



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~1
Числа a, b и c должны быть вида $2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$, т.к. ^{здесь x_1, y_1, z_1 и т.д. - натуральные числа!!!}
если у них есть ещё какие-то простые множители, т.е. a, b, c точно не будет наименьшим
 $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3}$

При этом $ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ и т.д. по условию
для иског: $\Rightarrow x_1+x_2 \geq 9$; $x_2+x_3 \geq 14$; $x_1+x_3 \geq 19$

Тогда $x_1+x_2+x_3 \geq \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{2} \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$
(знак '+' т.к. при произведении степени складываются)
 $x_1+x_2+x_3 \geq 21$

Аналогично для y и z :

$$y_1+y_2+y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20\frac{1}{2} \Rightarrow \text{и } y \text{ и } z \text{ целые} \Rightarrow y_1+y_2+y_3 \geq 21$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq \frac{10+13+30}{2} = 26\frac{1}{2}$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq 27$$

Чтобы abc было минимально, $x_1+x_2+x_3$, $y_1+y_2+y_3$, $z_1+z_2+z_3$ тоже должны быть минимально возможными

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 21; y_1+y_2+y_3 = 21; z_1+z_2+z_3 = 27$$

И минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~2. по условию:

$\angle C = 90^\circ$. $CD \perp AB$

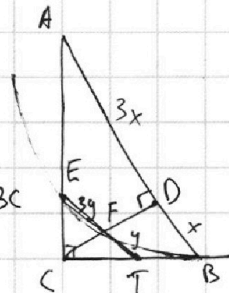
B - точка касания

$AB \parallel EF$, $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{1}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$

$\triangle ACD \sim \triangle ECF$
по 2 углам.



Пусть $T = EF \cap BC$.

Тогда TB - касательная к окр., TE - секущая

$\Rightarrow TF \cdot TE = BT^2$

Пусть еще $AD = 3x$ и $BD = x$ и $EF = 3y$ и $FT = y$

(Заметим, что $\frac{EF}{TF} = \frac{AD}{BD}$ из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle ACD$ по 2 углам)

Тогда $BT = \sqrt{TF \cdot TE} = \sqrt{y \cdot (3y + y)} = 2y$

При этом CD - высота $\triangle ABC$

$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{3}x$

\Rightarrow из $\triangle BCD$: $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2x$

и $CT = \frac{y}{x} \cdot 2x = 2y \Rightarrow BT = 2y$

$\Rightarrow 2y = 2x - 2y$

$y = 2x$

\Rightarrow т. T - середина BC . Тогда и т. E - середина AC

$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$. (из подобия)
(т.к. одна высота)

$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ACD} \cdot \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ACD}$ (из подобия)

$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3}{16} S_{\triangle ABC}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}. \quad \text{Мы знаем, что } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{Тогда } 5 \arcsin(\cos x) = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right),$$

где n - такое целое число, что $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

(интервал такой, т.к. \arcsin может принадлежать только ему)

$$\Rightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 10\pi n + 2\pi = 2\pi(5n + 1)$$

$$x = \frac{\pi}{3}(5n + 1)$$

$$\cancel{\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq -x + 2\pi n \leq 0$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3}(5n+1) + 2\pi n \leq 0$$

$$-1 \leq -\frac{5n+1}{3} + 2n \leq 0$$

$$-3 \leq -5n-1+6n \leq 0$$

$$-2 \leq n \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow Возможные значения n : $-2; -1; 0; 1$.

Им соответствуют решения уравнения:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-2) + 1) = -3\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-1) + 1) = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3}(0 + 1) = \frac{\pi}{3}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot 1 + 1) = 2\pi$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad a = ? \quad (\text{такие, что найдётся } b, \text{ при которых у системы 4 решения})$$

Решим задачу графически.

Второе уравнение системы задаёт окружности:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{центр} - (0, 0); \quad r = 3$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \text{центр} - (6, 0); \quad r = 2$$

Запомним, что у этих окружностей нет общих точек.

$ax + 2y - 3b = 0$ - прямая

$$y = -\frac{ax}{2} + 3b$$

Когда угол наклона этой прямой между

$\angle > \frac{\pi}{2}$ (наклоном касательной) или $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$ (наклоном касательной с отриц. знаком) и $-\frac{\pi}{2}$, система не будет иметь 4 решения ни при каком b , т.к. у прямой с окружностями будет от 0 до 2 точек пересечения

найдем α - угол наклона общей касательной к окружностям, причём внутренней. ($\alpha > 0$)

см. рис: A, B - т. касания O_1 и O_2 - центры окр.

$$O = O_1, O_2 \perp AB$$

$$\alpha = \angle BO_2O \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} = \text{tg } \alpha = \text{tg } \angle BO_2O$$

$$b = O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = \frac{AO_1}{\sin \alpha} + \frac{BO_2}{\sin \alpha} = \frac{AO_1 + BO_2}{\sin \alpha} = \frac{2+3}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha}$$

$$(0 < \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

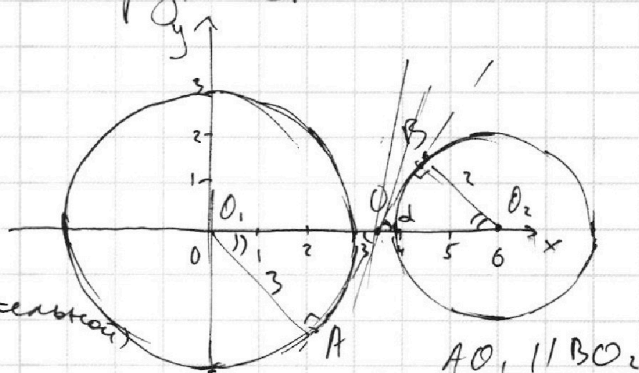
$$\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{\alpha}{2} < \infty \Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\infty$$

$$\text{tg } \alpha < -\frac{\alpha}{2} < \infty$$

$$a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}})$$

Также в ответе будет $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$, т.к. график симметричен относительно осей \rightarrow у второй внутр. кас. угол наклона = $-\alpha$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}) \cup (-\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5 .
 $xy = ?$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_{5y} (3^5) - 8$$

пусть $a = \log_3 x$ и $b = \log_3 5y$

$$a = \log_3 3; \frac{1}{6} = \log_{5y} 3$$

Тогда используя различные преобразования логарифмов получим:

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8; \quad b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} - 8$$

Упростим: $2a^5 + 16a + 7 = 0; a \neq 0$ (*)

" $2b^5 + 16b - 7 = 0; b \neq 0$

$f(a) = 2a^5 + 16a + 7$ ↑ т.к. это сумма возрастающих функций

⇒ ур-е $2a^5 + 16a + 7 = 0$ имеет 1 корень на \mathbb{R}

⇒ единственно возможное число x удовлетворяет ур-ю $a = \log_3 x$

Аналогичные рассуждения можно провести для $5y$ " $f(b)$

x и y - единственные ⇒ xy тоже.

Теперь сложим ур-я (*): $\Rightarrow 2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$
 $2(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$a + b = 0$

$\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$\log_3 (5xy) = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0,2$

... решать не надо, т.к. уже нашли единственные

возможные значения xy .

Заметим еще, что x и y , при которых ур-я * имеют решение, точно есть, т.к.

'исключения ОДЗ' в виде $x=1$ и $y=1$ - не корни.

Ответ: $xy = 0,2$. (больше значений xy нет)

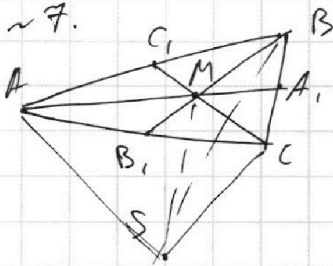
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

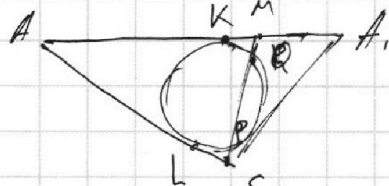
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим $\triangle ASA_1$:



$$SP = MQ$$

сфера в сечении S представляет собой окружность, вписанную в $\triangle ASA_1$
По т. об отрезках дуги о кас. и секущей:

$$SP \cdot SQ = SL^2; \quad MQ \cdot MP = KM^2$$

Но по условию $SP = MQ$

$$\Rightarrow SL^2 = KM^2; \quad SL = MK$$

При этом $AK = AL$ (касая. из одной точки)

Получим, что $AS = AL + SL = AK + KM = AM$

$$\Rightarrow AM = AS = 12. \quad \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18$$

Тогда $AA_1M = 18 - 12 = 6 = A_1B = A_1C$

$\Rightarrow \triangle BMA_1$ и $\triangle CMA_1$ - р/б \triangle

\Rightarrow т. A_1 равноудалена от т. B, M и C

$\Rightarrow A_1$ это центр ок. окр. в $\triangle BCM$
 $R = A_1M = 6$

$\Rightarrow \angle M$ в этом \triangle опирается на диаметр

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} BM \cdot CM$$

Также т.к. медианы делят треугольник ABC на 6 равных \triangle попарно, $\Rightarrow S_{\triangle BMC} = S_{\triangle A_1BM} + S_{\triangle CA_1M}$

$$= 2 \cdot S_{\triangle BMC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30.$$

$$\Rightarrow BM \cdot CM = 2 S_{\triangle BMC} = 60$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 &= AA_1 \cdot \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \\ &= \frac{9}{4} AA_1 \cdot BM \cdot CM = \frac{9}{4} \cdot 18 \cdot 60 = 2430 \end{aligned}$$

Ответ: а) 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~78 (а.а на другом месте)

$SN=4$, ~~$SO=5$~~ $NO=5$ (где O - центр сферы)

\Rightarrow По т. Пифагора из ΔSON :
 $SO = \sqrt{NO^2 + SN^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$$OK = ON = 5$$

$KO \perp ABC \Rightarrow KO \perp BC$
 $NO \perp BC \Rightarrow NO \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (NOK)$

\Rightarrow Пусть $F = BC \cap NOK \Rightarrow KF \perp BC$

$\Rightarrow \angle KFN$ - мин. угол двугр. угла при ребре BC (т.е. искомого угла)

Пусть AM - высота основания

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC; \quad AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$$

$$\frac{KF}{AM} = \frac{AN}{AA_1}$$

из подобия ΔAKF и ΔA_1AN
по углам



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

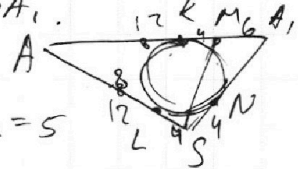
| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~н.д. (н.д.) от на другой странице!)~~

Продолжим 'рассматривать' $\triangle ASA_1$.
 из условия н.д. следует, что
 окружность с радиусом $r = r_{сфера} = 5$
 вписана в $\triangle ASA_1$; K, L и N — точки касания
 $SN = 4$. $AS = 12$; $AA_1 = 18$.
 $\angle(ABC; SBC) = \angle AA_1S$ т.к. из н.д. ясно,
 что т.к. сфера касается граней в т. M и N и ребра AS
 в т. L ,



то $AA_1 \perp BC$ и $SA_1 \perp BC$
 Найдём $\angle AA_1S$.

$$LS = SN = 4 \Rightarrow AL = 12 - 4 = 8 = AK$$

$$\Rightarrow MK = 12 - 8 = 4;$$

$$A_1M = A_1N = KM + A_1M = 4 + 6 = 10. \Rightarrow A_1S = 4 + 10 = 14$$

\Rightarrow стороны треугольника = 12; 14; 18.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$

$bc: 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^5$
 $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

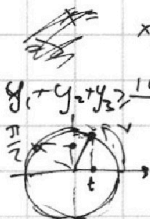
$ac: 2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{30}$
 $a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

$x_1 + x_2 \geq 9$

$x_2 + x_3 \geq 14$

$x_1 + x_3 \geq 19$

$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$



$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20,5$

$\Rightarrow 21$

$\frac{10+13+30}{2} = \frac{53}{2} = 26,5$

$\frac{9+14+19}{2}$

$= \frac{2B+14}{2} = 7+14$

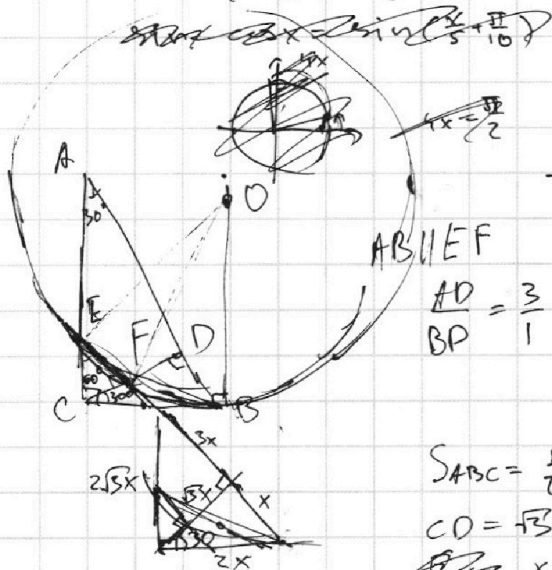
$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\sin(\arcsin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})) = t = \cos x$

$\arcsin(\cos x) =$

$\arcsin t = \arccos(\sqrt{1-t^2})$



$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{BP} = \frac{3}{1}$

$EF \cdot CF \dots$

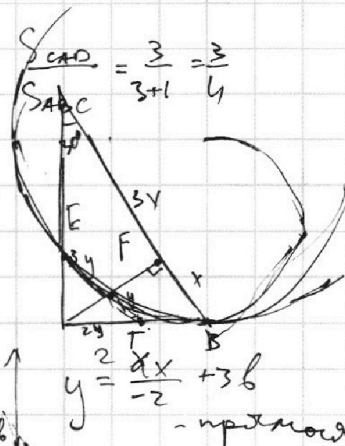
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$

$CD = \sqrt{3}x$

$\frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$ax + 2y - 3b = 0$

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 3)^2) = 0$

$x^2 + y^2 = 9 \quad (x-6)^2 + y^2 = 4$

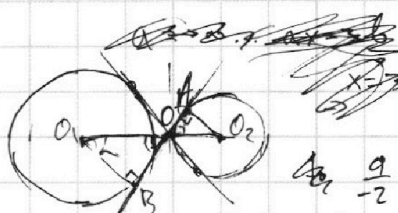
$\Rightarrow \frac{1}{4} \sqrt{y = \frac{ax}{-2} + 3b}$

$BF^2 = GF \cdot FE =$

$= 4(x-y)^2 = y \cdot 4y^2 = 4y^3$

$= 4y^3$

$\frac{9}{-2}$ - показывается
 наклон
 прямой



$\frac{9}{-2} = \frac{2}{5} = \frac{3}{50}$

$0, 0,2 = 6 = \frac{5}{11}$

$\sin \alpha = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\frac{9}{-2} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\frac{\sqrt{11}}{6} \frac{1}{5x}$

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{11}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

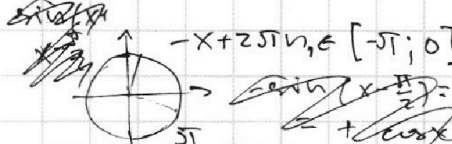
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$~~ $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ $5 \arcsin(\cos 2x) = 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$



$-x + 2\pi n_1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$10\pi n_1 + \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n_1 = 2\pi(5n_1 + 1)$$

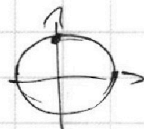
$$x = \frac{\pi}{3}(5n_1 + 1)$$

$-1 \leq -\frac{5n_1 + 1}{3} - \frac{1}{3} + 2n_1 \leq 0$ $y = \frac{3}{2}b$ $x = \frac{\pi}{3}(5n_1 + 1)$

$-1 \leq \frac{n_1 - 1}{3} \leq 0$ $-3 \leq n_1 - 1 \leq 0$ $n_1 = -4; -3; -2; -1; 0; 1$

$-4 \leq n_1 \leq 1$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}(5n_1 + 1)$

$5 \cdot \arcsin(\cos 2\pi) = \frac{5\pi}{2}$



$\arcsin(\cos 2\pi) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \dots; -\frac{14\pi}{3}; -\frac{14\pi}{3}; -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \dots$

$\log_3(5xy) = \log_3 x + \log_3 5y$

$x^5 + y^5 = x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5$

$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = \log_3^2 243 - 8$

$\log_3^4(5y) + 2 \log_3^3 5 = \log_3^2 27 - 8$

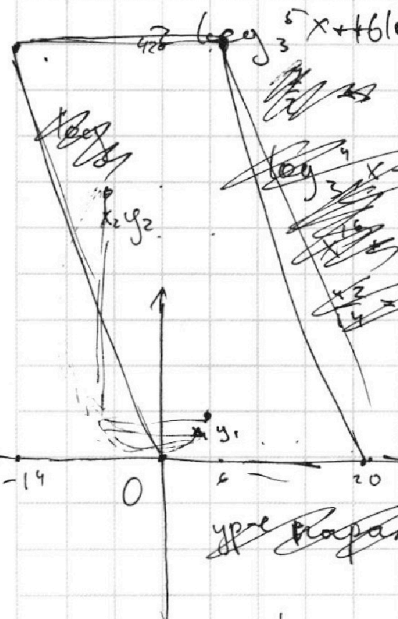
$xy = 5$ $243 = 3^5$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$2 \log_3^5 x + 2 \log_3^5(5y) + 6 \log_3^3 5xy = 0$

$2 \log_3^5 x + 6 \log_3^3 x + 7 = 0$

$\log_3^4(5y) + 2 \log_3^3 5y = 2 \log_3^3 5xy + \log_3^3 5y$



~~$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 x + 7 = 0$~~

$2 \log_3^5(5y) - 7 + 6 \log_3^3 5y = 0$

$2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3^3 5y - 7 = 0$

$2 \log_3^3 5xy + \log_3^3 5y = 0$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ $3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

| | |
|-------------|-------------|
| $y_2 - y_1$ | $x_2 - x_1$ |
| 42 | 11 |
| 3 | 10 |
| 6 | 9 |
| ... | ... |
| ... | ... |
| 0 | 0 |
| 36 | 1 |
| 33 | -1 |
| ... | ... |
| ... | -2 |

$y_2 - y_1 = 3$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

$1 = 11 - x_1 + x_2$

$x_1 - x_2 = 10$ $3(11 - x_1 + x_2)$

$0 \leq y_2 - y_1 \leq 42$ $20 \leq x_2 - x_1 \leq 20$ $42 = 3 \cdot 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem involving a pyramid and a sphere.

Diagrams:

- Top left: A 3D diagram of a pyramid with a sphere inscribed inside it. Points A, B, C, S are labeled. A cross-section through the apex S and the center of the sphere is shown.
- Top right: A 2D diagram of a triangle with a circle inscribed inside it. Points A, K, M, P, L, S are labeled.
- Middle left: A 2D diagram of a triangle with a circle inscribed inside it. Points A, B, C, M, N, S, K are labeled.
- Middle right: A 2D diagram of a triangle with a circle inscribed inside it. Points A, B, C, M, N, S, K are labeled.
- Bottom left: A 2D diagram of a triangle with a circle inscribed inside it. Points A, B, C, M, N, S, K are labeled.
- Bottom right: A 2D diagram of a triangle with a circle inscribed inside it. Points A, B, C, M, N, S, K are labeled.

Equations and Calculations:

$$18^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos \alpha = 12^2$$

$$AM = AS = 12$$

$$AK = 18 \Rightarrow AA_1 = 18$$

$$SN = 4 \quad BC = 12$$

$$r = 5$$

$$S_{ABC} = 90 \text{ (check?)}$$

$$AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

$$9^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos \alpha = 6^2$$

$$\cos \alpha = \frac{81 + 49 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{94}{14 \cdot 9}$$

$$S_{BAM} = 18 \cdot \sin \angle BAM = \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\sin \angle BAM = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$S_{BEM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot \cos 2\alpha = \dots$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{94}{126} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{94 + 126}{126}}{2}} = \sqrt{\frac{220}{252}} = \sqrt{\frac{110}{126}} = \sqrt{\frac{55}{63}}$$

$$BM = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{110}{63}}{2}} \cdot 6 = 12 \sqrt{\frac{1 + \frac{110}{63}}{2}}$$

$$CM = 12 \sqrt{\frac{1 - \frac{110}{63}}{2}}$$

$$S_{BEM} = 144 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{110}{63}} \sqrt{1 + \frac{110}{63}} = 81 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6} \cdot 81 \cdot 2 = 5 \cdot 27$$

Other notes:

- "Don't you Dave"
- "очень любопытная оценка"
- "или нулистая помага?"
- "12, 14, 18"
- "4024"
- "110 / (6 * 18) = 55 / (3 * 18)"
- "220 / (12 * 18) = sin alpha"
- "81 * 30 = 2430"
- "144 * 9 / 4 = 324"
- "81 * 2 * sqrt(1 - 11/36) = 5 * 27"

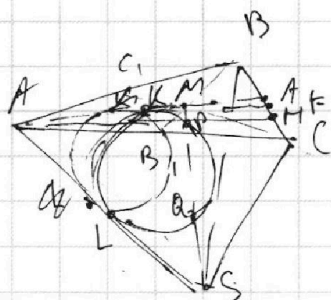
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AM = \frac{180}{12} = 15$$

$$SP = MQ$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$

$$AS = BC = 12$$

$$(2b-c)(2c-b)$$

$$AK = AL$$

$$SL^2 = SQ \cdot SP =$$

$$= SQ \cdot MQ = MP \cdot MQ =$$



$$(2a+2b-c)(2a+2c-b) = 4a^2 + 2ab + 2ac + 5bc - 2c^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow \triangle ASM \text{ - p.d. } AM = AS$$

$$\Rightarrow AM = BC$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot BC = 18$$

$$AA_1^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$$

$$4CC_1^2 = 2(BC^2 + AC^2) - AB^2$$

$$4BB_1^2 = 2(BC^2 + AB^2) - AC^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 4 \cdot 36 + 12^2 = 216$$

$$= 18^2 + 12^2 = 324$$

$$5bc - 2c^2 - 2b^2 = ?$$

$$t = \log_3 x$$

$$1 \cdot x - 1 \cdot x \cdot 36$$

$$\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 39$$

$$7 \cdot x - 7 \cdot x \cdot 42$$

$$t + 0 = \frac{7}{2} \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x$$

$$5 \arcsin(-1) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 + 3 \cdot 8$$

$$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2} t + 8 = 0$$

$$8a^5 + 16 = 8(a^5 + 2) \Rightarrow 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$(a+b)(2a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 16(a+b) = 0$$

$$2 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$42 \geq y_2 + y_1 \geq -42$$

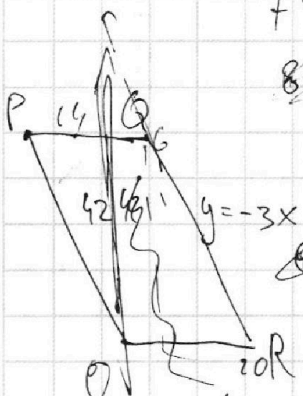
$$3(x_2 + 14) + y_2 - 42 = 33$$

$$\begin{cases} 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \\ y_1 \leq -3x_1 + 60 \\ y_2 \leq -3x_2 + 60 \\ y_1 \geq -3x_1 \\ y_2 \geq -3x_2 \end{cases}$$

$$42 \geq y_1 \geq 0$$

$$42 \geq y_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq -3x_1 \quad y_2 \geq -3x_2$$



$$y_1 \leq -3x + 60$$