



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Возведение в кв-м abc: $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, k \in \mathbb{Z}$
 $bc = t \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, t \in \mathbb{Z}$
 $ca = m \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, m \in \mathbb{Z}$

$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca \Rightarrow$

$(abc)^2 = ktm \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$

$\Rightarrow abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$

- $9+14+19$
- $10+20+12 = 42$
- $10+13+18$
- $10+20+11 = 41$
- ~~$10+13+30 = 53$~~

\sqrt{ktm} должно быть представлено в виде числа $a \cdot 3^z \cdot 5^z$ минимум, при этом (т.к. abc — целое число, ведь оно состоит из произведений целых чисел) \sqrt{ktm} — тоже целое число

$\sqrt{ktm} = \sqrt{a \cdot 15^z} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \text{если } (15 \cdot x) \text{ — полный квадрат}$
 $\Rightarrow a = 15 \Rightarrow ktm = 15 \Rightarrow \sqrt{ktm}$ при этом не получится

Пример сверху: $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{14}{2}} \cdot 5^{\frac{3,5}{2}} = 3\sqrt{3} \cdot 5^{3,5} = 3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{15}$
 $3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow ktm = 3^5 \cdot 5^7$ ✓

$\Rightarrow ktm = 15 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow$ является полным

квадратом, минимальный пример, при котором не получится целочисленность \sqrt{ktm} , \Rightarrow числа $k, t, m \in \mathbb{Z}$
 Старший: $k=15, t=27, m=125, \sqrt{ktm} = \sqrt{15 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt{3^4 \cdot 5^4} = 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$ подходит

\Rightarrow Получим, что $ab = 15 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, bc = 2^7 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, ca = 12 \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

$\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^3 \cdot 5^7$
 $k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$
 $k = 3^3, t = 5^3, m = 5^4$
 $\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{22}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

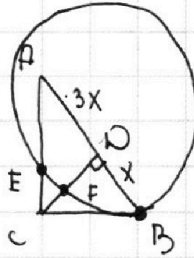
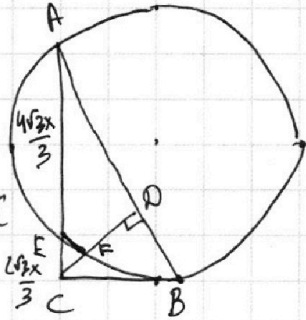
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}}$$

$$3) \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = k^2$$

k -коэффициент подобия ΔABC и ΔCFE



1) $EF \parallel AB$
 $\Rightarrow CD \perp EF$, т.к.
 $CD \perp AB$

$$\Rightarrow \angle EFC = \frac{\pi}{2}$$

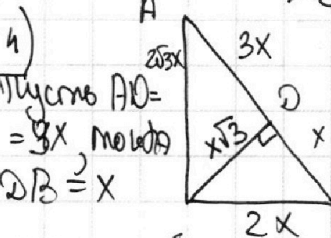
$$2) \angle DAC = \angle FEC$$

(соотв. углы пар. прямых AB и EF)

$\Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CAD$
 по II углам

аналогично:
 $\Delta CEF \sim \Delta CDB$
 по II углам

$\Delta CEF \sim \Delta ABC$
 по III углам



$h = \sqrt{AD \cdot DB}$ — средняя геометрическая между катетами гипотенузы.

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$$

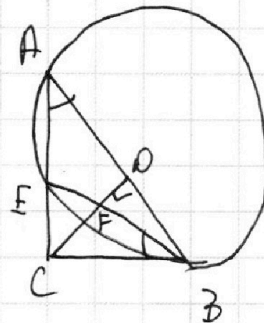
по т. Пифагора (ΔCAD)

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

по т. Пифагора (ΔCDB)

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x$$

5) необходимо доказать, что $A \in$ окружности. Пусть A не принадлежит



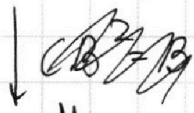
(доказано в (5))
 б) допущение: $A \in$ окружности
 тогда: $\angle EAB = \angle BEC$ — вписаны
 $\angle EBC = \angle BEC$ — углы между хордой BC и хордой AE

$$\Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta CEB$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$
 $\text{tg } \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ т.к. $\text{tg } \alpha = \frac{CE}{BC}$
 $\frac{CE}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; CE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

Тогда: $k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x \cdot 3}{2\sqrt{3}x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$
 $(\Delta ABC \sim \Delta CEF)$
 $\boxed{k = 2\sqrt{3}}$

тогда: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$



$4x^2 = CE \cdot AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}x \cdot 2\sqrt{3}x = 4x^2$

Теорема выполняется для случая $A \in$ окруж.

$BC^2 = CE \cdot CM$ — противоречие)

$CB = CE \cdot AC$

$CM > AC$

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi l}{2} \end{cases}$$

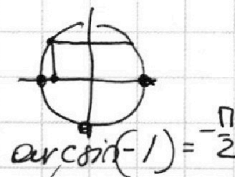
$$k = -1; 0; 1$$

$$l = -2; -1; 0; 1$$

Теперь следует проверить полученные корни:

1) $x = -3\pi$ ✓

$$5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2}$$
$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$



$x = -3\pi$, $x = -\frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = 2\pi$;
 $x = -3\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 2\pi$;

2) $x = 2\pi$; ✓

$$5 \arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi) = 1$$
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \quad \checkmark$$

3) $x = -\frac{4\pi}{3}; = -\frac{8\pi}{6}$; ✓

$$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6};$$

4) $x = \frac{\pi}{3}$; $5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ ✓

$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6};$$

5) $x = -\frac{\pi}{2}$; $5 \arcsin(0) = 0$ ✓

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}; \quad \checkmark$$

Ответ: $-3\pi; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

распишем ограничения уравнения

$$\cos x \in [-1; 1] \quad \forall x$$

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

т.к.

$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



Пример:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$$

2) ~~$\arcsin(\sin x) = x$~~
 ~~$\arcsin(1 - \cos x) = \arcsin \cos x$~~

$$5(1 - \cos^2 x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 5\cos^2 x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x^2 + x - 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \quad 3.1)$$

~~$D = 1 + 40 \left(5 - \frac{\pi}{2}\right) = 100 + 1 - 10\pi = 10(10 - \pi) + 1$~~

~~$10 - \pi > 6 \quad D > 64 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{64}}{10}$~~

$$\arcsin(\cos x) = \frac{2x + \pi}{10}, \text{ вернем от аргумента sin}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \quad \text{тригонометрические тождества}$$

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \quad \frac{6\pi + 12x}{10} = \pi + 2\pi k$$

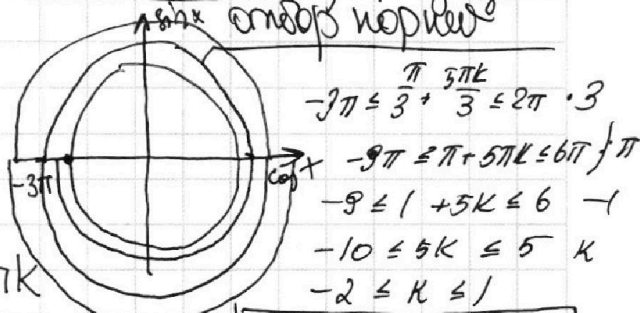
$$\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \quad 1) \quad 6\pi + 12x = 10\pi + 20\pi k$$

$$\sin\left(\frac{5\pi + 10x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right) \quad 12x = 4\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4\pi + 8x}{10} = 2\pi t \quad 4\pi + 8x = 10\pi t$$

Синус периодичен $x = \frac{-\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2}, \quad t \in \mathbb{Z}$ на графике синуса



$$k = -2; k = -1; k = 0; k = 1$$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2} \leq 2\pi \quad / \cdot \frac{2}{5}$$

$$-6 \leq -1 + 5t \leq 4 \quad +1$$

$$-5 \leq 5t \leq 5$$

$$-1 \leq t \leq 1 \quad t = -1; t = 0; t = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

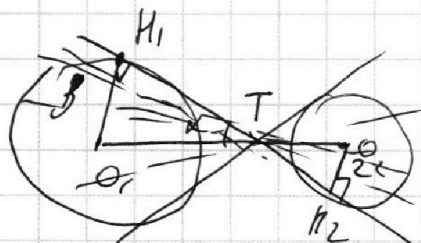
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

рассм. случай, когда крайняя касаясь обеих окружностей.



$$O_1O_2 = 6;$$

$$\triangle O_1HT \sim \triangle TO_2H_2$$

$$k = \frac{3}{2}; \quad \frac{O_1T}{TO_2} = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cdot 5}{18 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \text{а каково же } a = \frac{5}{3} \quad \text{а } \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1T}{6 - O_1T} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{2}; \quad \text{в силу сим. } a = -\frac{5}{3}$$

$$2O_1T = 18 - 3O_1T$$

$$5O_1T = 18 \Rightarrow O_1T = \frac{18}{5}$$

уменьшая b , уменьшаем высоту отоб крайних, её наименьшую ординату \Rightarrow уменьшая a , уменьшаем уклон который определяет то есть наклон прямой \Rightarrow при оплошкем оу тут возникнуть пересечения вместо касания.

\Rightarrow Ответ: $(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из точек A , найдем среднюю. $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$a=0$

$a = \frac{1}{3}$ при $b \in [-\frac{2}{3}; 2]$

$a = -\frac{1}{3}$ при $b \in [-2; \frac{2}{3}]$

$32a^2 - 72a + 16 = 0$

$16a^2 - 36a + 10 = 0$

$8a^2 + 18a + 5 = 0$

$D = 324 - 160 = 164$

$u: \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-3}$ $a = \frac{3}{4}$ корень
 $-\frac{3}{8}x + 3 = y$

$a = \frac{3}{4}$ подходит
при $b < 2$ существует

8) радиусы \cdot Нормальную
биссектрису! то есть, при
 $b = 2$

при каком a , прямая t
пройдет через $(0; 3)$ и касаясь

второй окружности?

$y = -\frac{a}{2}x + 3 = 3 - \frac{ax}{2}$
 $x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2x^2}{4} + 9 - 3ax = 4$

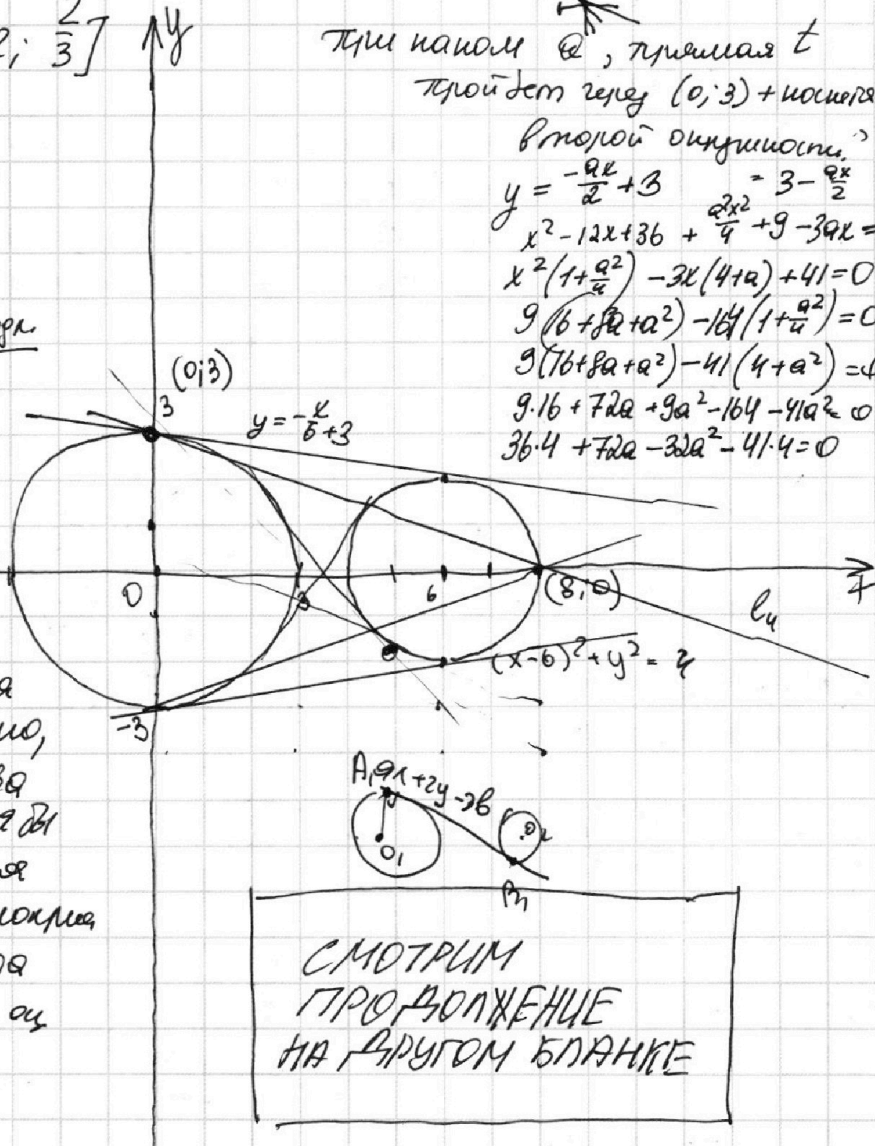
$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - 3x(4+a) + 41 = 0$

$9(16 + 8a + a^2) - 144(1 + \frac{a^2}{4}) = 0$

$9(16 + 8a + a^2) - 41(4 + a^2) = 0$

$9 \cdot 16 + 72a + 9a^2 - 164 - 41a^2 = 0$

$36 \cdot 4 + 72a - 32a^2 - 41 \cdot 4 = 0$



Чтобы найти b ,
при котором система
имеет 4 решения, нужно,
чтобы среди семейства
касательных к окружности
наименьшая, касающаяся
обе окружности, касалась
графиков функций, тогда
касательная касалась обеих

СМОТРИМ
ПРОДОЛЖЕНИЕ
НА ДРУГОМ БЛАНКЕ

Ответ: $a \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax + 2y - 3b = 0$ а? равно к решения

$$-x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad / +4$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (1)$$

1) перепишем как совокупность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

2) перепишем систему:

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & -x^2 + y^2 - 12x + 32 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

3) Построим bc в координатах xOy

bc = графики функций $ax + 2y = 3b$

1.1 - прямая, зависящая от a, b

1.1 - окружность $(0;0), R=3$

1.1 - окружность $(6;0), R=2$

5) задача звучит так:

для каких a , каковы b ,

то прямая $ax + 2y - 3b = 0$

пересекает окружности в 4 точках.

$3b$ определяет параллельную осьм:

$$\frac{a}{2} \cdot x + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2} \quad \frac{ax}{2} + y = \frac{3b}{2}; y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

b определяет высоту прямой

а) $l_1: A \in l_1, B \in l_1, y = -\frac{x}{b} + 3$
 $l_2: C \in l_2, D \in l_2, y = \frac{x}{b} - 3$

4) АНАЛИЗ $ax + 2y = 3b$

$$f(x) = ax \quad 2y = 3b - ax$$

$$2y = 3b - ax \quad y = \frac{3b - ax}{2}$$

(начало коор) $f(x) = \frac{3b - ax}{2}$
 $0 = 3b, b = 0 \quad f(0) = \frac{3b}{2}$
 $x = \frac{3b}{a}; \rightarrow \text{нуль } f(x)$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

4.1) $a=0 \quad y = \frac{3b}{2}$

также b существует

или $y = \frac{3b}{2}$ пересекает

4 раза (шесть) 4 решения

$b=0$, например

*) $l_1: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}$

$a = \frac{2}{3}$ при $a = \frac{1}{3}$

$l_2: \frac{1}{b} = -\frac{a}{2}$ при $a = -\frac{1}{3}$

$b = -2$ касание

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{то 2 точки}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y-3}{-1} \quad \frac{x}{b} = \frac{y+3}{1}$$

$$y = -\frac{x}{b} + 3 \quad y = \frac{x}{b} - 3$$

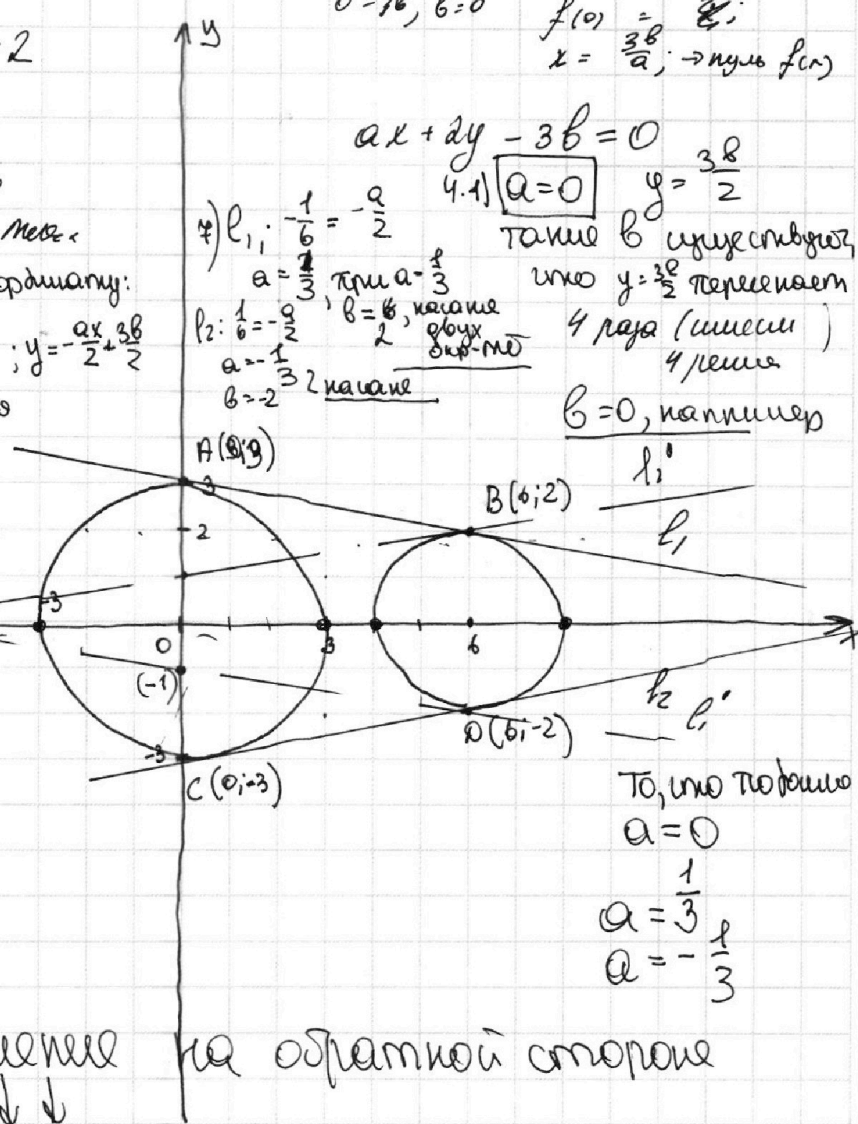
то, что требуется

$$a=0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

СМОТРИ ПРОДОЛЖЕНИЕ на обратной стороне листа ↓ ↓ ↓



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 7 = 0 & (*) \\ 1 \log_3 5y^5 + 16 \log_3 5y - 7 = 0 & (**) \end{cases}$$

поскольку $f(t) = \log_3 t^5 + 8 \log_3 t$ $t \neq 1, t \neq \frac{1}{5}$

$$f'(t) = 5 \log_3^4 t \cdot \frac{1}{t} \ln 3 + \frac{8}{t} \ln 3$$

$$f'(t) = \frac{1}{t} \ln 3 (5 \log_3^4 t + 8) > 0$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{5y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5y}$$

Следовательно найдем x, y ;

Ответ: 0,2

(*) + (**) Найдем x, y

$$= 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 2 \log_3 5y^5 + 16 \log_3 5y = 0$$

$$2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x = -2 \log_3 5y^5 - 16 \log_3 5y$$

$$\log_3 x^5 + 8 \log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y^5} + 8 \log_3 \frac{1}{5y}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$f'(t)$ монотонно возрастает на $D(f)$

т.к. выполняется теорема о корнях

$$x = \frac{1}{5y}; \quad xy = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}$$

Ограничения:

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$y > 0 \quad 5y \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$x, y - ?$
1) найдем ограничения

$$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$y \in (0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$$

$$\log_3 x = a \quad \log_3 3 = 1, a \neq 0$$

$$(1) a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \quad | \cdot 2a$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$(3) + (4) \quad 2a^5 + 2b^5 + 16a + 16b = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad (3)$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0 \quad (4)$$

$$2(a-b)(a^4 + b^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3) + 16(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 8(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

Вторая скобка - неположительный квадрат \Rightarrow всегда положительна

$$\Rightarrow a = b \quad \log_3 x = \log_{5y} 5y \Rightarrow x = 5y; \quad x \cdot y = \frac{5y}{5} = y^2$$

т.к. $f(t) = \log_3 t$

$$\text{на } D(f) \Rightarrow \log_3 p = \log_3 d$$

$$\Leftrightarrow p = d$$

$$\log_3^4 x$$

Повторим: ① $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad | \cdot 2 \log_3 x$$

$$2 \log_3^5 x + 12 - 5 + 8 \log_3 x = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 8 \log_3 x + 7 = 0$$

② $\log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 5y} - 8 \quad | \cdot 2 \log_3 5y$

$$2 \log_3^5 5y + 4 = 11 - 16 \log_3 5y$$

СМОТРИМ
ПРОФИЛИ
НА ЭЛЕМЕНТАХ
(на группе)
Страница

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

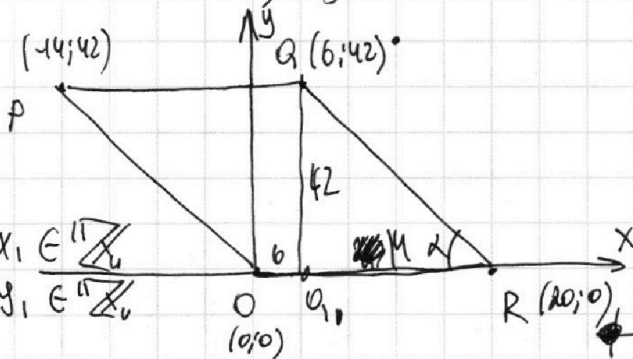
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$ $P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $R(20;0)$

$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + 1 \cdot (y_2 - y_1) = 33$$

1) $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$
 $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$33 = 3k + p$$

$$3k + p = 33$$

$$k = 11; p = 0$$

$$3(k-11) + (p-0)$$

$$33 = 0 + 33$$

$$33 = 3 + 30$$

$$33 = 6 + 27$$

$$33 = 9 + 24$$

$$33 = 12 + 21$$

$$33 = 15 + 18$$

$$33 = 18 + 15$$

$$33 = 21 + 12$$

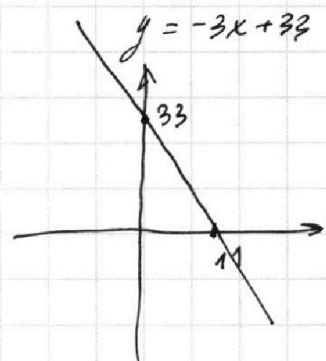
$$33 = 24 + 9$$

$$33 = 27 + 6$$

$$33 = 30 + 3$$

$$33 = 33 + 0$$

$$33 = 3x + y$$



$$\operatorname{tg} \angle QRO = \frac{42}{14} = 3$$

$$\operatorname{tg} \angle (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$
перенесем ~~то~~ уравнение
получим

$$y = 33 - y_2 + 3x_2 - 3x_1$$

пусть $x_1 = x, y_1 = y$

• огибающее на уравнение прямой, уравнение которой совпадает с уравнением которой совпадает с уравнением прямых PQ и OR \Rightarrow это прямая, // сторонам параллелограмма

$y = 33$ на граничном уровне между точками O и R
до целочисленных точек \Rightarrow любая прямая // стороне π -на
пересекающая ось X, будет иметь пару целочисленных
 $(x; y)$ ~~связанных~~ до tg , это считая вместе с границей

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

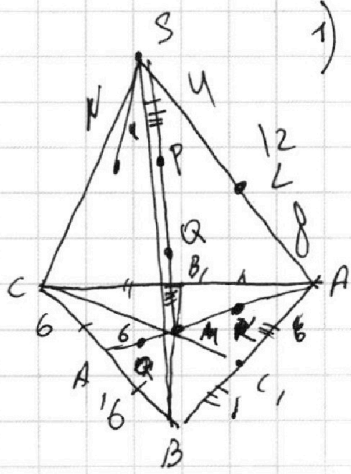
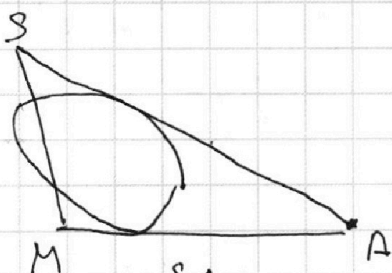
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$$

(медианы)
 $S_{\triangle ABC} = 30$
 $AA = BB = 12$
 $SP = MQ$

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

$AA_1 = 18$

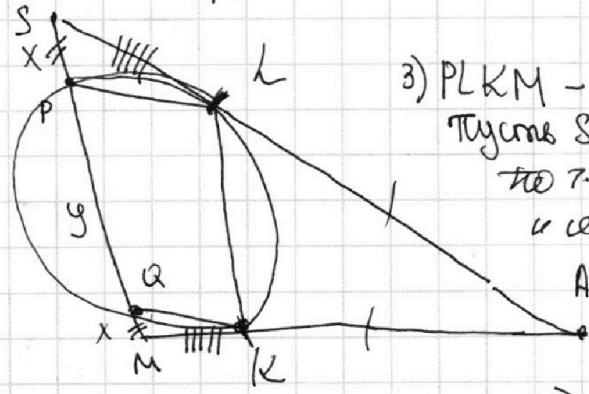
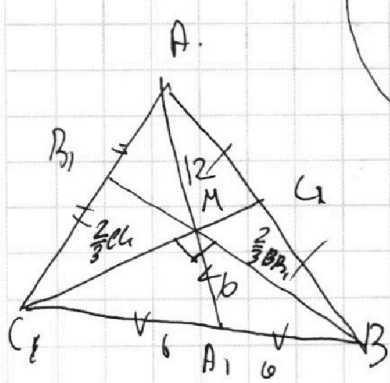


1) $S_{\triangle ABC} = k \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$
 $30 = k \cdot CB \cdot 6$

$k = 15$

2) Серпадается AP в м. L
 Серпадается AQ в м. K
 \Rightarrow параллельные у одной точки равны
 $\Rightarrow AK = AL$

4) $A_1M = 6$
 равнов. $\triangle CAB$



3) $PLKM$ - вписанное
 Пусть $SP = QM = x$, $PQ = y$
 то $\angle O$ параллельной и смежных

$PL^2 = k \cdot (2x + y)$
 $MK^2 = k \cdot (2x + y)$

$\Rightarrow MK = PL$
 $\Rightarrow AM = AS$

$\angle CMB$

MA_1 - медиана

$MA_1 = 6$, $CA_1 = A_1B = MA_1$ по $AS = 12$; $AM = \frac{2}{3} \cdot m_1 = 12$

$\Rightarrow \angle CMB = \frac{\pi}{2}$ (медиана = $\frac{2m_1}{3}$) $m_1 = 18$

$\angle CMB = 90^\circ$

5)



$S_{\triangle ABC} = S$
 $S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{3} S$
 $S_{\triangle BMC} = \frac{h \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2}}{h \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} S$

$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} S_{\triangle BB_1C}$

$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{3} S = 30$

б) $\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = 30 = S_{\triangle CMB}$

$\frac{2 \cdot CC_1 \cdot BB_1}{9} = 30$ $CC_1 \cdot BB_1 = \frac{270}{2}$

$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = \frac{18 \cdot 270}{2} = 9 \cdot 9 \cdot 30 = 81 \cdot 30 = 243 \cdot 10 = 2430$

Ответ: а) 2430

смотри пропорции на треугольнике

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



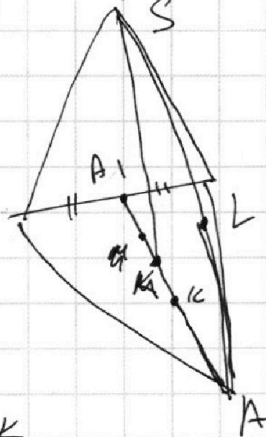
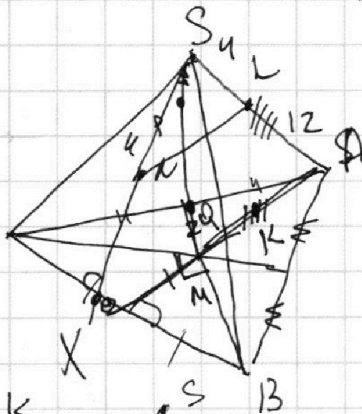
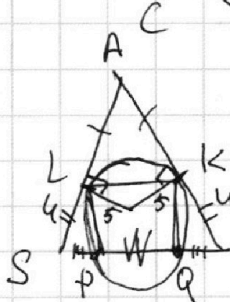
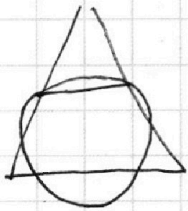
5) Сфера касается (BCS) = N

SN = 4;

KS = 5;

∠ при BC - ?

1) Сфера вписана в двугранный угол при ребре BC



2) ΔALK ~ ΔSAM, т.к. ∠A - общий, $\frac{AK}{AS} = \frac{LK}{AM}$

→ LK || SM ⇒ LPQK - трапеция / т.д.

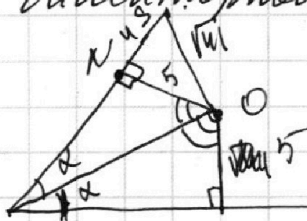
(-) нужно доказать, что ASX = призм

3) SN = 4 - радиус сферы ⇒ SL = 4 (касательные из одной точки) ⇒ SK = 4

Пусть O - центр сферы: ON ⊥ BC, ⊥ SN ⇒ ΔSNO - прямоугольный. ON ⊥ SN, т.е. высота SO = √11

⇒ у точки (-)

O ∈ биссекторной плоскости т.е. центр (используем угол).

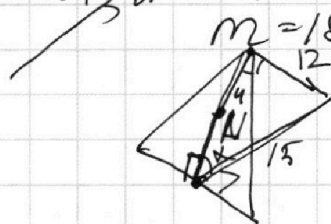


Сфера;

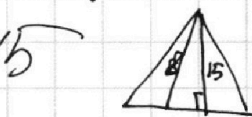
← это линейный угол двугранного угла

4) вспомним, что K и CB равны 15

$\frac{324}{205} = \frac{18}{5}$



то достаточно SN ⊥ CB = X, $\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$



ΔASX - призм-ит SX = 9 (т.е. высота)

Ответ: $\arcsin \frac{4}{5}$