



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow Q = abc$  и  $Q \in \mathbb{N}$

$$ab = k_1 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ 14 \\ \hline 42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 29 \\ 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30} \cdot k_1 k_2 k_3$$

$$= 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{48} k_1 k_2 k_3$$

Т.к. все натуральные  
но ~~не~~ все ~~идеальные~~

$$\Rightarrow abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2} \text{ Ⓞ}$$

$$\text{Ⓞ} \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{48} k_1 k_2 k_3} = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \sqrt{3 k_1 k_2 k_3}$$

$\Rightarrow$  наименьшее натуральное значение

$$\sqrt{3 k_1 k_2 k_3} \text{ это } 3 \text{ например } \checkmark$$

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 1 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1} = 3$$

$\Rightarrow$  наименьшее значение

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

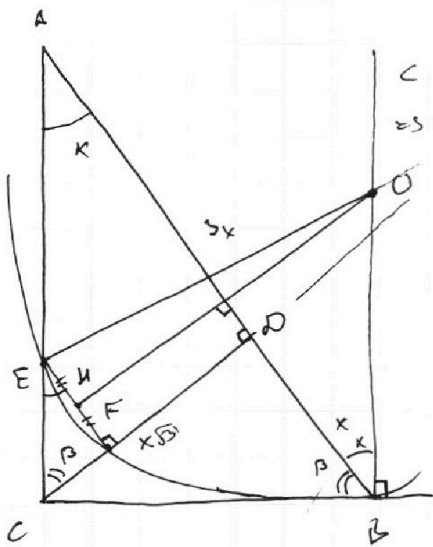
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.



$EF \parallel AB \Rightarrow FE \perp CD$

$\omega$ :  $\omega$  - касается в  $CB = T.O$

$\omega \cap CD = F$

$\omega \cap AC = E$

$\angle EFD = 90^\circ$

$\Rightarrow$  ~~проекции~~  $F$

восстановим перпен.

уг. т. В и СВ

т.к. Окруж. касается в т. В то эта высота будет радиусом.

пусть  $FD \cap \omega = T$

$\Rightarrow EF$

$\Rightarrow \angle EFT = 90^\circ$  и вписанный

$\Rightarrow ET$  - диаметр.

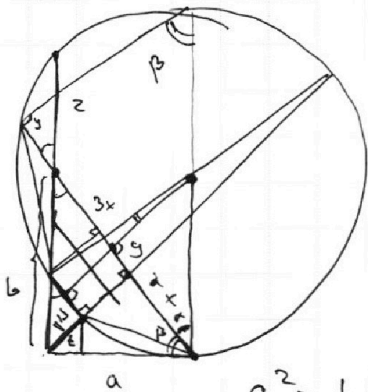
т.о центр окр. высоты.

$\Rightarrow$  т.о лежит на перпен. к BC

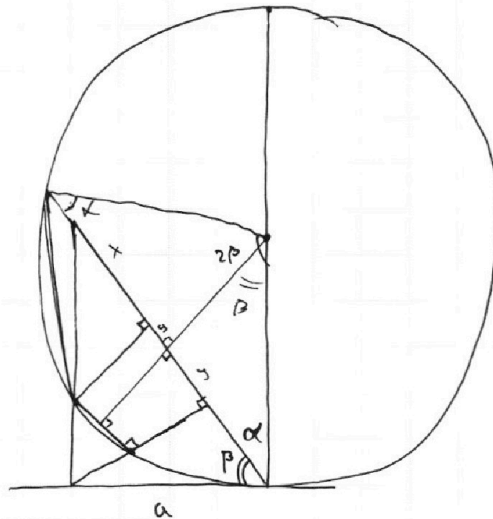
и делит ET пополам  $FO = EO$  т.к. радиусы

$\Rightarrow$  т.о лежит на сер.пер. к EF

построим его. ОН - сер.пер. к EF



$a^2 = t(t + \dots)$



$R \cos \alpha = x + y$

~~$z = y \cdot 4x$   
 $ab = 3x \cdot h$   
 $a^2 + b^2 = 16x^2$   
 $a^2 =$   
 $ab = 4\sqrt{3}x^2$   
 $(a+b)^2$~~

$\triangle CEF \sim \triangle ABC$  по двум углам

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{CF}{CB}\right)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2 (продолжение)

по теореме о касательной и секущей

$$CB^2 = CF \cdot FT$$

$$\frac{CF}{CB^2} = \frac{1}{FT} \Rightarrow \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \frac{CF}{FT}$$

пусть  $EF = y$  и  $BF$  пересекает  $\omega$  в  $T, L$

тогда  $BL = 2x + y$  т.к. ~~т.к.~~  $\Rightarrow$  это следует из  
теоремы  $EF \cdot BL$   
т.к. они выис ома  $PT$

$$\Rightarrow DL = x + y$$

$$FT^2 + EF^2 = 4R^2$$

$$FD \cdot DT = DB \cdot DL = x(x + y)$$

$$FD = x\sqrt{3} - CF$$

$$\frac{y}{2} + x = R \cos \alpha = R \frac{CA}{4x} = R \frac{\sqrt{16x^2 - CB^2}}{4x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\int \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\int \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

0 13

$$y = \arcsin x, \quad y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad \text{и} \quad x \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } (\sin(\frac{\pi}{2} - x)) \in [-1; 1] \quad \Rightarrow \int y \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\text{по замене } \varphi = \frac{\pi}{2} - x \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\text{Пусть } x = t + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \int \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - t - 2\pi k))$$

$$\arcsin(\sin \varphi) = \varphi \quad \text{при } \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Если } \varphi = \varphi_0 + 2\pi n \quad \text{иногда } \varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

по  $\arcsin(\sin(\varphi))$  берем  $\varphi_0$  т.е.

$$\arcsin(\sin(\varphi_0 + 2\pi k)) = \varphi_0$$

$$\Rightarrow \int \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - t - 2\pi k)) = t + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5t = t + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$6t = 2\pi - 2\pi k \quad t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$x = t + 2\pi k = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.к. } x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\text{по } x = \frac{\pi}{3}; \quad x = 2\pi \quad x = -\frac{4}{3}\pi \quad x = -\frac{9}{3}\pi = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3}; \quad 2\pi; \quad -\frac{4}{3}\pi; \quad -3\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ ~~13~~ №4. а

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad \text{①} \end{cases}$$

Реш ①

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad \text{①.1} & \text{①.1 } x^2 + y^2 = 9 & \text{- ур. Окр.} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad \text{①.2} & & \text{с центром } (0, 0) \\ & & \text{и радиусом } 3 \end{cases}$$

①.2

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 36 + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \text{- ур. окр. с центром } (6, 0) \\ \text{и радиусом } 2$$

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$y = Ax + B \quad A = -\frac{a}{2} \quad B = \frac{3}{2}b$$

узлов прямой которой зависят вверга вни  
с уравном коэфр А - зависит только от а  
и коэфр В - зависит только от б

⇒ Для фиксированного параметра В  
у ~~то~~ узла общие точка (0; В)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

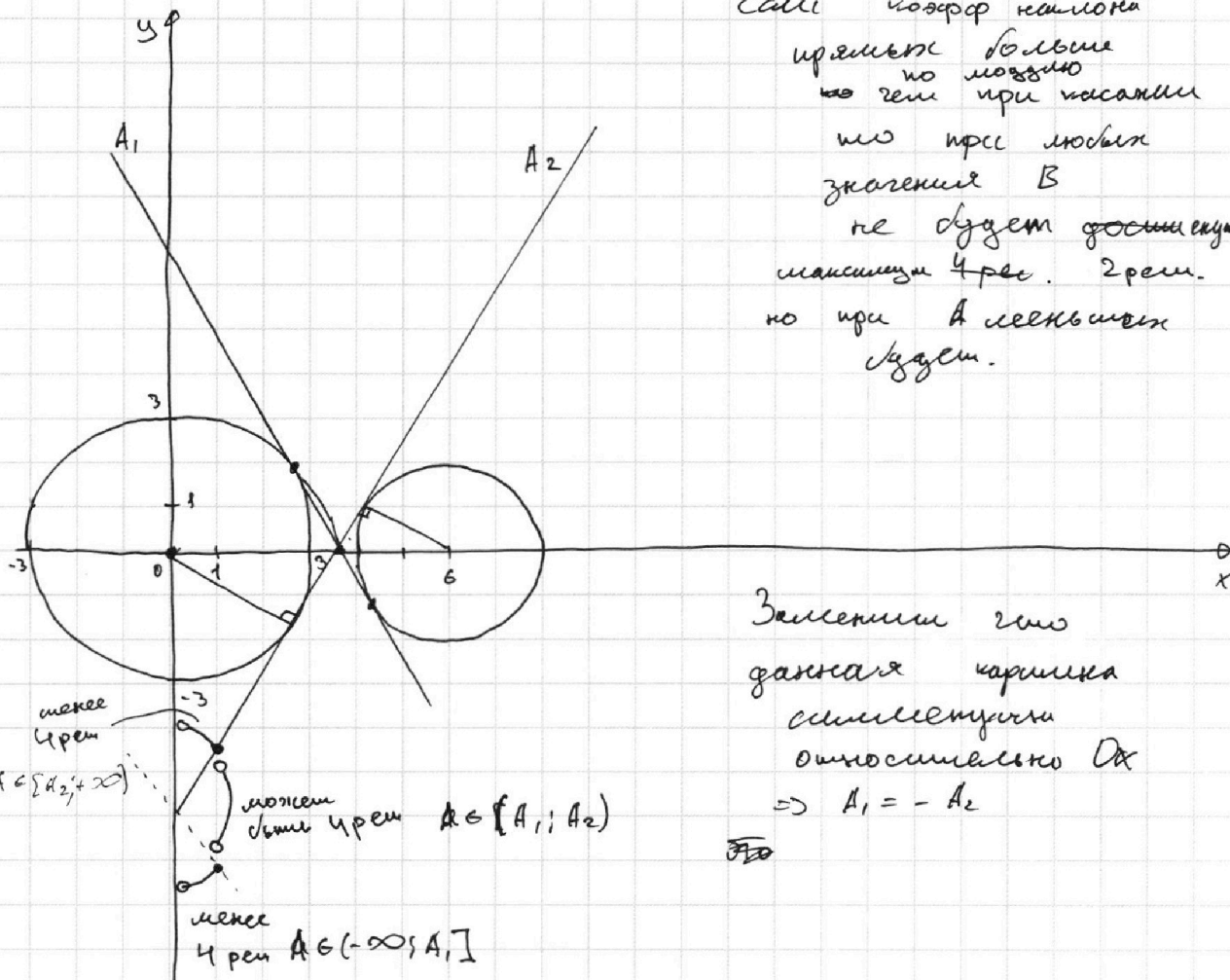


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение)

Если коэф наклона  
прямых больше  
по модулю  
то там при касании  
то при любых  
значениях  $B$   
не будет достижимым  
максимум 4 рсм. 2 рсм.  
но при  $A$  меньших  
будет.



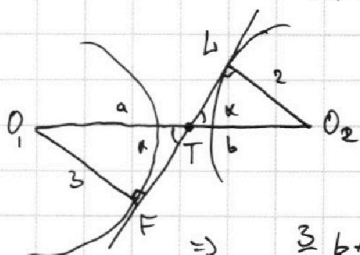
Зафиксируем эту  
данную картинку  
симметрично  
относительно  $Ox$   
 $\Rightarrow A_1 = -A_2$

ЭТО

Найдем  $A$  касания  $A_2$  будем искать

Проведем ~~высоты~~ радиусы геометрически.  
из центров окр. на  
в точки касания

$\Rightarrow$  то будет перпен.



$\triangle O_1TF \sim \triangle O_2TB$  но углы углов  
 $\Rightarrow \frac{O_1T}{TO_2} = \frac{a}{b} = \frac{O_1F}{BO_2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2}b$      $a+b = O_1O_2 = 6$  (по гипот.)

$\Rightarrow \frac{3}{2}b + b = 6$

$5b = 12$      $b = \frac{12}{5}$

$\sin \angle k = \frac{2}{12/5} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

см след. стр.

$\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение)

$$\sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$A_2 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad \Rightarrow A_1 = -A_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$A \in \left( -\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11} \right)$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{11} \geq a \geq -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

Ответ:  $a \in \left( -\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 \cdot 243 - 8$$

$$2) \log_3^4(5y) + 2 \log_3 3 = \log_3 25y^2 (3'') - 8$$

$$1) \log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_3 x^3 - 8$$

Заменим  $t = \log_3 x$

$$\log_3 x^3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

~~$$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$$~~

~~$$t^5 + 8t + 4 = 0$$~~

~~$$\begin{array}{r} 100084 \\ -2 \phantom{00} \\ \hline -2 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \\ \hline 8 \phantom{00} \\ \hline 4 \phantom{00} \\ \hline -2 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$~~

Анализом

$$2) \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5y} - 8$$

Пусть  $xy_1 = A \Rightarrow \log_3 xy_1 = \log_3 A \quad \log_3 x + \log_3 y_1 = \log_3 A$

Если  $y_1 = 5y$

то  $5xy = 8A \Rightarrow xy = \frac{A}{5}$

$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 y_1 = \log_3 A$  но при этом  $xy = \frac{A}{5}$

$\Rightarrow$  не придем к малому выражению

где  $x = x$  а  $y_1 = 5y$

а каждем  $A$  все возможные  $A$

Заменим  $a = \log_3 x$   $b = \log_3 5y$   $a \neq 0, b \neq 0$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{25}{a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{55}{b} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0 \\ b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

~~$$2 - \frac{1}{2} = -\left(\frac{6}{5}\right)$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

$$a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0$$

$$b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0$$

$$\oplus \quad a^5 + b^5 + 8(a+b) + \frac{7}{2} = 0$$

$$(a+b)(a^4 + \dots + b^4) + 8(a+b) = 0$$

$\Rightarrow a+b = 0$  и вторая скобка всегда больше 0

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = \log_3 1$$

$$\log_3 5xy = \log_3 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{5}$

~~$x = \frac{1}{5}$~~   
 ~~$y = \frac{1}{5}$~~   
 ~~$xy = \frac{1}{5}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

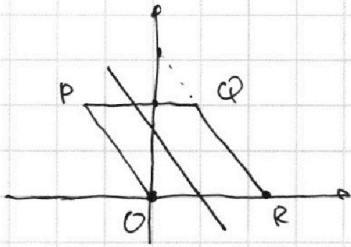
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$O(0;0)$ ;  $P(-14;42)$ ;  $Q(6;42)$ ;  $R(20;0)$

$A(x_1; y_1)$   $B(x_2; y_2)$



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

~~$A \rightarrow B$~~   ~~$B \rightarrow A$~~   ~~$C \rightarrow A$~~   ~~$A \rightarrow C$~~   $\{ x_2 - x_1; y_2 - y_1 \}$

$A \{ x_1; y_1 \}$   $B \{ x_2; y_2 \}$



$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$



$$y = y_2 - y_1$$

$$x = x_2 - x_1 \Rightarrow y = -3x + 33$$

Найдем уравнение боковой стороны  
параллелограмма.

~~$QR$~~   $y_{QR}$ :  $\Delta x = 6 - 20$   $\Delta y = 42$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$$

$$y_{QR} = -3x + b \quad \begin{cases} 0 = -3 \cdot 20 + b \\ b = 60 \end{cases}$$

$$y_{PO} = -3x \quad y_{QR} = -3x + 60$$

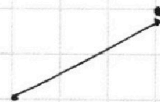
$$y_{PQ} = 42$$

$$y_{OR} = 0$$

~~$QR$~~

$$y = -3x + 33$$

$$(3 \cdot 14)^2 + 42^2 = 14^2 \cdot 9 + 42^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

Каго найми кол-во

этого  $\vec{A} \{x_1; y_1\}$   $\vec{B} \{x_2; y_2\}$

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Каго найми кол-во пар векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  лежащих внутри паралл.

таким что это  $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

вершина с конц  $\vec{C}$  лежит на прямой  $y = -3x + 33$

$a^2 b^2 = 3a^2 + 36^2$   
 $a^2(b^2 - 3) = 36^2$   
 $a^2 = \frac{36^2}{b^2 - 3}$

$a^2 = bc + 2c \quad z = \frac{a^2 - bc}{c}$   
 $4xy = z(b - c)$   
 $\frac{bc}{4x} = \frac{y}{2} + x$   
 $y = \frac{bc}{2x} - 2x$   
 $2bc - 8x^2 = (\frac{a^2}{c} - b)(b - c)$   
 $2bc - 8x^2 = \frac{a^2 b}{c} - a^2 - b^2 + bc$   
 $bc = \frac{a^2 b}{c} + 8x^2$   
 $1 = \frac{a^2}{c^2} - \frac{8x^2}{bc}$   
 $1 = \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2 + a^2}{2bc}$   
 $y + 2x = z = \frac{a^2}{c} - b$   
 $a^2 = bc + 2c$   
 $4xy = z(b - c)$   
 $\frac{bc}{4x} = \frac{y}{2} + x$   
 $2bc - 8x^2 = a^2$

$a^2 = (b + z)c \quad 4\sqrt{3}x^2 = ab$   
 $4xy = z(b - c)$   
 $b^2 + a^2 = 16x^2$   
 $\cos x = \frac{a}{4x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

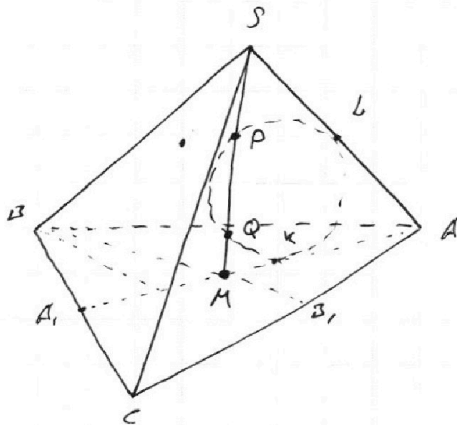
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 SABC



$S_{ABC} = 90$   
 $SP = QM$   
 $SA = BC = 12$

Можно показать  
 пересечение диаметра  
 2:1 считая от вершины

$S = 90 = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{90 \cdot 2}{12} = 15$

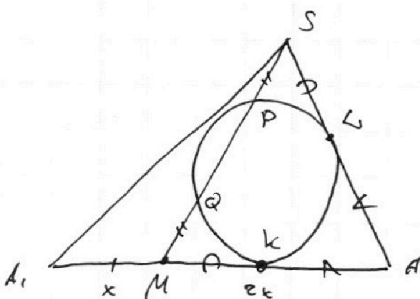
$AA_1 = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}$

$BB_1 = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2}$

$CC_1 = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

~~$S_{ABC} = \frac{AB_1 \cdot BC_1}{2} \sin \alpha$~~

Нарисуем сечение пирамиды плоскостью AAS



$SA = 12$

по т. о кас. и секущей

$SL^2 = SP \cdot SQ$

$MK^2 = MQ \cdot MP$

$MQ = SP$  QP - диаметр

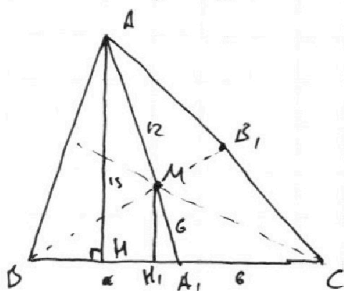
$\Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow MK = SL$

$LA = AK$

$LA + SL = AK + MK = 12$

$\Rightarrow MA = SA = 12 \Rightarrow AM = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$

Нарисуем основание



$BA_1 = 6$

$HA_1^2 = AA_1^2 - HA^2$

$\Rightarrow HA_1 = \sqrt{(3 \cdot 6)^2 - 3 \cdot 5^2} = 3\sqrt{11}$

~~$AA_1$~~

проведем  $MH_1$

$\Rightarrow MH_1 = \frac{1}{3} AH = 5$

$HA_1 = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \Rightarrow BH_1 = 6 - \sqrt{11}$

$H_1C = 6 + \sqrt{11}$

$AH$  - высота из  $B$  в  $A$

по т. П.

- высоту на  $BC$  из  $H$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ (продолжение)

$$BM^2 = BH_1^2 + H_1M^2 = (6 - \sqrt{11})^2 + 25 = 36 - 12\sqrt{11} + 11 + 25 = 72 - 12\sqrt{11} + 36 = 108 - 12\sqrt{11} \quad \text{---} \quad \textcircled{2}$$

$$CM^2 = CH_1^2 + H_1M^2 = (6 + \sqrt{11})^2 + 25 = 36 + 12\sqrt{11} + 11 + 25 = 72 + 12\sqrt{11} + 36 = 108 + 12\sqrt{11} \quad \text{---} \quad \textcircled{3}$$

$$BD_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{3}{2} \sqrt{(6 - \sqrt{11})^2 + 25} = 3 \sqrt{3(6 - \sqrt{11})}$$

$$CD_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{3}{2} \sqrt{(6 + \sqrt{11})^2 + 25} = 3 \sqrt{3(6 + \sqrt{11})}$$

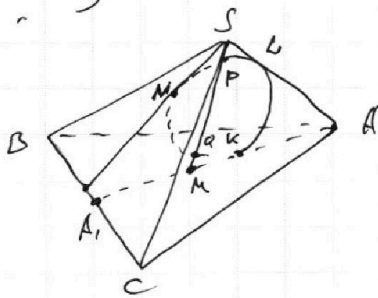
$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3 \sqrt{3(6 + \sqrt{11})} \cdot 3 \sqrt{3(6 - \sqrt{11})} =$$

$$= 9 \cdot 9 \cdot 2 \sqrt{3 \cdot 3 \sqrt{(6 + \sqrt{11})(6 - \sqrt{11})}} = 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{36 - 11} =$$

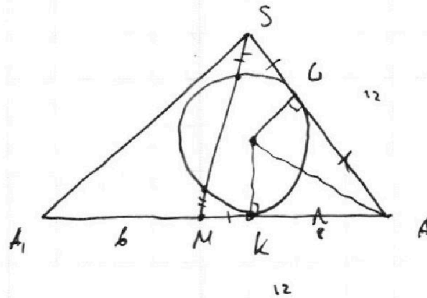
$$= 30 \cdot 81 = 2430$$

а) Ответ: 2430

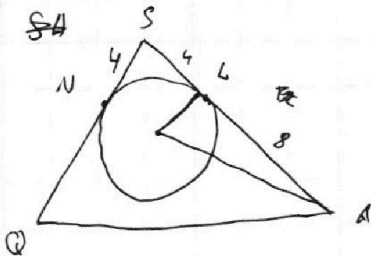
б)



± 6 м-м  $HA_1S$



Проведем  $SN$  до пересечения с  $BC$  в  $Q$   
в м-м  $SAQ$



$SN = SL$  — как касательные из  
одной точки

$$\Rightarrow LA = 12 - SL = 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

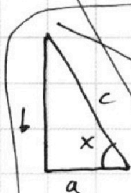
$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$2\pi$

$$5 \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$  ограниченности на  $x$  нем.

Пусто  $\cos x \geq 0$



$$\cos x = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin x = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\sin x = \arcsin(\sin x)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$f(y) = \arcsin(y) \quad y \in [-1; 1]$$

$$E(f) : f(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow E(f) = 5 \arcsin(y) \quad f(y) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

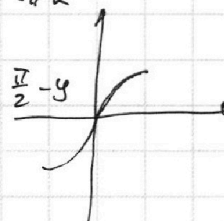
$$6x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = y + 2\pi k$$

$$5 \arcsin \sin \frac{\pi}{2} - y$$



$$\frac{5\pi}{2} - 5y = y + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$6y = 2\pi - 2\pi k$$

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}k$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}k + 2\pi k =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}k$$

