МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$, $bc \vdots (2^{14} 3^{21} \cdot 5^{13})$, $ac \vdots (2^{16} 3^{25} \cdot 5^{28}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $ab \cdot bc \cdot ac \vdots (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$; $(abc)^2 \vdots (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$;

Степень вхождения тройки в число abc – целое число, не меньшее 30 (в противном случае $(abc)^2$ имеет степень 3 не более чем 58)

т.е. вывод: $abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, при этом $ac \vdots 5^{28} \Rightarrow abc \vdots 5^{28}$.

Итог: $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (т.к делится на это число)

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

$\underline{abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$

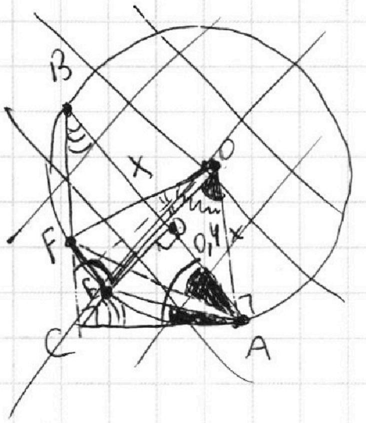
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

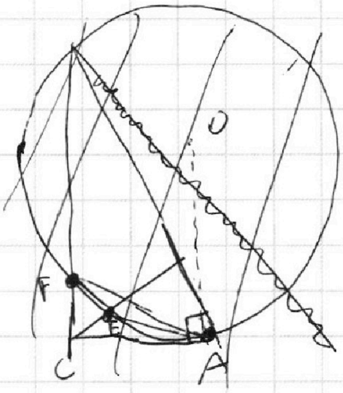
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

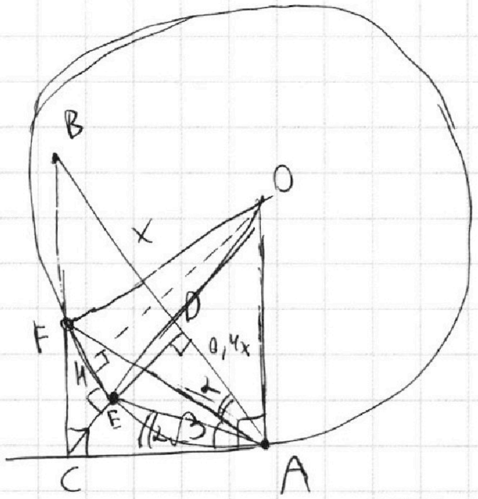
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $BD = x$, $DA = 0,4x$. O — центр окр.







Пусть также $\angle CAE = \alpha$, $\angle CAF = \beta$

$\angle FOA = 2\angle FAC$; $\angle EOA = 2\angle CAE$
$= 2\beta$ $\qquad = 2\alpha$

Проведем OH — медиану и биссектрису, высоту в $\triangle OFE$

$\angle FOH = \angle HOE$. При этом т.к. $CD \perp BA$,

$FE \parallel BA$ ($\Rightarrow FE \perp CD$), $OH \perp FE$, то $OH \parallel CD$. (1)

а также $CA \perp OA$ и $CA \perp BC \Rightarrow BC \parallel OA$ (2). Из (1) и (2) следует, что $\angle HOA = \angle BCD$

$\angle BCD = 90 - \angle B = \angle BAC$. Т.к. $\frac{\angle HOA + \angle AOE}{2} = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \angle AOH = \angle BAC$

то $\angle BAC = \alpha + \beta = \angle \overset{\beta}{FAC} + \angle FAB$, а значит $\angle FAB = \alpha$.

По двум углам подобны $\triangle CAE$ и $\triangle BAF$ ($90 - \angle BAC = \angle B = \angle DCA$, $\alpha = \angle EAC = \angle FAB$)

1. $\frac{AC}{BA} = \frac{BF}{CE}$ $\quad CD^2 = AD \cdot DB$; $CD = \sqrt{0,4}\,x$. По т. Пиф.: $AC = \sqrt{(0,4x)^2 + (\sqrt{0,4}x)^2} = \sqrt{0,56}\,x$

$BC = \sqrt{(1,4x)^2 - (0,56)x^2} = \sqrt{1,4}\,x$; Из **1.** $CE = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} BF$; $CF = CE \cdot \frac{BC}{CD}$

$CF = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} BF \cdot \frac{\sqrt{1,4}}{\sqrt{0,4}} = BF$

$\triangle CFE \sim \triangle ACD$ по 2 углам $\Rightarrow$ площади

относятся как $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{0,56x^2}{\frac{1}{4}\cdot 1,4x^2} = \frac{0,8\cdot 4}{2} = 1,6$ Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $\left[\begin{array}{l} 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2}-x+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z} \\ 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 10\left(-\frac{\pi}{2}+x+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$ ← в зависимости от $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

т.к. arccos принимает значение от 0 до π.

1) $5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$; $8x = 20\pi k - 4\pi$; $x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$

Заметим что $\arccos L \in [0;\pi] \Rightarrow 10\pi \geq 9\pi - 2x \geq 0$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$

значит $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}$; $0 \leq 5k \leq 10$; $k = 0, 1, 2$ $k\in\mathbb{Z}$

$k=0 \to x = -\frac{\pi}{2}$, $10\arccos(\cos\pi) = 9\pi + \pi$; $10\pi = 10\pi$ — верно

$k=1 \to x = 2\pi$, $10\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 9\pi - 4\pi$ — верно

$k=2 \to x = \frac{9\pi}{2}$, $10\arccos\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{2}\right)\right) = 9\pi - 9\pi$ — верно

2) $-5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$; $12x = -20\pi k + 14\pi$; $x = -\frac{5}{3}\pi k + \frac{7}{6}\pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{5}{3}\pi k + \frac{7}{6}\pi \leq \frac{9\pi}{2}$; $-3\pi \leq -10\pi k + 7\pi \leq 27\pi$; $-10 \leq -10k \leq 20$, $k\in\mathbb{Z}$

$k = -1, 0, 1, -2.$

$k=-2 \to x = \frac{10}{3}\pi + \frac{7}{6}\pi = \frac{27}{6}\pi$; $10\arccos\left(\cos\frac{27}{6}\pi\right) = 9\pi - \frac{27}{3}\pi$ — неверно

$k = -1 \to x = \frac{17}{6}\pi$; $10\arccos\left(\cos\left(\frac{14}{6}\pi\right)\right) = 9\pi - \frac{17}{3}\pi$ — верно

$k=0 \to x = \frac{7}{6}\pi$; $10\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right) = 9\pi - \frac{7\pi}{3}$ — верно

$k=1 \to x = -\frac{3}{6}\pi$; $10\arccos\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 9\pi + \frac{3\pi}{3}$ — верно

$\frac{27}{6}\pi = \frac{9\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

~~k=2 → x=~~

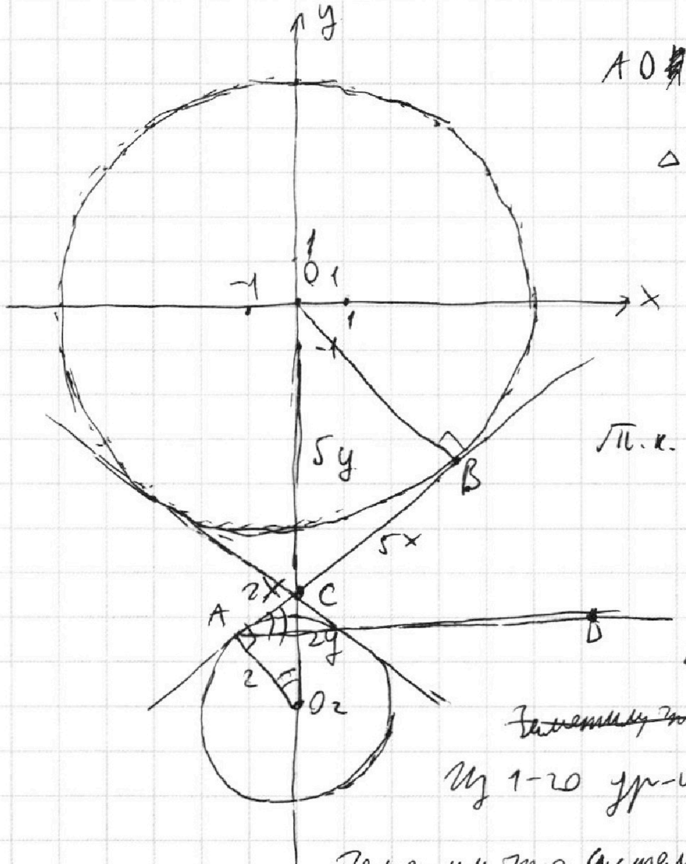
Ответ: $-\frac{\pi}{2}$, 2π, $\frac{27}{6}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Начертим графики функций: $x^2+y^2=25$
$x^2+(y+9)^2=4$



AD параллельно оси Ox.

$\triangle O_1BC \sim \triangle O_2AC$ по $\angle ACO_2 = \angle O_1CB$ и $\angle O_2AC = \angle O_1BC$

$AO_2 = \cancel{O_1B}$ 2; $O_1B = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$

Пусть $CO_2 = 2y$, $O_1C = 5y$, $AC = 2x$, $CB = 5x$.

Т.к. $5y+2y=9$, $y = \frac{9}{7}$ то по т. Пиф:

$(2x)^2 = \left(\frac{9}{7}\cdot 2\right)^2 - 2^2$;

$x^2 = \frac{81}{49} - 1$; $x = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\angle BAD = \angle CO_2A = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

~~Заметим что первое ур не равно~~

Из 1-го ур-ия: $y = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

Заметим что система имеет решение в точке пересечения прямой и окружности, при этом 4 точки пересечения достигаются только в случае когда коэфф прямой принадлежит промежуткам $\left(-\infty; -\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \cup \left(\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}; +\infty\right)$ т.к. в зависимости от b можно подобрать нужную прямую; при $k \in \left[-\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}; \arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}\right]$ таких точек пересечения не более двух.

1) $\frac{-5}{6a} < -\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$; правая часть $< 0 \Rightarrow \frac{-5}{6a} < 0$; $a > 0$

~~тогда~~ тогда: $\frac{5}{\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}} > 6a$; $\frac{5}{6\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)} > a > 0$

2) $-\frac{5}{6a} > \arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9} > 0$; $6a < 0$, $a < 0$.

$\frac{-5}{\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}} < 6a$; $\frac{-5}{6\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}} < a < 0$

3) $a = 0$; $5x - b = 0$ — не более 1 реш.

Ответ: $\left(-\frac{5}{6\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{6\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Замена, $t = \log_{11} x$ и $n = \log_{11} 0{,}5y$

$\cancel{t^3}$ Получаем 2 ур-ия: $t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0$; $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

и $n^4 + \frac{16}{3n} + 5 = 0$; $n^5 + 5n + \frac{16}{3} = 0.$

тогда для любых ~~[illegible]~~ t и n удовл. нерав, $n^5 + 5n = -(t^5 + 5t)$

$n^5 + t^5 + 5(n+t) = 0.$

$n + t = \log_{11} x + \log_{11} 0{,}5y = \log_{11} xy \cdot 0{,}5 = \log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11} xy;$

$xy = 11^{(n + t - \log_{11} \frac{1}{2})}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№3 $10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=9\pi-2x$

$\arccos\alpha\in[0;\pi] \Rightarrow 9\pi-2x\in[5\pi;5\pi]$

$-5\pi\le 9\pi-2x\le 5\pi;\quad -7\pi\le x\le -2\pi$

$-10\le -10k\le 10$

$$\left[\begin{aligned}&\arccos\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\tfrac{\pi}{2}-x+2\pi k,k\in Z\\&\arccos\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\tfrac{\pi}{2}+x+2\pi k,k\in Z\end{aligned}\right.$$

7, 6

$7{,}75\ge k\ge 5{,}25$

$-15{,}5\le -2k\le -10{,}5$

$-7\le 1{,}5-2k\le -2$

$10\left(\frac{\pi}{2}-x+2\pi k\right)=5\pi-2x$

$x=9\pi-\frac{\pi}{2}-2\pi k=\pi(8{,}5-2k)\in[-7\pi;-2\pi]$

$k=6,7$

$\left(t^5+5t-\frac{16}{3}\right)\left(n^5+5n+\frac{16}{3}\right)=0$

$10\left(-\frac{\pi}{2}+x+2\pi k\right)=9\pi-2x$

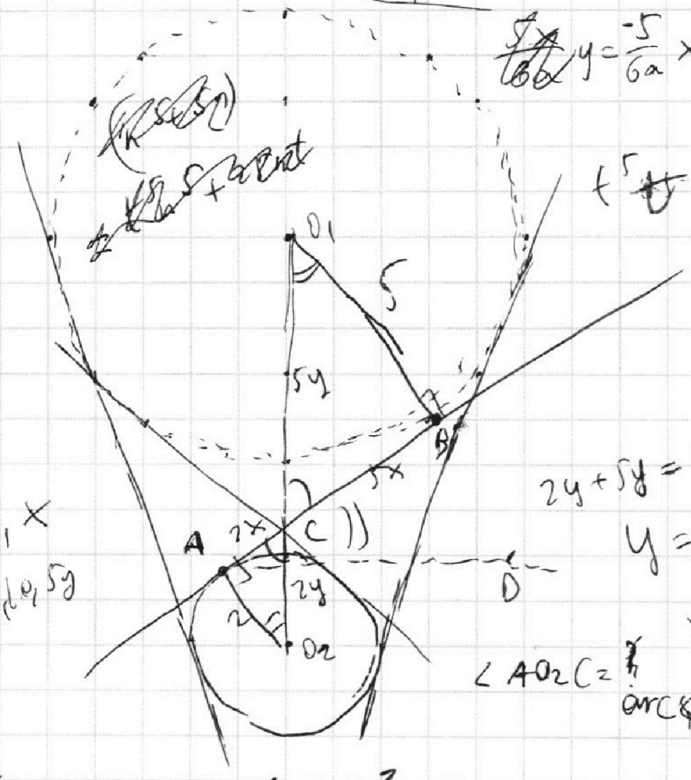
$8x=\frac{\pi(7{,}5-2k)}{3}$

$y=\frac{-5}{6a}x+\frac{6}{6a}$

$4=(x+a)^2+(y+a)^2$

t^5

$(2y)^2=(2x)^2+2^2$



$2y+5y=9$

$y=\frac{9}{7}$

$\left(\frac{9}{7}\right)^2=x^2+1$

$x^2=\frac{32}{49}$

$x=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\log_{11}x$

$\log_{11}(0{,}5y)$

$\angle AO_2C=$

$7x=4\sqrt{2}$

$\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)=\angle BAD=$

$t^4-\frac{6}{t}=\frac{2}{3t}-5;\quad n^4+\frac{1}{n}=\frac{-13}{3n}-5$

$t^4-\frac{16}{3t}+5=0.\quad n^4+\frac{16}{3n}+5=0.$

$t^5-\frac{16}{3}+5t=0\quad n^5+\frac{16}{3}+5n=0.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

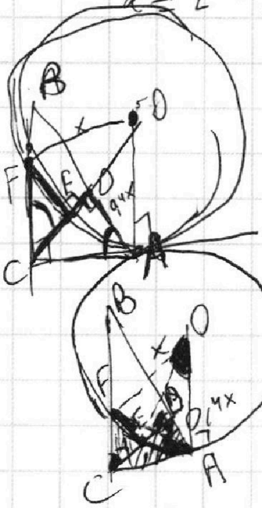
Черновик. №1. $ab \vdots 2^{6}\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$, $bc \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13}$, $ac \vdots 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$

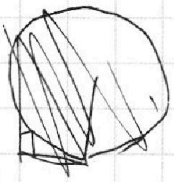
$(abc)^2 \vdots 2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}$; т.к. все 3 в (abc) - целые, в $(abc)^2$ - четн.

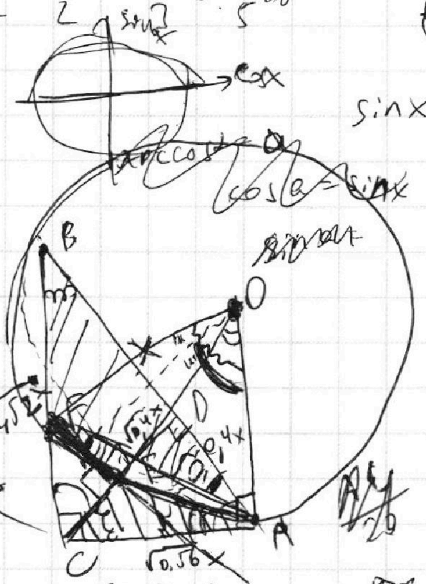
а значит $(abc)^2 \vdots 3^{60}$; $abc \vdots 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$, $ab \vdots 5^{28}$ => $abc \vdots 5^{28}$

$a = 2^{4}\cdot 3^{9}\cdot 5^{13}$; $b = 2^{2}\cdot 3^{5}\cdot 5^{0}$; $c = 2^{12}\cdot 3^{16}\cdot 5^{15}$

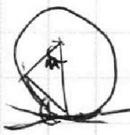
$abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$







$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$



$CD^2 = 0{,}4x^2$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{0,4}}{0,4}$

$CD = \sqrt{0,4}\,x$

$\sin \alpha = CD$

1,96

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2 A = 1 + \frac{0,4}{0,4^2} = 1 + \frac{1}{0,4}$

$\frac{BF}{FC} = \frac{DE}{EC}$

$AC^2 = (0,4 + 0,16)x^2$; $AC = \sqrt{0,56}\,x$

1,96 + 0,56 = 2,52

$\frac{AC}{BA} = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{BF}{CE}$

$CE = \frac{1,4}{\sqrt{0,56}} BF$

$\frac{2,52}{0,4} = 6,3$ $\sqrt{\frac{6,3}{0,56}} = \sqrt{\frac{9}{0,8}}$

$CF = CE\cdot\frac{BC}{CD} = \frac{1,4}{\sqrt{0,56}}BF \cdot \frac{\sqrt{2,52}}{\sqrt{0,4}}$

$BF \cdot \frac{1,4}{\sqrt{0,56}}$

$6,3 \cdot 0,56 = 0,7^2 \cdot 9 \cdot 0,8$

$CF = \frac{4,2}{\sqrt{0,8}} \cdot BF$

CF

$CF = \frac{2,1}{1,4}\cdot\sqrt{0,8}\,BF = 1,5\sqrt{0,8}\,BF$