



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Возведение в кв-м abc:  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, k \in \mathbb{Z}$   
 $bc = t \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, t \in \mathbb{Z}$   
 $ca = m \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, m \in \mathbb{Z}$

$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca \Rightarrow$

$(abc)^2 = ktm \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{\frac{41}{2}} \cdot 5^{\frac{53}{2}}$

$\Rightarrow abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$

- $9+14+19$
- $10+20+12=42$
- $10+13+18$
- $10+20+11=41$
- ~~$10+13+30=53$~~

$\sqrt{ktm}$  должно быть представлено в виде числа  $a \cdot 3^z \cdot 5^z$  минимум, при этом (т.к. abc — целое число, ведь оно состоит из произведений целых чисел)  $\sqrt{ktm}$  — тоже целое число

$\sqrt{ktm} = \sqrt{a \cdot 15^z} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \text{если } (15 \cdot x) \text{ — полный квадрат}$   
 $\Rightarrow a=15 \Rightarrow ktm=15 \Rightarrow \sqrt{ktm}$  при этом не получится

Пример сверху:  $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{15}{2}} = 3\sqrt{3} \cdot 5^{\frac{3,5}{2}} = 3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{15}$   
 $3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow ktm = 3^5 \cdot 5^7$  ✓

$\Rightarrow ktm = 15 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow$  является полным

квадратом, минимальный пример, при котором не получится целочисленность  $\sqrt{ktm}$ ,  $\Rightarrow$  числа  $k, t, m \in \mathbb{Z}$   
 Старший:  $k=15, t=27, m=125, \sqrt{ktm} = \sqrt{3^4 \cdot 5^4} = 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$  подходит

$\Rightarrow$  Получим, что  $ab = 15 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, bc = 2^7 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, ca = 12 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$

$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

$\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^3 \cdot 5^7$   
 $k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$   
 $k = 3^3, t = 5^3, m = 5^4$   
 $\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22}$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

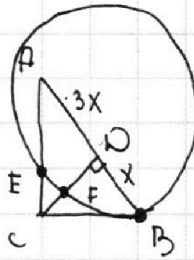
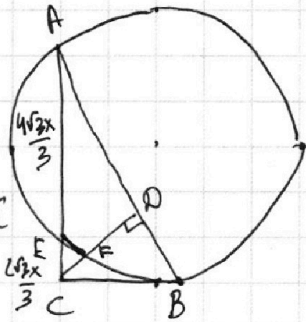
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}}$$

$$3) \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = k^2$$

k-коэффициент подобия  $\Delta ABC$  и  $\Delta CFE$



1)  $EF \parallel AB$   
 $\Rightarrow CD \perp EF$ , т.к.  
 $CD \perp AB$

$$\Rightarrow \angle EFC = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \angle DAC = \angle FEC$$

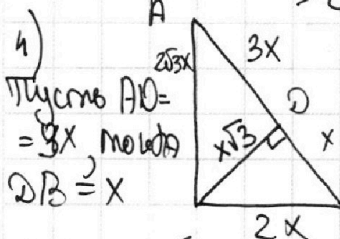
(соотв. углы пар. прямых AB и EF)

$\Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CAD$   
 по II углам

аналогично:  
 $\Delta CEF \sim \Delta CDB$   
 по II углам

$\Delta CEF \sim \Delta ABC$   
 по III углам

по II углам



$h = \sqrt{AD \cdot DB}$  — средняя геометрическая между катетами гипотенузы.

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$$

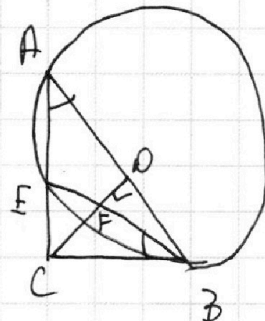
по т. Пифагора ( $\Delta CAD$ )

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

по т. Пифагора ( $\Delta CDB$ )

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x$$

5) необходимо доказать, что A — окружности. Пусть A — точка



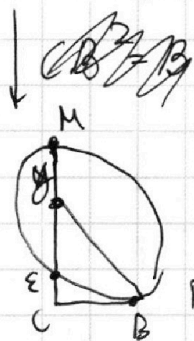
(доказано в (5))  
 б) допущение: A — окружности.  
 Тогда:  $\angle EAB = \angle BEC$  — вписаны  
 $\angle EBC = \angle BEC$  — углы между касат. и хордой

$$\Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta CEB$$

Пусть  $\angle CAB = \alpha$   
 $\text{tg } \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$  т.к.  $\text{tg } \alpha = \frac{CE}{BC}$   
 $\frac{CE}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; CE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

Тогда:  $k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x \cdot 3}{2\sqrt{3}x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$   
 $(\Delta ABC \sim \Delta CEF)$   
 $\boxed{k = 2\sqrt{3}}$

тогда:  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$



$4x^2 = CE \cdot AC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3}x = 4x^2$   
 $4x^2 = 4x^2$   
 Теорема выполняется для любой A — окружности.

$BC^2 = CE \cdot CM$  — противоречие)  
 $CB = CE \cdot AC$   
 $CM > AC$

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} & t = -1; 0; 1 \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi l}{2} & k = -2; -1; 0; 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x = -3\pi, \quad x = -\frac{4\pi}{3}, \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad x = 2\pi; \\ & x = -3\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = 2\pi; \end{aligned}$$

$$2) x = 2\pi; \checkmark$$

$$5 \arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi) = 1 \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \checkmark$$

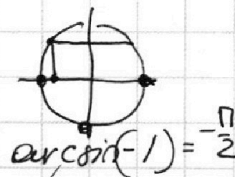
$$4) x = \frac{\pi}{3}; \quad 5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} \checkmark$$

$$5) x = -\frac{\pi}{2}; \quad 5 \arcsin(0) = 0 \checkmark$$

Теперь следует проверить полученные корни:

$$1) x = -3\pi \checkmark$$

$$5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2} \checkmark$$
$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$



$$3) x = -\frac{4\pi}{3}; = -\frac{8\pi}{6}; \checkmark$$

$$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6};$$

$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6};$$

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}; \checkmark$$

Ответ:  $-3\pi; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

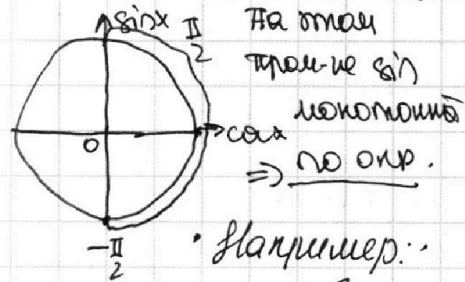
распишем ограничения уравнения

$$\cos x \in [-1; 1] \quad \forall x$$

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

т.к.

$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



Пример:  
 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$   
 $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$$

$$2) \arcsin(\sin x) = x$$

$$\arcsin(1 - \cos x) = \arcsin \cos x$$

$$5(1 - \cos^2 x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 5\cos^2 x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x^2 + x - 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$D = 1 + 40 \left(5 - \frac{\pi}{2}\right) = 100 + 1 - 10\pi = 10(10 - \pi) + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{2x + \pi}{10}, \text{ вернем от аргумента sin}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

числовые равенства двух аргументов

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$\frac{6\pi + 12x}{10} = \pi + 2\pi k$$

$$\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$6\pi + 12x = 10\pi + 20\pi k$$

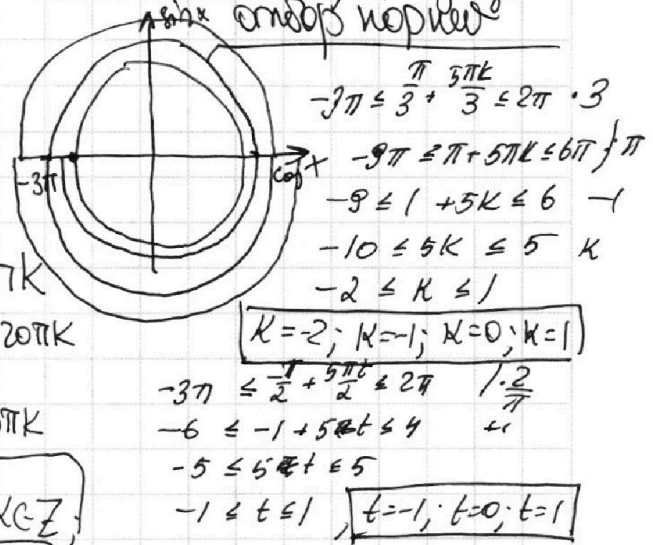
$$\sin\left(\frac{5\pi + 10x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$12x = 4\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4\pi + 8x}{10} = 2\pi t \quad 4\pi + 8x = 10\pi t$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2}, t \in \mathbb{Z}} \text{ на графике системы}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

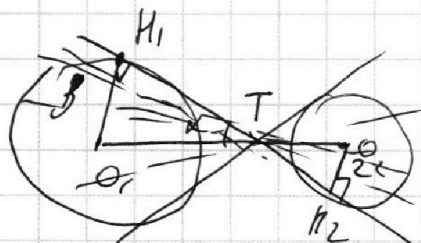
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

рассм. случай, когда крайняя касаясь обеих окружностей.



$$O_1O_2 = 6;$$

$$\triangle O_1HT \sim \triangle TO_2H_2$$

$$k = \frac{3}{2}; \quad \frac{O_1T}{TO_2} = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cdot 5}{18 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \text{аналогично } a = \frac{5}{3} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{O_1T}{6 - O_1T} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{2}; \quad a = -\frac{5}{3}$$

$$2O_1T = 18 - 3O_1T$$

$$5O_1T = 18 \Rightarrow O_1T = \frac{18}{5}$$

уменьшая  $b$ , уменьшаем высоту отоб крайней, её наименьшую ординату  $\Rightarrow$  уменьшая  $a$ , уменьшаем уклон который определяет то есть наклон прямой  $\Rightarrow$  при оплошкем оу тут возникнуть пересечения вместо касания.

$\Rightarrow$  Ответ:  $(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из точек  $A$ , найдем среднюю.  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$a=0$

$a = \frac{1}{3}$  при  $b \in [-\frac{2}{3}; 2]$

$a = -\frac{1}{3}$  при  $b \in [-2; \frac{2}{3}]$

$32a^2 - 72a + 16 = 0$

$16a^2 - 36a + 10 = 0$

$8a^2 + 18a + 5 = 0$

$D = 324 - 160 = 164$

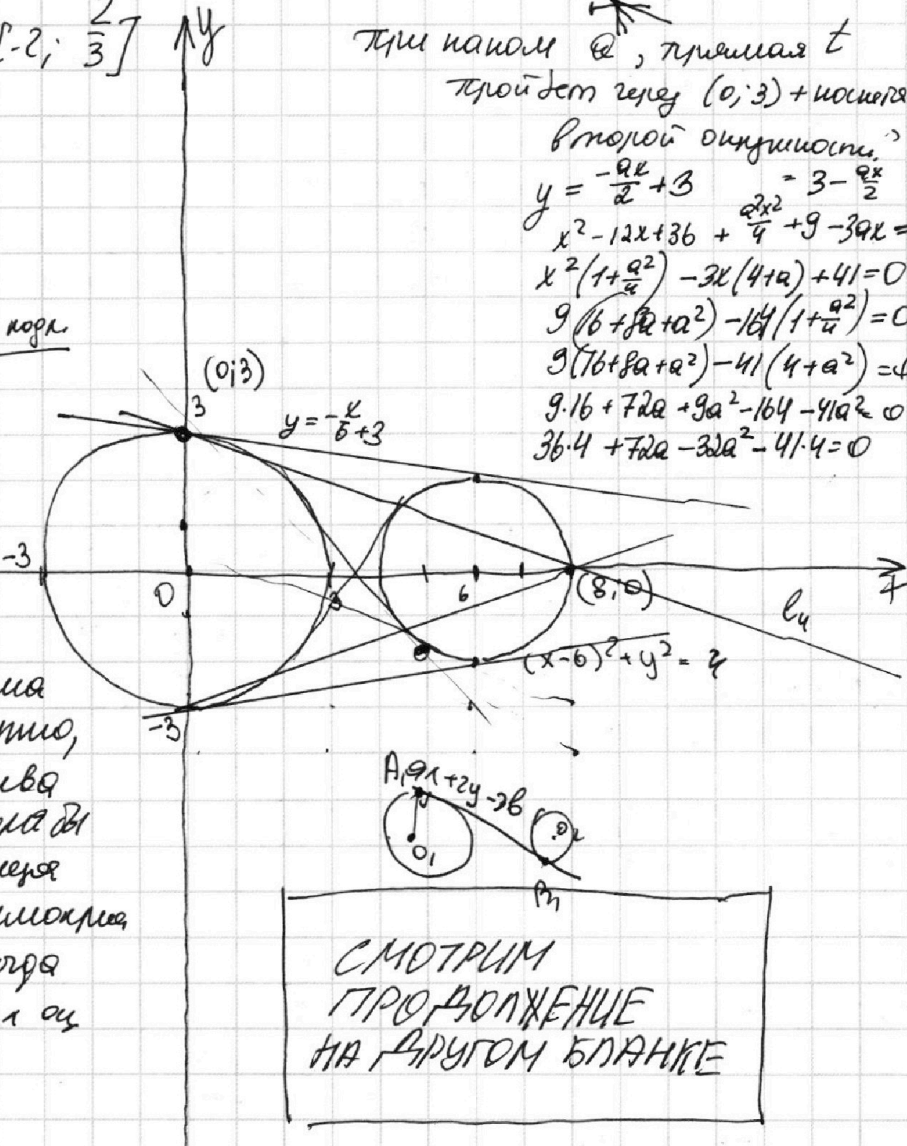
$u: \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-3}$   $a = \frac{3}{4}$  корень  
 $-\frac{3}{8}x + 3 = y$

$a = \frac{3}{4}$  подходит  
при  $b < 2$  существует

8) радиусы  $\cdot$  Нормальную  
вектору: то есть, при  
 $b = 2$

при каком  $a$ , прямая  $t$   
пройдет через  $(0; 3)$  и касаясь  
второй окружности?

$y = -\frac{a}{2}x + 3 = 3 - \frac{ax}{2}$   
 $x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2x^2}{4} + 9 - 3ax = 4$   
 $x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - 3x(4+a) + 41 = 0$   
 $9(16 + 8a + a^2) - 144(1 + \frac{a^2}{4}) = 0$   
 $9(16 + 8a + a^2) - 41(4 + a^2) = 0$   
 $9 \cdot 16 + 72a + 9a^2 - 164 - 41a^2 = 0$   
 $36 \cdot 4 + 72a - 32a^2 - 41 \cdot 4 = 0$



Чтобы найти  $b$ ,  
при котором система  
имеет 4 решения, нужно,  
чтобы среди семейства  
касательных к окружности  
находящаяся, касавшаяся  
обе окружности, рассматривая  
касательные сверху, когда  
касательная касаясь обеих

СМОТРИМ  
ПРОДОЛЖЕНИЕ  
НА ДРУГОМ БЛАНКЕ

Ответ:  $a \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax + 2y - 3b = 0$  а? равно к решения

$$-x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad / +4$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (1)$$

1) перепишем как совокупность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

2) перепишем систему:

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & -x^2 + y^2 - 12x + 32 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

3) Построим  $bc$  в координатах  $xOy$

$bc$  = график функции  $ax + 2y = 3b$

1.1 - прямая, зависящая от  $a, b$

1.1 - окружность  $(0;0), R=3$

1.1 - окружность  $(6;0), R=2$

5) задача звучит так:

При каких  $a$ , какова  $b$ , то прямая  $ax + 2y - 3b = 0$

перечесет окружности в 4 точках.

$3b$  определяет параллельную осьм:

$$\frac{a}{2} \cdot x + y = \frac{3b}{2} \quad \frac{ax}{2} + y = \frac{3b}{2}; y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

$b$  определяет высоту прямой

б)  $l_1: A \in l_1, B \in l_1, y = -\frac{x}{b} + 3$   
 $l_2: C \in l_2, D \in l_2, y = \frac{x}{b} - 3$

4) АНАЛИЗ  $ax + 2y = 3b$

$$f(x) = ax \quad 2y = 3b - ax$$

$$2y = 3b - ax \quad y = \frac{3b - ax}{2}$$

(начало коор)  $f(x) = \frac{3b - ax}{2}$   
 $0 = 3b, b = 0 \quad f(0) = \frac{3b}{2}$   
 $x = \frac{3b}{a}; \rightarrow \text{нуль } f(x)$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

4.1)  $a=0 \quad y = \frac{3b}{2}$

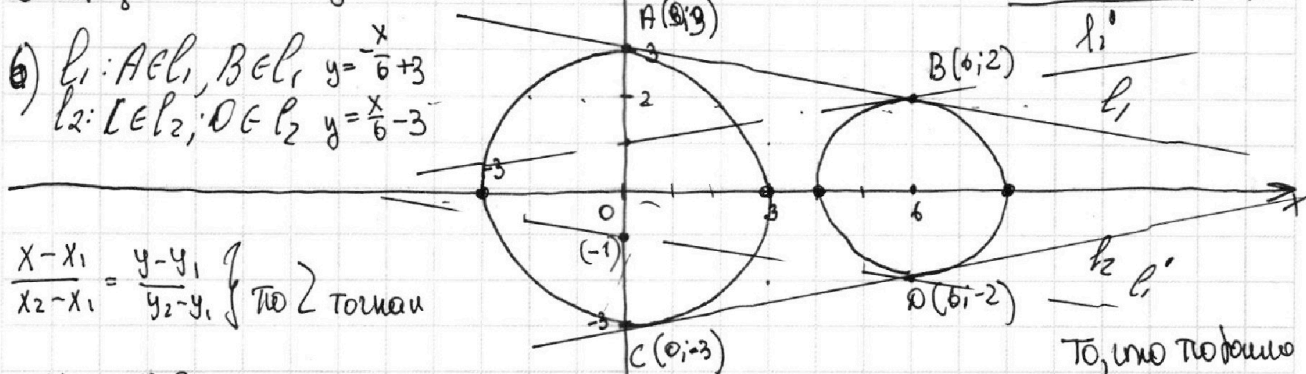
также  $b$  существует

или  $y = \frac{3b}{2}$  пересекает

4 раза (шесть) 4 решения

$b=0$ , например

\*)  $l_1: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}$   
 $a = -\frac{2}{b}$  при  $a = -\frac{1}{3}$   
 $l_2: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}$  при  $a = -\frac{1}{3}$   
 $b = -2$  касание



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{по 2 точкам}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y-3}{-1} \quad \frac{x}{b} = \frac{y+3}{1}$$

$$y = -\frac{x}{b} + 3 \quad y = \frac{x}{b} - 3$$

то, что требуется

$$a=0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

СМОТРИ ПРОДОЛЖЕНИЕ на обратной стороне листа ↓ ↓ ↓

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 7 = 0 & (*) \\ 1 \log_3 5y^5 + 16 \log_3 5y - 7 = 0 & (**) \end{cases}$$

поставим  $f(t) = \log_3 t^5 + 8 \log_3 t$   $t \neq 1, t \neq \frac{1}{5}$

$$f'(t) = 5 \log_3^4 t \cdot \frac{1}{t} \ln 3 + \frac{8}{t} \ln 3$$

$$f'(t) = \frac{1}{t} \ln 3 (5 \log_3^4 t + 8) > 0$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{5y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5y}$$

следовательно найдем  $x, y$ ;

Ответ: 0,2

(\*) + (\*\*) Найдем  $x, y$

$$= 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 2 \log_3 5y^5 + 16 \log_3 5y = 0$$

$$2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x = -2 \log_3 5y^5 - 16 \log_3 5y$$

$$\log_3 x^5 + 8 \log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y} + 8 \log_3 \frac{1}{5y}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$f'(t)$  монотонно возрастает на  $D(f)$

т.к. выполняется теорема о корнях

$$x = \frac{1}{5y}; \quad xy = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}$$

Ограничения:

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$y > 0 \quad 5y \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$x, y - ?$   
1) найдем ограничения

$$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$y \in (0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$$

$$\log_3 x = a \quad \log_3 3 = 1, a \neq 0$$

$$(1) a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \quad | \cdot 2a$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$(3) + (4) \quad 2a^5 + 2b^5 + 16a + 16b = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad (3)$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0 \quad (4)$$

$$2(a-b)(a^4 + b^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3) + 16(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 8(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

Вторая скобка - неположительный квадрат  $\Rightarrow$  всегда положительна

$$\Rightarrow a = b \quad \log_3 x = \log_{5y} 5y \Rightarrow x = 5y; \quad x \cdot y = \frac{5y}{5} = y^2$$

т.к.  $f(t) = \log_3 t$

$$\text{на } D(f) \Rightarrow \log_3 p = \log_3 d$$

$$\Leftrightarrow p = d$$

$$\log_3^4 x$$

Повторим: ①  $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad | \cdot 2 \log_3 x$$

$$2 \log_3^5 x + 12 - 5 + 8 \log_3 x = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 8 \log_3 x + 7 = 0$$

②  $\log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 5y} - 8 \quad | \cdot 2 \log_3 5y$

$$2 \log_3^5 5y + 4 = 11 - 16 \log_3 5y$$

СМОТРИМ  
ПРОФИЛИ  
НА ЭЛЕМЕНТАХ  
(на группе)  
Страница



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

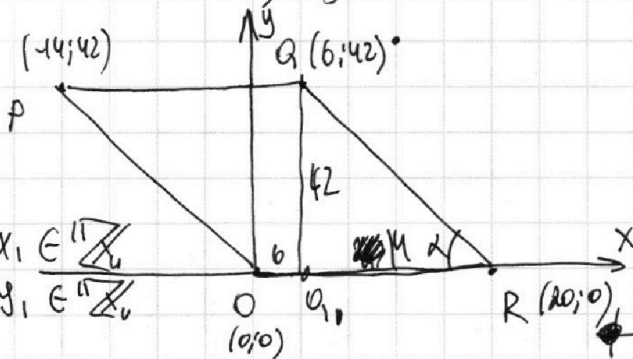
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$   $P(-14;42)$ ;  $Q(6;42)$ ;  $R(20;0)$

$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + 1 \cdot (y_2 - y_1) = 33$$

1)  $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$   
 $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$33 = 3k + p$$

$$33 = 0 + 33$$

$$33 = 18 + 15$$

$$33 = 3k + y$$

$$3k + p = 33$$

$$33 = 3 + 30$$

$$33 = 21 + 12$$

$$k = 11; p = 0$$

$$33 = 6 + 27$$

$$33 = 24 + 9$$

$$3(k-11) + (p-0)$$

$$33 = 9 + 24$$

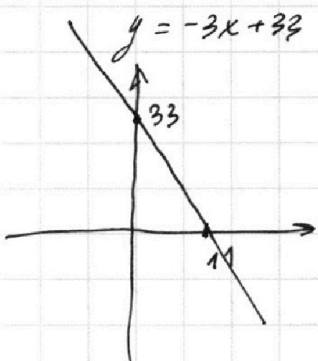
$$33 = 27 + 6$$

$$33 = 12 + 21$$

$$33 = 30 + 3$$

$$33 = 15 + 18$$

$$33 = 33 + 0$$



$$\operatorname{tg} \angle QRO = \frac{42}{14} = 3$$

$$\operatorname{tg} \angle (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$   
перенесем ~~то~~ уравнение  
получим

$$y = 33 - y_2 + 3x_2 - 3x_1$$

пусть  $x_1 = x, y_1 = y$ :

• огибающее на уравнение прямой, уравнение которой совпадает с уравнением которой совпадает с уравнением прямых PQ и OR  $\Rightarrow$  это прямая, // сторонам параллелограмма.

$y = 33$  на граничном уровне между точками O и R  
до целочисленных точек  $\Rightarrow$  любая прямая // стороне  $\pi$ -на  
пересекающая ось X, будет иметь пару целочисленных  
 $(x; y)$  ~~связанных пар~~ до  $33$ , это считая вместе с границей

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

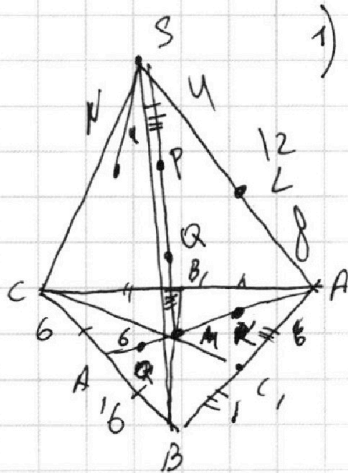
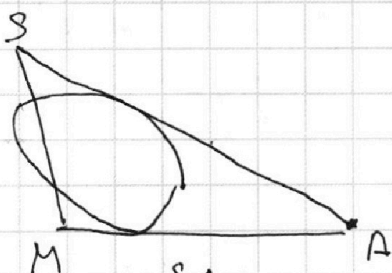
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$$

(меридиан)  
 $S_{\triangle ABC} = 30$   
 $AA = BB = 12$   
 $SP = MQ$

а)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

$AA_1 = 18$

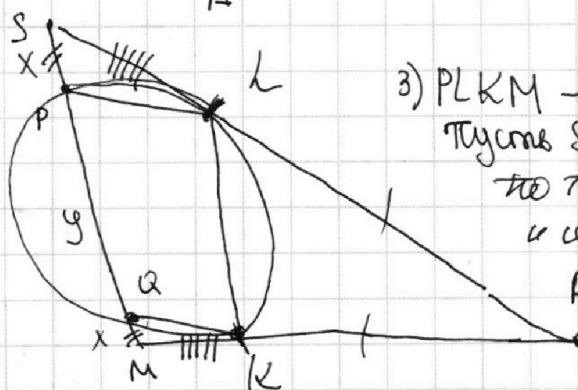
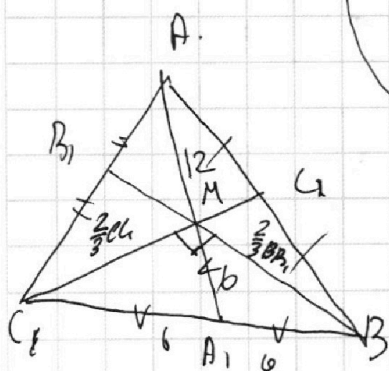


1)  $S_{\triangle ABC} = k \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$   
 $30 = k \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$k = 15$

2) Сер параллельна  $AP$  в м.  $L$   
 Сер параллельна  $AP_1$  в м.  $K$   
 $\Rightarrow$  параллельные у одной точки равны  
 $\Rightarrow AK = AL$

4)  $A_1M = 6$   
 паралл.  $\triangle CAB$



3)  $PLKM$  - вписанное  
 Пусть  $SP = QM = x$ ,  $PQ = y$   
 то  $\angle O$  параллельной и существует

$PL^2 = k \cdot (2x + y)$   
 $MK^2 = k \cdot (2x + y)$

$\Rightarrow MK = PL$   
 $\Rightarrow AM = AS$

$\angle CMB$

$MA_1$  - меридиан

$MA_1 = 6$ ,  $CA_1 = A_1B = MA_1$  по  $AS = 12$ ;  $AM = \frac{2}{3} \cdot m_1 = 12$

$\Rightarrow \angle CMB = \frac{\pi}{2}$  (меридиан  $= \frac{2\pi - \pi}{2}$ )  $m_1 = 18$

$\angle CMB = 90^\circ$

5)



$S_{ABC} = S$   
 $S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{2} S$   
 $S_{\triangle BMC} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} S$   
 $S_{\triangle CMB_1} = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} S$

$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} S_{\triangle BB_1C}$

$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{3} S = 30$

б)  $\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = 30 = S_{CMB}$

$\frac{2 \cdot CC_1 \cdot BB_1}{9} = 30$   $CC_1 \cdot BB_1 = \frac{270}{2}$

$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = \frac{18 \cdot 270}{2} = 9 \cdot 9 \cdot 30 = 81 \cdot 30 = 243 \cdot 10 = 2430$

Ответ: а) 2430

смотри пропорции на фото выше

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



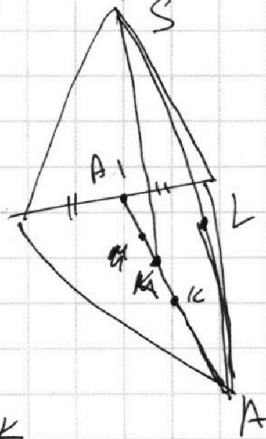
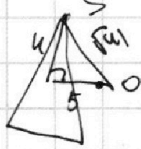
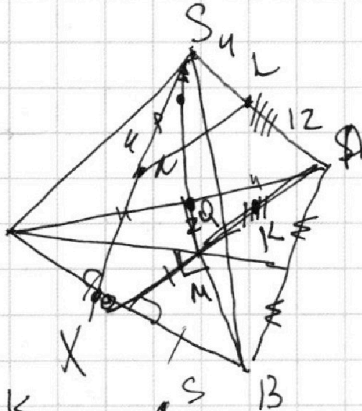
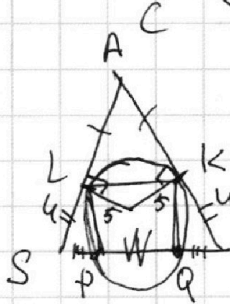
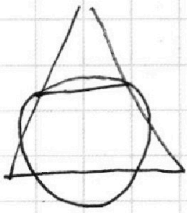
5) Сфера касается (BCS) = N

$SN = 4;$

$KS = 5;$

$\angle$  при BC - ?

1) Сфера вписана в двугранный угол при ребре BC



2)  $\triangle ALK \sim \triangle SAM$ , п.т.о.,  $\angle A$  - общий,  $\frac{AL}{AS} = \frac{LK}{AM}$

$\rightarrow LK \parallel SM \Rightarrow LPQK$  - трапеция п.т.о

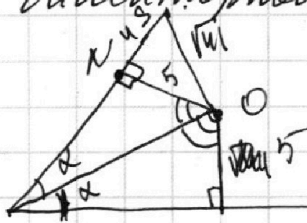
(-) нужно доказать, что  $ASX = \angle$  при BC

3)  $SN = 4$  - радиус сферы  $\Rightarrow SL = 4$  (касательные из одной точки)  $\Rightarrow SK = 4$

Пусть O - центр сферы:  $ON \perp SN$ ,  $\perp SN \Rightarrow \triangle SNO$  - прямоугольный.  $ON \perp SN$ , то т. Тогда  $SO = \sqrt{17}$

$\Rightarrow$  у точки (-)

O - диссекторной плоскости касания (используя угол).

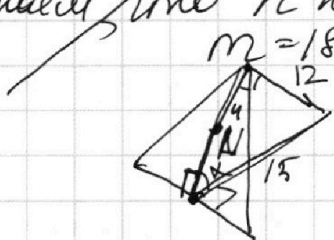


Сфера;

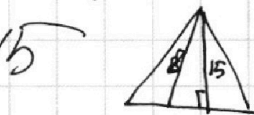
$\leftarrow$  это линейный угол двугранного угла

4) вспомним, что K и CB равны 15

$\frac{324}{205} = \frac{18}{5}$



$m = 18; (AA_1)$   
то допустить  $SK \cap CB = X$   
 $\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$



$\triangle ASX$  тупоугольный  
 $SX = 9$  (то т. тупоуг.)

Ответ:  $\arcsin \frac{4}{5}$