



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

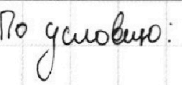
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По условию:  $\begin{cases} ab = 2^9 3^{10} 5^{10} k \\ bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} n \\ ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} m \end{cases}$   $n, m, k \in \mathbb{N}$

Т.к. 2, 3 и 5 - простые числа, то можно сказать, что  $a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} A$ ,  $b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} B$ ,  $c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} C$ , где  $a_i, b_i, c_i \geq 0$  и  $\in \mathbb{Z}$  и  $A, B, C \in \mathbb{N}$ .

примем:  $\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & b_1 + c_1 \geq 14 & a_1 + c_1 \geq 19 \\ a_2 + b_2 \geq 10 & b_2 + c_2 \geq 13 & a_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 \geq 10 & b_3 + c_3 \geq 13 & a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases}$

Сначала рассмотрим степень двойки:  $\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \end{cases}$

попробуем решить систему  $\begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ a_2 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - b_1 \\ 9 - b_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases}$ , отсюда  $\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

Пусть  $x \geq 9, y \geq 14, z \geq 19$ , тогда:  $\begin{cases} a_1 + b_1 = x \\ b_1 + c_1 = y \\ a_1 + c_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = x - b_1 \\ b_1 + c_1 = y \\ x - b_1 + c_1 = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = x - b_1 \\ b_1 + c_1 = y \\ x + 2c_1 = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{x+z-y}{2} \\ b_1 = \frac{y-z+x}{2} \\ c_1 = \frac{y+z-x}{2} \end{cases} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = \frac{x+z-y+y-z+x+y+z-x}{2} = \frac{x+y+z}{2}$ , таким образом,

увеличивая  $x, y, z$  мы увеличиваем сумму степеней 2-ки, чего нам не надо  $\Rightarrow \min$  сумма степеней 2-ки  $\lceil \frac{9+14+19}{2} \rceil = 21$

Аналогично:  $\min$  ст. 3-ки  $\lceil \frac{10+13+18}{2} \rceil = 21$

$\min$  ст. 5-ки  $\lceil \frac{13+10+30}{2} \rceil = 24$

$abc = 2^{a_1+b_1+c_1} 3^{a_2+b_2+c_2} 5^{a_3+b_3+c_3} = 2^{21} 3^{21} 5^{24}$  (числа A, B и C можно приравнять к 1, т.к. условие не меняется, а произведение станет больше)

Ответ:  $2^{21} 3^{21} 5^{24}$

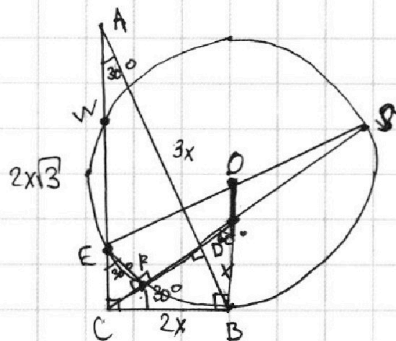
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к.  $AB \parallel EF$  и  $AB \perp CD$ , то  $EF \perp CD \Rightarrow$   
 $\angle CEF = \angle CAB$  (как накр. иск.)

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle BAC$  (по двум углам).

$\square AD = 3x, BD = x$ , тогда.

$$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = x\sqrt{3}$$

По т. Пиф.:  $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x, AC = \sqrt{9x^2 + 8x^2} =$

$$\sin \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{x\sqrt{3}}{2x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CAD = \angle CEF = 30^\circ$$

Пусть  $FS \cap (окр.) = \{P, S\}$ , тогда т.к.  $\angle EFS = 90^\circ$ , то  $ES$  - диаметр и  $O \in (ES)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. } \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ при } t \in [-1; 1], \text{ то}$$
$$5 \arcsin t \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \cdot 2.$$
$$-5\pi \leq 2x + \pi \leq 5\pi; \quad -6\pi \leq 2x \leq 4\pi; \quad -3\pi \leq x \leq 2\pi - \text{ограничение.}$$

$$\text{Т.к. } \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a \Rightarrow$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x).$$

Рассмотрим несколько случаев: 1)  $x \in [-3\pi; -2\pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} - (-(x+2\pi))\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} + 5(x+2\pi) = x + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi + 5x + 10\pi - x, \quad 12\pi = -4x \Rightarrow x = -3\pi$$

$$2) x \in [-2\pi; -\pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} - (x+2\pi)\right) = x + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2} - 5x - 10\pi = x + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 10\pi = 6x, \quad \frac{5\pi - \pi - 20\pi}{2} = 6x, \quad -8\pi = 6x \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$3) x \in [-\pi; 0]: 5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{5\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi = -4x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$4) x \in [0; \pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$5) x \in [\pi; 2\pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} - (-(x-2\pi))\right) = x + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2} + 5(x-2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 5x - 10\pi = x, \quad -8\pi = -4x \Rightarrow x = 2\pi$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + by - 3b = 0 - \text{прямая, угл. коэф. } -\frac{a}{2} \text{ и т.п. с } O_y (0; \frac{3b}{2})$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 - \text{две окружности}$$

$$x^2 + y^2 = 9 - \text{окр-ть с у. в } (0; 0) \text{ и } R = 3.$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

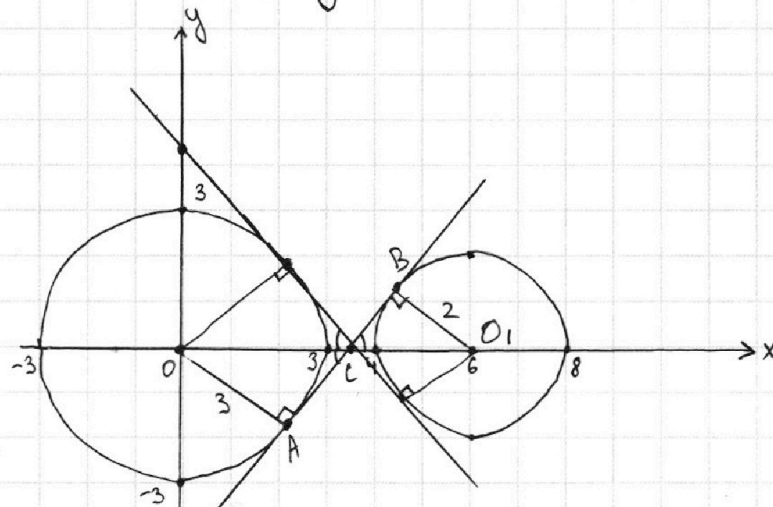
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 32 = 36 \Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = 4 - \text{окр-ть с у. в } (6; 0) \text{ и } R = 2$$

Т.к. прямая с окр-тью имеет не более 2-х и. пересек., а нам необходимо 4, то прямая должна пересекать обе окр-ти в 2-х точках, тогда прямая должна касаться между внутр. касательными этих окр-тей.

A и B - точки касания,  
 $AB \perp OO_1 = C$ .

$\angle \alpha = \angle BCO_1$  - угол между касательной и  $Ox$ .

$\angle OAC = \angle O_1BC = 90^\circ$  (радиус в т. кас.)  
 $\angle OCA = \angle O_1CB$  (как верт.)



$$\Rightarrow \triangle OCA \sim \triangle O_1CB: \begin{cases} \frac{OC}{CO_1} = \frac{3}{2} \\ OC + CO_1 = 6 \end{cases}, \text{ отсюда}$$

$$OC = \frac{18}{5}, CO_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow \sin \angle BCO_1 = \frac{BO_1}{CO_1} = \frac{2}{\frac{12}{5}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \angle \alpha = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\cos \angle BCO_1 = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{11} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

Другая внутренняя кас. будет образовывать с  $Ox$  угол  $\pi - \alpha$ .  $\Rightarrow$  её угл. коэф.  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

$$\text{Таким образом: } -\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow -\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

для каждого  $a$  можно будет найти такой  $b$ , что прямая пересекает окр-ти в 4-х точках;

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8, \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad | \cdot 2$$

$$2 \log_3^4 x + 12 \log_x 3 = 5 \log_x 3 - 16; \quad 2 \log_3^4 x + 7 \log_x 3 + 16 = 0;$$

$$2 \log_3^4 x + \frac{7}{\log_3 x} + 16 = 0, \quad t = \log_3 x, \quad t \neq 0, \quad \text{тогда:}$$

$$2t^4 + \frac{7}{t} + 16 = 0, \quad 2t^5 + 7 + 16t = 0, \quad f(t) = 2t^5 + 16t + 7 - \text{монот. возраст.}$$

$\Rightarrow f(t) = 0$  - не более одного корня.

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{(5y)^2} (3^4) - 8, \quad \begin{cases} y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \quad | \cdot 2$$

$$2 \log_3^4(5y) + 4 \log_{5y} 3 = 11 \log_{5y} 3 - 16$$

$$2 \log_3^4(5y) - 7 \log_{5y} 3 + 16 = 0, \quad \text{пусть } t = \log_{5y} 3$$

$$2 \log_3^4(5y) - \frac{7}{\log_3 5y} + 16 = 0, \quad t = \log_3 5y, \quad t \neq 0, \quad \text{тогда:}$$

$$2t^4 - \frac{7}{t} + 16 = 0, \quad 2t^5 - 7 + 16t = 0, \quad 2t^5 + 16t - 7 = 0.$$

$$f(\log_3 x) = 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7$$

$$g(\log_3 5y) = 2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7$$

, т.к. обе функции монот. возраст.,  
то  $f(\log_3 x) = 0$  и  $g(\log_3 5y) = 0$  имеют  
ровно один корень.

Заметим, что если  $f(x_0) = 0$ , то  $-x_0$  - корень ур-я  $g(\frac{1}{x}) = 0$ :

$$2(-x_0)^5 + 16(-x_0) - 7 = -2x_0^5 - 16x_0 - 7 = -(2x_0^5 + 16x_0 + 7) = 0, \quad \text{таким образом,}$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0 \Leftrightarrow \log_3(5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

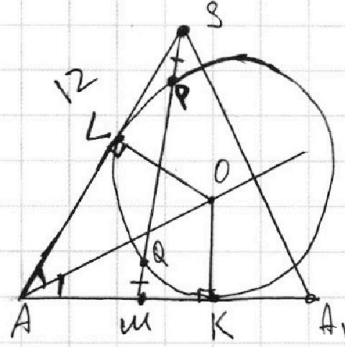
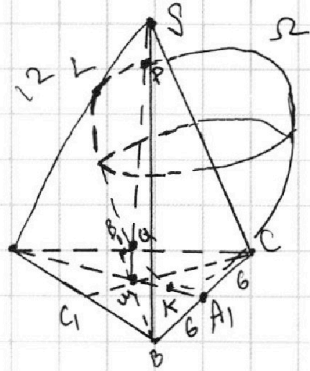
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что ц. окр-ти  
O лежит на биссектрисе  
 $\angle SAM$ , т.к. равноудалён от  
SA и SK.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:  $x > 0, x \neq 1, \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \cdot 2.$

$$2 \log_3^4 x + 12 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 16$$

$$2 \log_3^4 x + 7 \log_x 3 + 16 = 0$$

$$2 \log_3^4 x + \frac{7}{\log_3 x} + 16 = 0, t = \log_3 x, 2t^5 + 7 + 16t = 0, 2t^5 + 16t + 7 = 0.$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \cdot 2.$$

$$2 \log_3^4(5y) + 4 \log_{5y} 3 = 11 \log_{5y} 3 - 16, 2 \log_3^4(5y) - 7 \log_{5y} 3 + 16 = 0.$$

$$2 \log_3^4(5y) - \frac{7}{\log_3 5y} + 16 = 0, b = \log_3 5y$$

$$2b^4 - \frac{7}{b} + 16 = 0, 2b^5 + 16b - 7 = 0, 2b^4 + 16 = 0.$$

$$2(-x)^5 - 16x + 7 = -2x^5 - 16x + 7 = 0, 2x^5 + 16x - 7 = 0. \text{ Верно.}$$

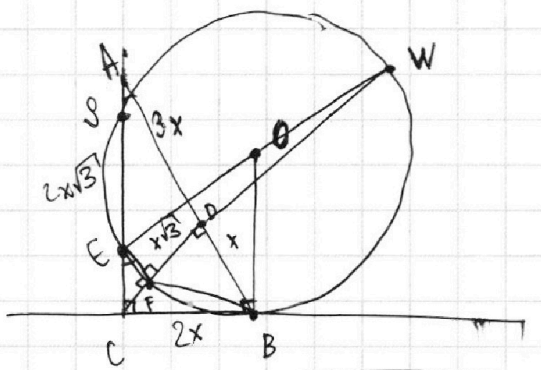
$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0, \log_3(5xy) = 0, 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$\log_3 x - \log_3 5y$  - *сумма величин*.  $\log_3 x + \log_3 5y = a.$

$$2(a - \log_3 x)^5 + 16(a - \log_3 x) - 7 = 2(a - t)^5 + 16(a - t) - 7 = (a - t)(2(a - t)^4 + 16) - 7 = (a - t)(2(a^4 - 4a^3t + 6a^2t^2 - 4at^3 + t^4) + 16) - 7 =$$

$$(a - t)^4 = (a - t)^2)^2 = (a^2 - 2at + t^2)^2 = (a^2 - 2at)$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0.$$



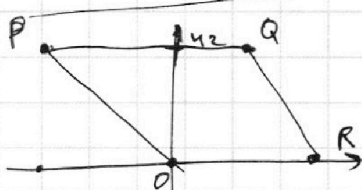
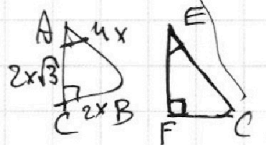
$S_{CEF} = \sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}.$   
 С.Т. -  $d^2 - R^2$

$S_{ACD} = CB^2 = CE \cdot AS.$

$$\sqrt{9x^2 + 9x^2} = \sqrt{12x^2} = 2x\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + 9x^2} = 2x$$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CE}}$



$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33.$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33, \Delta y = 33 - 3\Delta x.$$

$\Delta y - \text{кр. } 3.$   
 $\Delta x - \text{кр. } 3.$



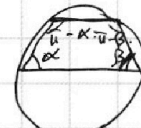
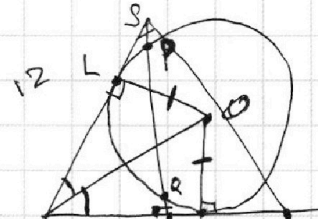
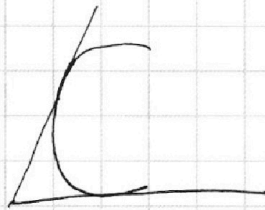
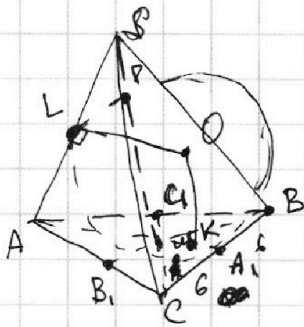
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

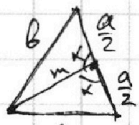
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \pi - \alpha + \beta &= \dots \\ \pi - \beta + \alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$



$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot m \cdot \cos x$$

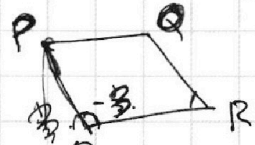
$$c^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot m \cdot \cos x$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b^2 - c^2 = 2m^2 - \frac{a^2}{2}, \quad 2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2$$

$$m = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$$

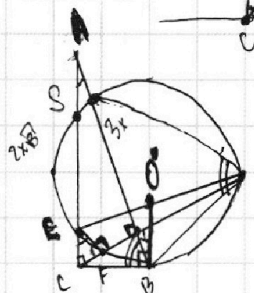
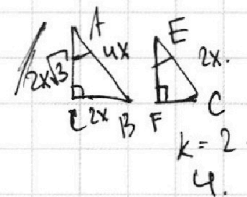
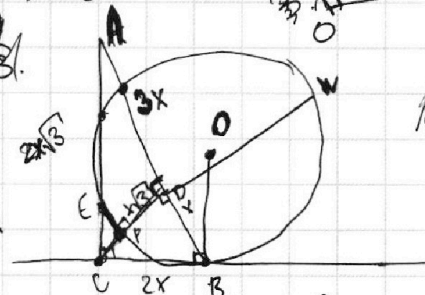
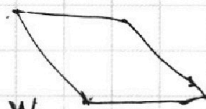
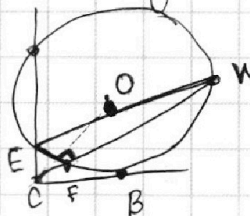
$$4 + 4 + 10 = 18, \quad 16x^2 - 12x^2$$



~~$$3x^2 + 4y^2 = 33, \quad 2b^2 + 2a^2 - c^2 = 4c^2 - 2b^2 - c^2$$~~

$$3x^2 + y^2 = 33, \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

$$3(x^2 - x) + y$$



$$CB^2 = CE \cdot CS$$

$$EF^2 + FW^2 = \dots$$

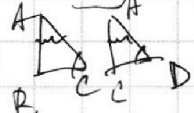
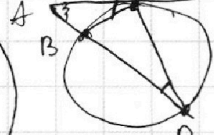
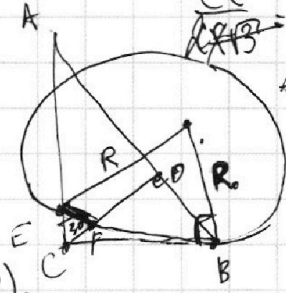
$$AE = 2x\sqrt{3} - 2x = 2x(\sqrt{3} - 1)$$

$$\frac{CE}{CF \cdot FB} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow CB \cdot \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

~~$$CB^2 = CF \cdot CB$$~~

~~$$CB^2 \cdot \frac{1}{CB} = CF \cdot (CF + 2R)$$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

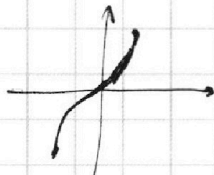
$$-\frac{5\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \cdot 2 \quad -5\pi \leq 2x + \pi \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq 2x \leq 4\pi$$

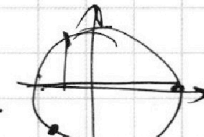
$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$



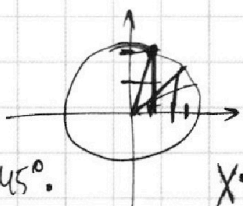
$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{если } x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$\frac{5\pi - 10x = 2x + \pi}{4\pi = 12x} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



$$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(\cos(-45^\circ)) = 45^\circ$$

$$x =$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$4 - 20 = -16 - (x + 2\pi)$$

$$\frac{2}{3\pi} + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\cos(-3\pi) = \cos(3\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$5(\arcsin(-1)) = -\frac{5\pi}{2} \quad \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6} \quad -\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = -\frac{8\pi + 9\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$5 \arcsin(0) = 0$$

$$\cos 2\pi = 1 \quad 5 \arcsin 1 = \frac{5\pi}{2}$$

$$2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

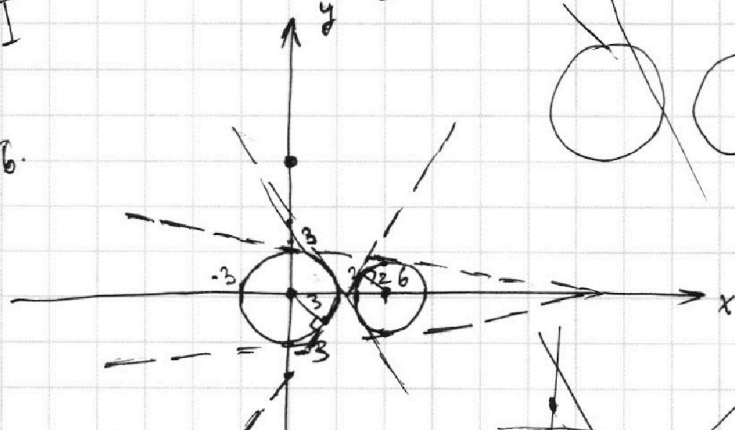
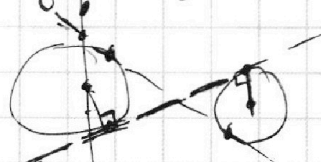
$$x^2 + 12x + 36 + y^2 + 32 = 36$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$2y = 36 - ax$$

$$y = \frac{3}{2}6 - \frac{a}{2}x$$

$$\frac{3 \cdot 5}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$



$$ax + by + c = 2$$

$$3y = 12 - 2y$$

$$5y = 12$$

$$y = \frac{12}{5}$$

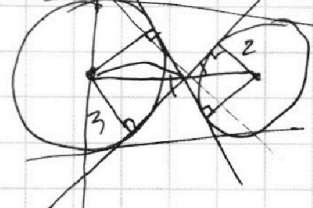
$$x = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = \frac{y}{r} = \frac{12/5}{r}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{y}$$

$$x + y = 6$$

$$x = 6 - y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$5x + 16t + 7 = 0! ?$$

$$t + 5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$(\log_3^4 x + 6 \log_x 3) (\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3)$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{x^2} 3^5 + \log_{xy^2} 3 + 16$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = (\log_3^2 x - \log_3^2 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) = \log$$

ab = НОД · КОК.

$$2a + b + c \quad 3a + b + c \quad 5a + b + c$$

$$\begin{cases} a + b + c \geq 28 - a \\ a + b + c \geq 23 - b \end{cases}$$

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{b + 19 + a}{2} > \frac{a + 2b + c}{2}$$

$$\begin{cases} 2a + b + c > 28 \\ a + 2b + c > 23 \\ a > 28 - b - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a + c = 19 \\ b + c = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 9 - a \\ a + c = 19 \\ 9 - a + c = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c + 9 = 33 \\ 2c = 24 \\ c = 12 \\ a = 7 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b_1 = x \\ a_1 + c_1 = y \\ b_1 + c_1 = z \\ x - b_1 + c_1 = y \\ b_1 + c_1 = z \\ x + 2c_1 = z + y \end{cases}$$

$$\frac{z + y - x + z - y + x + x - z + y}{2} = \frac{z - y + x}{2}$$

$$\frac{y - y + z - x}{2} = \frac{2y - y - z + x}{2} = \frac{y - z + x}{2}$$

$$\frac{2z - y + z - x}{2} = \frac{2z - y - z + x}{2} = \frac{x + z - y}{2}$$

$$\frac{9 + 19 + 14}{2} = \frac{28 + 14}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$ay = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad a_1 = \frac{2}{x} - \frac{z - y + x}{2}$$

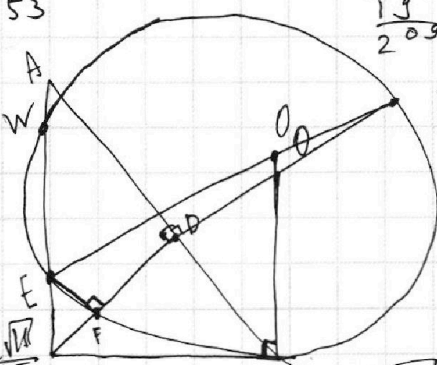
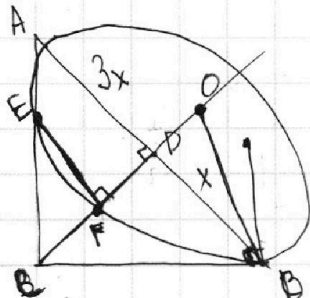
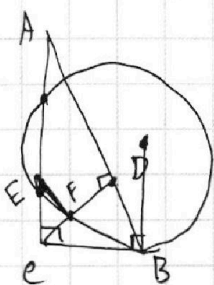
$$-10 + 18 + 13 = 28 + 13 = 41$$

$$\frac{13}{40} \quad \frac{19}{53}$$

$$54 : 2 = 27$$

$$\frac{19}{203} \quad \frac{1}{36}$$

$$\frac{36}{11} - 1 = \frac{25}{11} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$



$$\frac{2\sqrt{11}}{5} : 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1 - \frac{44}{25}} = \sqrt{1 - \frac{25}{44}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{44}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{44}} = \frac{3}{\sqrt{44}}$$

$$\sqrt{\frac{144}{25} - \frac{25}{44}} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{25}{11} - 1 = \frac{14}{11} = \frac{\sqrt{154}}{11}$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$