 7 \cdot 2 \text{ (ср.)}$$

$$\frac{W}{2} = 2 \cdot (120 + 16 \cdot 7 + 12 \cdot 8 + 13 \cdot 6 + 14 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 2 \cdot 2163 =$$

$$= 4326$$

Объем: 4326

$$\text{Объем } W = 2 \cdot (120 + 16 \cdot 7 + 12 \cdot 8 + 13 \cdot 6 + 14 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 4326$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

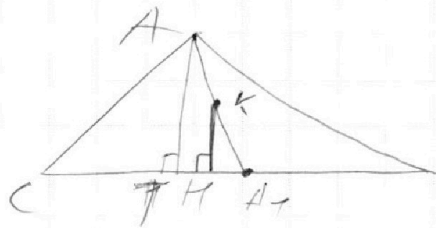
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине BC 12° - значит $\cos 12^\circ = 1$
тогда $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{kH}$, где $v = 5$ - радиус сферы



$$SL = SN = 4 \text{ км} \text{ от } \text{ср. } AA_T$$

проб. $\text{ср. } AA_T$ \perp BC \Rightarrow
 всегда $AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AK \Rightarrow KA_T = AA_T - AK = 24 - 12 = 12$, т.к. K - $\text{ср. } AA_T$.

Положим $AT \perp BC$, т.к. $AT \perp BC$, $KH \perp BC \Rightarrow AT \parallel HK$, т.к. K - $\text{ср. } AA_T$ и $AT \parallel HK$ - то HK - $\text{ср. } AA_T$ $\Rightarrow AT + AA_T$ $\text{показат. } HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

Тогда $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$$

Ответ: $AA_T, BB_T, CC_T = 3600$; $\alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$

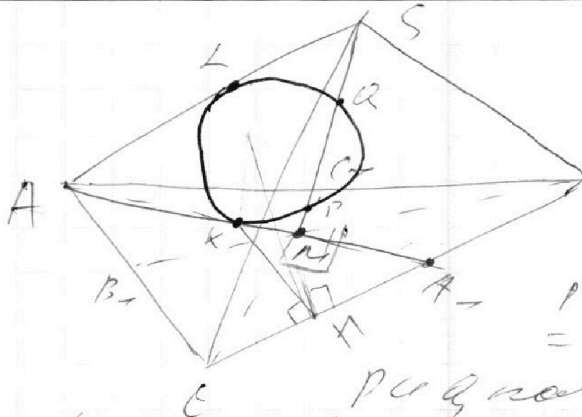
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $MP = x$, тогда
 $PQ = r - x \Rightarrow SQ = r - (r - x) = x = MP$, следовательно
 $PQ \perp MQ$, то $\angle MPQ = 90^\circ$.

тогда $ML^2 = MP \cdot MQ = x(r - x)$
 $SL^2 = SQ \cdot SP = x(r - x) = ML^2 \Rightarrow ML = SL$ (тогда)

т. о. ML и SL — кривые из т. к. $\angle MLP = 90^\circ$

$AL = AK$ по теор. о отрезке кривых из т. к. $\angle MLP = 90^\circ$
 тогда $AM = AK + MK = AL + SL = AS = BC = TB$

По теореме о медиане $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2} = \frac{TB}{2} = 8$

$CA_1 = A_1B$ (т. к. AA_1 — медиана) и $CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = \frac{TB}{2} = 8 = MA_1$

тогда т. к. $MA_1 = BA_1 = CA_1$, то $\triangle MA_1B_1C_1$ — правильный, $\angle BMC = 90^\circ$
 пусть $MC = 24$, $MB = 2x$, тогда по в. теореме $MC^2 = MB^2 + BC^2$

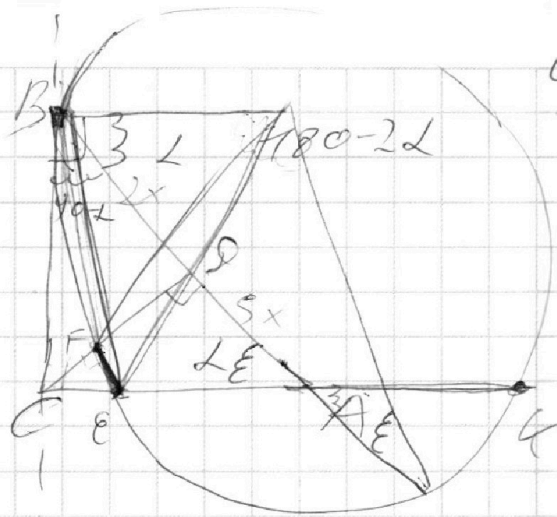
$S_{MA_1B_1C_1} = (MA_1 + MA_1 + MA_1) \cdot (MB_1 + MB_1) \cdot (MC_1 + MC_1) =$
 $= 3x \cdot 3x \cdot 24 = 24 \cdot 9x^2$

$S_{ABC} = 100$ по в. теореме $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{100}{3}$

$= \frac{1}{2} MB \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 24 \Rightarrow 2x \cdot 24 = \frac{100}{3} \Rightarrow xy = \frac{50}{3}$

$\Rightarrow 24 \cdot \frac{50}{3} = 4250 = 3600$

Проверим $KM \perp BC$, т. к. K — центр описанной окружности $\triangle ABC$, то центр описанной окружности лежит на пересечении медиан $\triangle ABC$ — K . Центр описанной окружности на стороне BC — M . Тогда $KM \perp BC$, т. к. K — центр описанной окружности $\triangle ABC$ и M — середина BC .
 Пусть O — центр описанной окружности $\triangle ABC$, $OH \perp BC$.
 $KM \perp BC$, KH — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, $OK \perp BC$ — \Rightarrow $OK \parallel OH$ — \Rightarrow $OK \perp KM$, \Rightarrow $\angle OKM = 90^\circ$, где $\angle OKM$ — \angle между радиусами OK и OM .



$CFE \sim BCE$
 $\frac{FE}{CE} = \frac{BE}{CE}$ $\frac{1}{2} (CP \cdot AB)$
 $\sum_{ABC} = \frac{1}{2}$
 $\sum_{CFE} = \frac{1}{2} FE \cdot CF$
 $\frac{CF}{CP} = \frac{CE}{CA}$
 $\frac{CP \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{EF}$
 $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{AC}$

$(m+n)^2 - 2mn + 3$

$(m+n)^2 - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 2mn - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 3$
 $(m^2 + n^2 + 3) - (m^2 + n^2 + 3) = 0$

$(m+n)^2 - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 2mn - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 3$
 $(m^2 + n^2 + 3) - (m^2 + n^2 + 3) = 0$

$0 = \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2} + \frac{7}{3} - \frac{7}{4}$
 $0 = 7 + 7 - 7 + 7 - 7$

$(m+n)^2 - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 2mn - 2mn + 3 = m^2 + n^2 + 3$
 $(m^2 + n^2 + 3) - (m^2 + n^2 + 3) = 0$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен!

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.



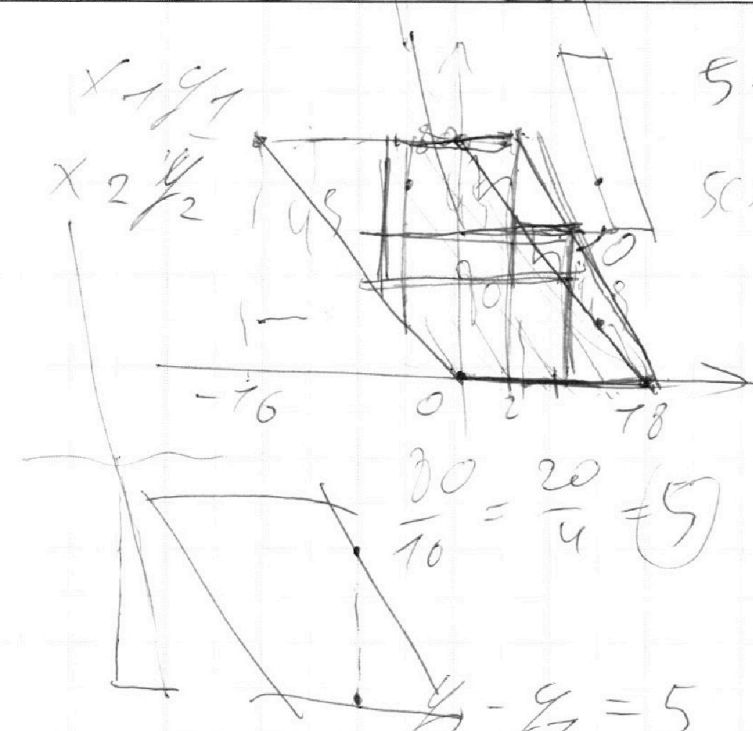
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

~~$$x_2 - x_1 \leq 9$$~~

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4 \cdot 11$$

$$4 \cdot 43$$

$$3 \cdot 42$$

$$2 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 4$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

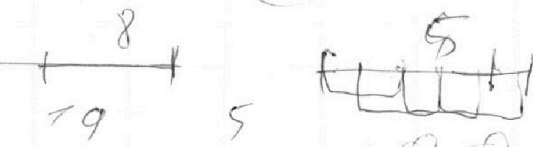
000000

④

$$5 - 3 = 2$$

$$78 - 9$$

15



000000

0000000000

30	380
	380
	380

$$80 / 15 = 6$$

$$80 / 25$$

$$\frac{44}{5} = 8.8$$

$$202 = 2 \cdot 25$$

33
82
88

202
202
202
202
202

202 202

202 + 202





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7
-



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 227 \\
 96 \\
 \hline
 333 \\
 643 \\
 323 \\
 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4326 \\
 2 \\
 \hline
 2763 \\
 8723 \\
 0447 \\
 782 \\
 207 \\
 457 \\
 54 \\
 734
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 943 \\
 957 \\
 037 \\
 734 \\
 56 \\
 837
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \sin 9.3^\circ (\cos x) = \sqrt{7} - 2x$$

$$\cos x = 2 \in [-0.7]$$

$$\cos 2 = x \in [-0.7]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - 2^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$10 \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{7} - 2x$$

$$100(1 - x^2) = 7 - 4\sqrt{7}x + 4x^2$$

$$104x^2 - 4\sqrt{7}x + 9^2 - 100 = 0$$

$\Delta = 16^2 - 4(11^2 - 100) \cdot 104 =$

$$= 16^2 - 4(121 - 100) \cdot 104 =$$

$$= 16^2 - 4(21) \cdot 104 = 256 - 8496 = -8240$$

$$x = \frac{4\sqrt{7} \pm \sqrt{-8240}}{208}$$

$$\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1; 1]$$

$$\sin 2 = 6 \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\arcsin 6 = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1 - 9.3^2 x^2} = 9.3^2 x$$

$$9.3^2 x + 2^2 = 1$$

$$1 - 87.2^2 x = 87.2^2 x = 1$$

$$\sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - 400 + 1000}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \wedge (x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 209 + 64 = 0$$

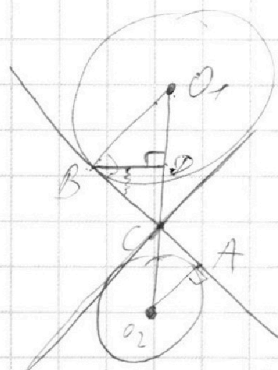
$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

Упр. упрел.

$$O_1 B D \sim O_1 C B$$

$$\frac{6}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$b = \frac{75}{14}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{10}{4}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$, $b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$, $a \cdot c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$
 $abc = ?$

~~$a : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$~~
 ~~$b : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$~~
 ~~$c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$~~

$c : 3^{27-x}$ $b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$

$a : 3^{15-x}$ $75-x = x$

$x = \frac{75}{2}$ $\sqrt{x = \frac{75}{2}}$

$x = 8$

$b : 3^7$

$c : 3^{13}$

$b : 3^6$

$c : 3^{14}$

$a : 5^x$

$c : 5$

$a : 3^4$ $b : 3^6$ $c : 3^{14}$

$b : 5^{72-x}$

$c : 5^{13-34+x}$

$72-x = x-22$

$34 = 2x$ $x = 17$

$a : 5^{15}$

$c : 5^{22}$

$a : 2^x$

$b : 2^{8-x}$

$c : 2^{72-8+x}$

$c : 2^{74-x}$

$4+x = 74-x$

$2x = 70$ $x = 35$

$a : 2^5$, $b : 2^3$, $c : 2^9$

Тогда $abc = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{74} \cdot 5^{17} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$

$AC = \frac{AV}{BC} = \frac{AV}{3A}$

$\frac{5}{5} = \cos \alpha = \frac{5}{5}$

$\frac{5}{5} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1} = \cos \alpha$

$\frac{5}{5} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1} = 2$

$\frac{205x}{5}$

$AC = \frac{AV}{BC} = \frac{5}{5}$

$\cos \alpha = \frac{AC}{AV}$

На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поля QR-кода не допускаются!



ВПР

$$\begin{aligned} 2x \neq 7 \\ x > 0 \\ 2x > 7 \\ x > 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \frac{1}{2} \log_5 625 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \frac{1}{2} \cdot 6 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = 3 - 3 \\ \log_5 2x - 3 = 0 \\ \log_5 2x = 3 \\ 2x = 5^3 \\ 2x = 125 \\ x = 62,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \log_5 5^3 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = 3 - 3 \\ \log_5 2x - 3 = 0 \\ \log_5 2x = 3 \\ 2x = 5^3 \\ 2x = 125 \\ x = 62,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x + 4 + \log_5 5 = \log_5 625 - 1 \\ \log_5 2x + 4 + \log_5 5 = \log_5 5^3 - 1 \\ \log_5 2x + 4 + \log_5 5 = 3 - 1 \\ \log_5 2x + 4 + \log_5 5 = 2 \\ \log_5 2x + 4 = 2 - \log_5 5 \\ \log_5 2x + 4 = 2 - 1 \\ \log_5 2x + 4 = 1 \\ \log_5 2x = 1 - 4 \\ \log_5 2x = -3 \\ 2x = 5^{-3} \\ 2x = \frac{1}{125} \\ x = \frac{1}{250} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = \log_5 5^3 - 3 \\ \log_5 2x - 3 + \log_5 5 = 3 - 3 \\ \log_5 2x - 3 = 0 \\ \log_5 2x = 3 \\ 2x = 5^3 \\ 2x = 125 \\ x = 62,5 \end{aligned}$$

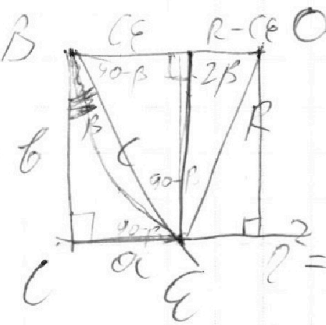
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2R \cdot a + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2 = \sqrt{725x^2}$$

$$25 + 100 = \sqrt{725} \cdot x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{725x^2}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} = 25.5$$

$$c = 25x$$

$$R = \frac{bc}{2a} = \frac{25x \cdot 100x}{2 \cdot 50x} = 25x$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5} \cdot x \quad AC = 5\sqrt{5} \cdot x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9}FE^2 = 2 \cdot \frac{25}{3}FE \cdot R$$

$$\frac{25}{3}FE = 25 \cdot R = 25 \cdot 25x = 625x$$

$$\cos \gamma = \frac{FE}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{5}x}{5x} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{3\sqrt{5}x}{5} \Rightarrow \sqrt{5} = 1$$

$$FE = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{25}{3}\right) = 10$$

$$R^2 = 4x^2 + 20x^2 = 24x^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}x$$

$$3.55x$$

$$\angle CBE = \beta \quad \angle BOE = 2\beta \quad \angle CFE = \beta$$

$$\angle CBE = \beta \quad \angle BOE = 2\beta \quad \angle CFE = \beta$$

$$\frac{FE}{2R} = \frac{10}{2 \cdot 2\sqrt{6}x} = \frac{5}{2\sqrt{6}x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

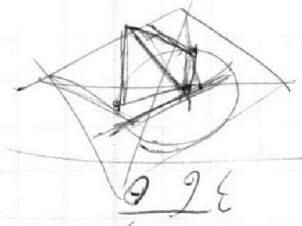
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



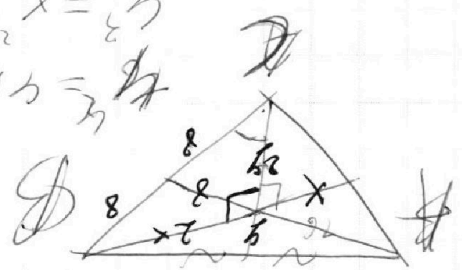
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

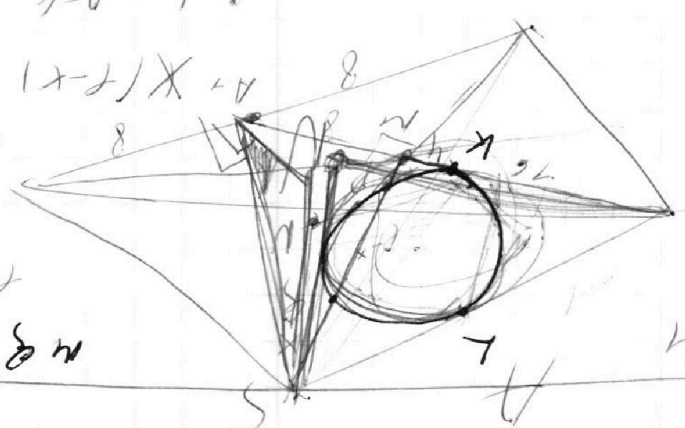


$$\begin{aligned} 4^2 + 2^2 &= x^2 + 4^2 \\ 4^2 + 4^2 + 4^2 &= 3x^2 \end{aligned}$$



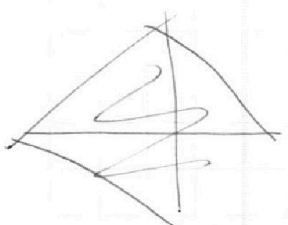
$$\begin{aligned} AS &= AK + LS = AK + AK = AK \\ AL &= AK \\ AS &= AK + LS = AK + AK = AK \end{aligned}$$

$$2x^2 = 4x^2$$



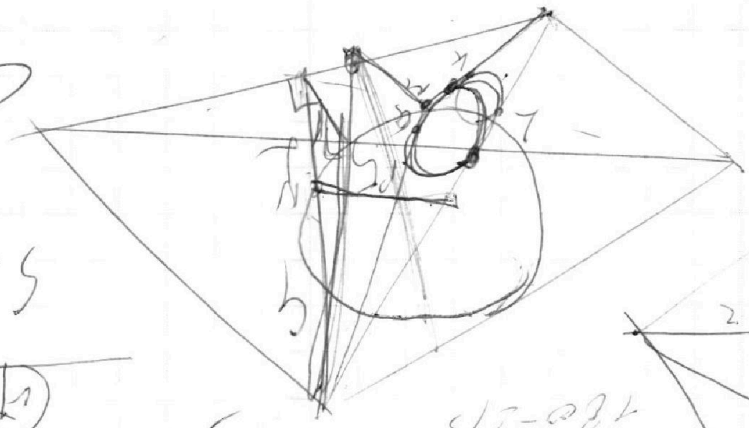
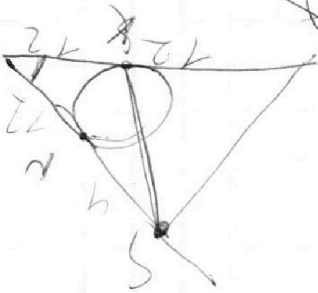
$$AL = 2x$$

$$m \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$$



$$5L = 4$$

$$x = \frac{2}{3}$$



$$180 - 213$$

$$180 - 213$$

$$90 < B$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CE = \frac{2}{3} FE$$

$$CFE \sim BFC$$