



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ко  $ac: 5^{28}$  по условию ~~26~~

значит  $abc: 5^{28}$

Так как 2, 3, 5 - взаимно простые числа,

$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

значит  $abc \neq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , т.к.  $a, b, c$  взаимнопросты

Пример, когда достигается равенство:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$\text{Тогда } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{и } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}; 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}; 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ca = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}; 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{ответ. } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**ЛМФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$  ① Пусть  $\alpha_1$  - максимальная степень двойки, на  
 $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$  ② которую делится  $a$ ;  
 $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$  ③  $\alpha_2$  - макс. степень 3, на которую делится  $a$   
 $\alpha_3$  - макс. степень 5, на которую делится  $a$

Аналогично введем  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  для  $b$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  для  $c$ .

$ab: 2^{\alpha_1 + \beta_1}$ ; значит  $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$

$ab \not\sim 2^{\alpha_1 + \beta_1 + 1}$  - т.к.  $\alpha_1, \beta_1$  - максимальные степени 2, входящие в  $a$  и  $b$

Аналогично получаем:  $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$

Тогда  ~~$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$~~  сумма этих неравенств:

$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$       значит  $abc: 2^{18}$

Теперь для  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ :

$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 & - \text{из } ① \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 & - \text{из } ③ \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 & - \text{из } ② \end{cases}$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{13 + 25 + 21}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$

т.к.  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$  - число целое,  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$       значит  $abc: 3^{30}$

и для  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ :

$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 & - \text{из } ① \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 & - \text{из } ② \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 & - \text{из } ③ \end{cases}$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

значит  $abc: 5^{26}$

~~Так как 2, 3, 5 - взаимно простые,~~

~~получаем  $abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~

~~$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~

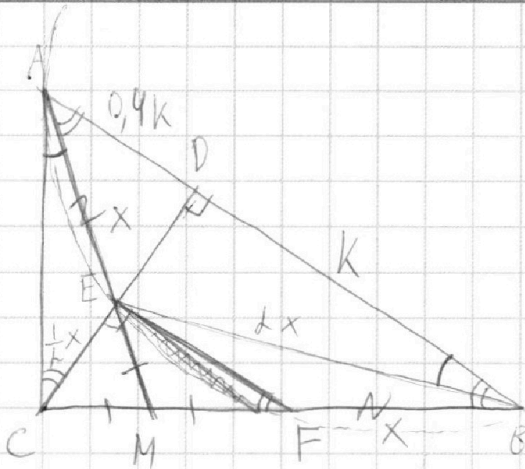
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AEF = 180^\circ - \angle ABC \text{ - из впис. АЕФВ}$$

$$\angle EAB = 180^\circ - \angle AEF \text{ - т.к. } AB \parallel EF \text{ (секундары } AE)$$

$$\angle EAB = \angle ABC$$

Также

$$\angle ACD = \angle ABC, \text{ т.к. } \angle A \text{ - общий}$$

$$\text{в } \triangle ACD \text{ и } \triangle ABC; \angle D = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\angle CAE = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle A, \text{ т.к. } \angle ABE \text{ ор. на } \text{гипотенузу } AE;$$

AC - касательная по условию.

Каждо равно 
$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD / 2}{CE \cdot EF / 2} = \frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF} = \frac{AD \cdot DB}{EF^2},$$

$\triangle AEC \sim \triangle AEB$ , т.к.  $\angle CAE = \angle EBA$ ;  
 $\angle ACE = \angle BAE$ .

т.к.  $\frac{CD}{CE} = \frac{DB}{EF}$   
из подобия  $\triangle CDB$  и  $\triangle CEF$  ( $\angle D = \angle E = 90^\circ$ ;  
 $\angle F = \angle B$  - из паралл.)

~~Пусть  $AE = x$ .~~

~~Тогда  $BE = 2x$ ;  $EF = \frac{1}{2}x$ .~~

~~$FB = x$ , т.к.  $ABFE$  - параллелограмм~~

~~$\angle CAM = 90^\circ - 2\beta$ , т.к.  $\angle CAB = \angle CBA = \angle CAM + 2\beta$   
(из  $\beta = \angle CBA$ )~~

~~Тогда в  $\triangle AED$ :~~

~~$\sin \beta = \frac{ED}{x}$~~

~~$\cos \beta = \frac{0,4k}{x}$~~

~~в  $\triangle BED$ :~~

~~$\sin(90^\circ - 2\beta) = \frac{ED}{2x} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{ED}{2x}$~~

~~$\cos(90^\circ - 2\beta) = \frac{k}{2x} \Leftrightarrow \sin 2\beta = \frac{k}{2x}$~~

~~$2 \sin \beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{k}{2x}}{\frac{0,4k}{x}} = \frac{1}{0,4} = 2,5$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF = 1,4k - 2 \cdot 0,4k = 0,6k$  (т.к. если опустить высоту в  $\triangle AEF$ ,  
тогда  $AE = 0,4k$ ,  $AF = 0,4k$ ,  $EF = 0,6k$ )

$$\frac{AD \cdot DB}{EF^2} = \frac{0,4k \cdot k}{0,6 \cdot 0,6k^2} = \frac{0,4}{0,36} = \frac{10}{9}$$

Ответ:  $\frac{10}{9}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

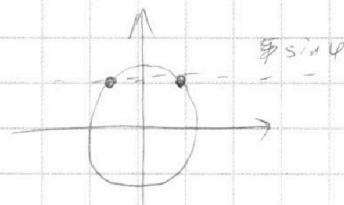
$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad \text{возьмем } \cos \text{ от обеих частей}$$

$$(1) \quad \Downarrow \\ \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{-4\pi + 2x}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$



$$(*) \quad \begin{cases} x = \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Поскольку, учитывая  $\frac{9\pi - 2x}{10}$  лежит от 0 до  $\pi$  включительно, переход (1) был равносильным (т.е. взяли аркосинус от  $\cos \frac{9\pi - 2x}{10}$  на промежутке  $\frac{9\pi - 2x}{10}$ )

$$\begin{aligned} 9\pi - 2x &\geq 0 & \frac{9\pi - 2x}{10} &\leq \pi \\ x &\leq \frac{9}{2}\pi & -2x &\leq \pi \end{aligned}$$

Вернемся к системе (\*)

$$x \geq -\frac{\pi}{2} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$$

$$\begin{cases} 5x = -2\pi + x + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 5\pi + 2\pi - x + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(Продолжение)

$$\begin{cases} 4x = -2\pi + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 6x = 7\pi + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Выбор корней:

I серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{9\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-1 \leq -1 + 5k \leq 9$$

$$0 \leq 5k \leq 10$$

$$k = 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}$$

II серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{9\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$-3 \leq 7 + 10n \leq 27$$

$$-10 \leq 10n \leq 20$$

$$n = -1; 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

Корни  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{9\pi}{2}$  попали в обе серии, т.к. лежат на  
оси симметрии



Ответ.  $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём коэффициент при общей внутренней касательной к окружностям. (коэффициенты равны  $-k$  и  $k$  из симметрии отн.  $Oy$ )

~~$x^2 + y^2 = 25$~~   ~~$x^2 + y^2 = 49$~~

~~$x^2 + y^2 = 25$~~  для этого радиус одной окр-сти

увеличим на 2, а другую (меньшую) сожмём до точки при этой касательная из этой точки к новой окр-сти параллельна никакой касательной

$$\begin{cases} y = kx - 9 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \text{ - одно решение}$$

$$x^2 = 49 - (kx - 9)^2$$

$$x^2 = 49 - k^2 x^2 + 18kx - 81$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 18kx + 32 = 0$$

$D = 0$ , т.к. одно решение

~~$324k^2 - 4 \cdot 32 = 0$~~

$$324k^2 - 4 \cdot 32(k^2 + 1) = 0 \quad | :4$$

$$81k^2 - 32k^2 - 32 = 0$$

$$49k^2 = 32$$

$$k = \pm \frac{4}{7} \sqrt{2}$$

Ответ  $\theta \in \left( -\frac{21\sqrt{2}}{20}; \frac{21\sqrt{2}}{20} \right)$

при  $k \in$

при  $k \in \left[ -\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2} \right]$  - нулик касается или не имеет общ. точек с окр-стью

$-\frac{5}{6a} \in \left[ -\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2} \right]$

$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4}{7}\sqrt{2} \quad | \cdot -\frac{5}{6}$

$-\frac{20}{42}\sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{20}{42}\sqrt{2}$  - возведём в обратное  $\frac{1}{\frac{20}{42}\sqrt{2}} = \frac{21}{10\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{20}$

нулик не касается при  $\theta \in (-\infty; -\frac{21\sqrt{2}}{20}] \cup [\frac{21\sqrt{2}}{20}; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Поработаем со 2 строчкой:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+y^2+18y+81-4=0 \end{cases} \quad \text{— эквивалентно 2 строчке}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 & \text{— окр-сть с центром в } (0;0) \text{ радиуса } 5 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 & \text{— окр-сть с центром в } (0;-9) \text{ радиуса } 2 \end{cases}$$

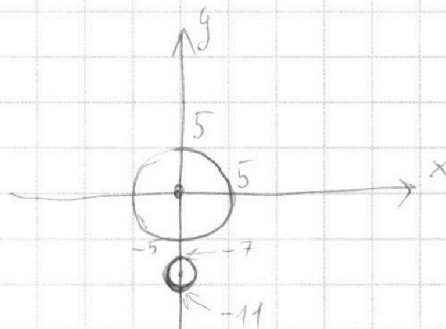
Теперь 1 строчка:

1)  $a=0$

$$5x-b=0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

при  $b=0$  пересекает каждую окр-сть в 2 точках



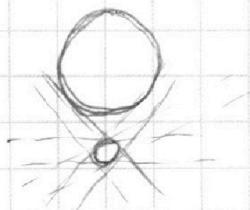
2)  $a \neq 0$  — поделим на  $a$

$$\frac{5x}{a} + 6y - \frac{b}{a} = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a}$$

(изменим коэф-ты в меньшее — двигаться вверх или вниз)

Посмотрим при каких коэф-тах при  $x$ , если проведем лучок прямых <sup>лучок</sup> с числовым коэф-том через одну окр-ность, этот лучок не задевает, или будет касаться окруж. окр-ста:



касание достигается, когда коэф-т прямой равен коэф-ту окруж. из одних вых; других касательных к окр-ности.

лучок не задевает ~~окр-ста~~ большую окр-сть, когда коэф-т лежит от  $-k$  до  $k$ , ( $k$  —  $k$ -коэф-т <sup>коэф-т</sup> окруж. окр-ста)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{11^2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5 \quad | \cdot t$$

~~$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5$$~~

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{монотонная функция, ед. решение (} t^5 \text{ и } 5t \text{ возрастают)}$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2}\right)} = \log \left(\frac{y}{2}\right)^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot (-13) \cdot \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2}\right)} - 5$$

$$m = \log_{11} \left(\frac{y}{2}\right)$$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{m} - 5 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5m$$

$$m^5 + 5m + \frac{16}{3} = 0$$

$m^5$  и  $5m$  возрастают  $\Rightarrow$   
 функция строго монотонна  $\Rightarrow$   
 ед. решение

$$m_0 = -t_0, \text{ где } m_0, t_0 - \text{ решение}$$

соотв. уравнений (преобразуется к виду  $m = -t$ )

значит

$$\log_{11} x = -\log_{11} y$$

$$\log_{11} xy = \log_{11} x + \log_{11} y = 0, \text{ значит } xy = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{из} \\ \text{монотонности} \\ \log_{11} x \end{array} \right)$$

ответ. 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $AB = 14$ .

$$AB = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} \text{ — по Т. Пифагора для } \triangle AMB.$$

$$AC = \sqrt{18^2 + 34^2} = \sqrt{324 + 1156} = \sqrt{1480}$$

$$AB = 2\sqrt{130}$$

$$AC = 2\sqrt{370}$$

Найдём  $B_1B$  и  $C_1C$ . Для этого заметим, что  $MA_1 = A_1B = A_1C = 10$

значит  $\angle BMC = 90^\circ$

Тогда можно записать Т. Пифагора для  $\triangle C_1MB$  и  $\triangle B_1MC$ :

$$\begin{cases} MB^2 + C_1M^2 = C_1B^2 \\ B_1M^2 + MC^2 = B_1C^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } y = \frac{1}{3} C_1C, \quad C_1B = \frac{AB}{2} = \sqrt{130} \\ x = \frac{1}{3} B_1B \quad ; \quad B_1C = \frac{AC}{2} = \sqrt{370} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 130 \\ x^2 + 4y^2 = 370 \end{cases} \text{ — подст.}$$

$$5(x^2 + y^2) = 500$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 30 \\ 3y^2 = 270 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 10 \\ y^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = \sqrt{10}, \quad y = 3\sqrt{10} \end{aligned} \text{ — т.к. отрезки имеют неотрицат. длину}$$

$$C_1C = 3y = 9\sqrt{10}$$

$$B_1B = 3x = 3\sqrt{10}$$

$$A_1A \cdot B_1B \cdot C_1C = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 3 \cdot 10^2 = 8100$$

Ответ: 8100.

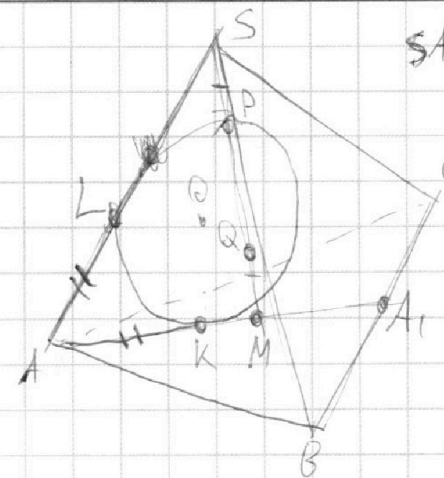
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA = BC = 20$$

O - центр окружности  $\Omega$

~~Рассмотрим~~

а)  $AL = AK$  - как отрезки параллельных  
к одной точке

Посчитаем степеней точки S отн. окружности  $\Omega$ :

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

Посчитаем степеней M отн.  $\Omega$ :

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$\uparrow$   
MK - кас. по условию

$$SP = MQ \text{ - по условию; } SQ = MP, \text{ т.к. } \begin{cases} SM = SP + PM \\ SM = SQ + QM \end{cases}$$

$$\text{значит } MK^2 = SL^2$$

$$MK = SL$$

~~MK~~

$$AM = AK + MK = AL + SL = AS = 20$$

$$AA_1 = 30, \text{ т.к. } \frac{AM}{MA_1} = 2 \text{ - по св-ву медианы}$$

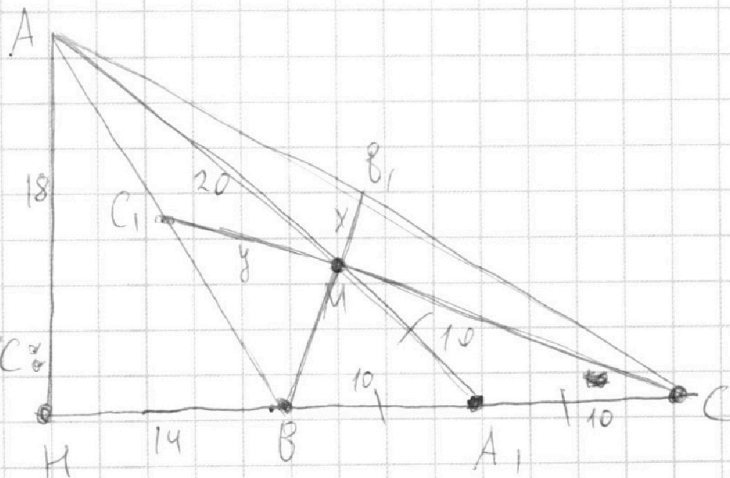
$h_A$  - высота из точки A

$$S_{ABC} = \frac{h_A \cdot BC}{2}$$

$$180 = \frac{h_A \cdot 20}{2}$$

$$h_A = 18$$

Рассмотрим  $\triangle ABC$



$$\text{В } \triangle AHA_1 \text{ по т. Пифагора } HA_1 = \sqrt{30^2 - 18^2} = 6\sqrt{5^2 - 3^2} = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

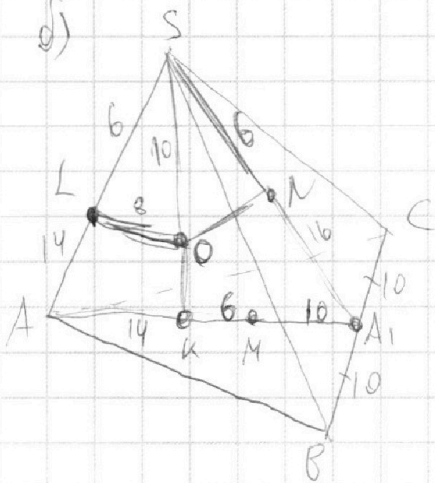
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д)



$SL = SN$  как отрезки касательных из  $M$

$$SL = 6$$

$$AL = 14$$

$$AK = AL = 14$$

$$KM = 6 \quad \text{т.к.} \quad AM = 20$$

$$SO = \sqrt{LS^2 + LO^2} = 10$$

$$AN = AK = 16 - \text{как отрезки кас.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(90-2\beta) = \frac{1}{2x}$$

$$\cos \beta = \frac{0,4}{x}$$

$$\sin 2\beta = \frac{1}{2x}$$

$$2 \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2x}$$

$$\sin 2\beta = \frac{0,4}{x}$$

$$2 \sin \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\sin(90-2\beta) = \frac{0,4}{2x}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

arccos - угол по косинусу

$$\frac{\sin \beta}{\sin(90-2\beta)} = 2$$

$$\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{0,4}{x}} = \frac{1}{0,4x}$$

$$\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{1}{2 \cdot 0,4}$$

$$2 \sin \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\frac{7}{6} - \frac{5}{3} = \frac{7-10}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{17}{6}$$

$$0,4 \cdot 0,7$$

$$1 - \frac{1}{28}$$

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64x^2} = 2$$

$$\frac{1}{0,8x} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{0,64x} \quad | \cdot 2$$

$$2^2 - \frac{2}{0,64} - 0,8 = 0$$

$$2^2 =$$

$x > 0$   
 $y > 0$   
 $xy = ?$

$$\frac{1}{2} \log_x a = \log_x a$$

$$\log_x a^x = 2 \log_x a$$

$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{8\pi - 2x}{10}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{8\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{9x^3} 121 - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \log_x 11 - 5$$

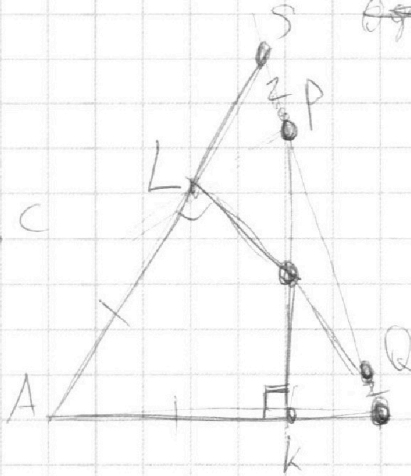
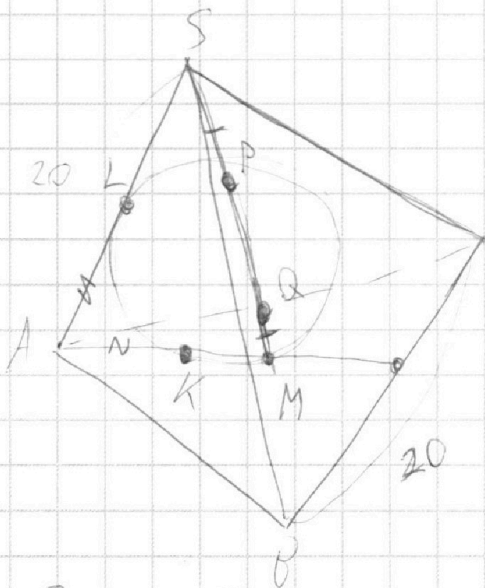
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



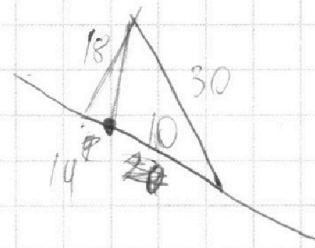
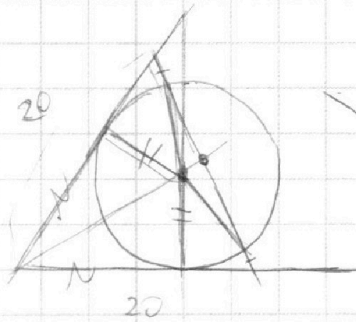
$$S_{ABC} = 180$$

$$SA = BC = 20$$

$$\frac{20 \cdot 18}{2}$$

$$h =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a-b+20}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b+20}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a+20}{2}\right) + \left(\frac{b-a+20}{2}\right)^2} = 180$$



$$3 \cdot 6$$

$$3 \cdot 10$$

$$6 \cdot 3 \quad 6 \cdot 5$$

$$h = 18$$

$$\sqrt{340}$$

$$AL = AK$$

$$\sqrt{186 + 324}$$

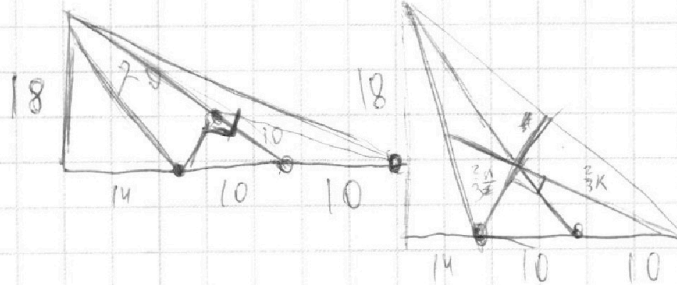
$$\sqrt{520}$$

$$SL \cdot SA = SP \cdot SQ$$

//

$$MP \cdot NQ =$$

$$MK \cdot NA$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{\cos 2\beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{EP}{2x}}{\frac{EP}{x}} = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - 2\sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64d^2}}{\frac{1}{0,8d}} = \frac{1}{2}$

$1480 =$

$0,8d(1 - \frac{2}{0,64d^2}) = \frac{1}{2}$

$0,8d - \frac{16}{0,64d} = \frac{1}{2} \cdot d$

$0,8d^2 = 1 + \frac{16}{0,64} = \frac{0,1}{0,04}$

$0,8d^2 = 1 + \frac{10}{4}$

$\frac{8}{10} d^2 = \frac{14}{4}$

$d^2 = \frac{140}{32} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$

$d = \sqrt{\frac{35}{8}}, (d > 0)$

$34 \times 34 = 1156$   
 $+ 136 = 1292$   
 $+ 102 = 1394$   
 $+ 1156 = 2550$   
 $+ 324 = 2874$   
 $\hline 1480$

$\sin \beta = \frac{1}{0,8 \cdot \sqrt{\frac{35}{8}}}$

$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ , т.к.  $\beta$  - острый угол.

$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{0,64 \cdot \frac{35}{8}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{0,08 \cdot 35}}$

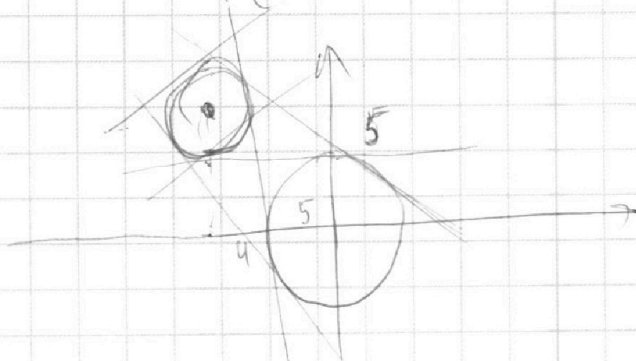
$= \sqrt{1 - \frac{1}{2,8}} = \sqrt{\frac{1,8}{2,8}} = \sqrt{\frac{9}{14}}$

$0,4k = x - \cos \beta$

$x =$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y - 77) = 0 \end{cases}$$

$a = 0$   
 $5x - b = 0$



$g^2 + 2 \cdot 9g + 81$

$x^2 + (y + 9)^2 = 4$

$a \neq 0$

$\frac{5}{a}x + 6y - b = 0$

$y = \frac{-\frac{5}{a}x + b}{6}$

$\boxed{-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}}$



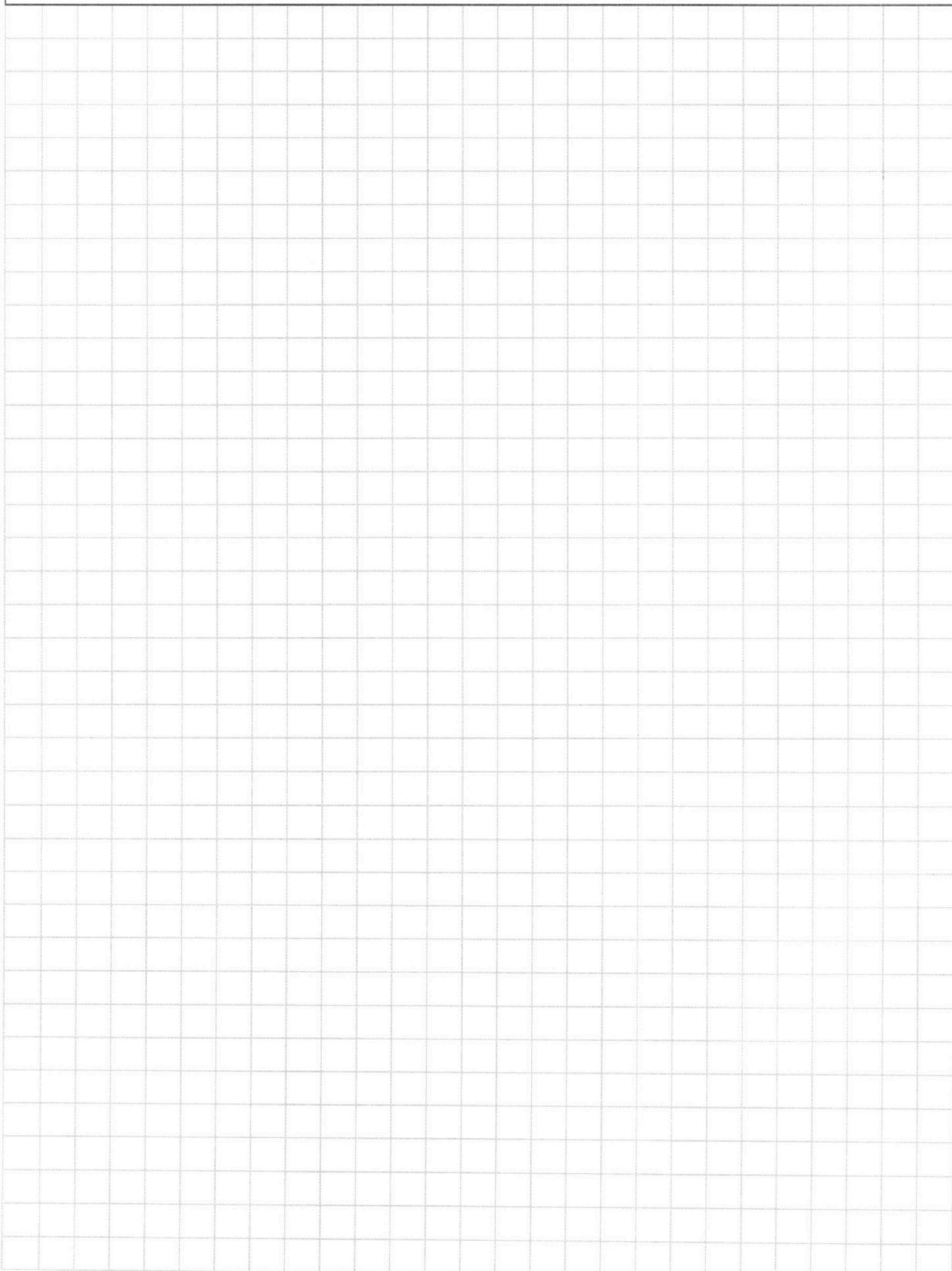


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and a triangle. The solution includes several diagrams and mathematical derivations.

**Diagrams:**

- Top left: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment AB is drawn, and a point E is marked on the arc AC.
- Top right: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment AB is drawn, and a point E is marked on the arc AC. A point D is also marked on the arc AB.
- Middle: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment AB is drawn, and a point E is marked on the arc AC. A point D is also marked on the arc AB.
- Bottom left: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment AB is drawn, and a point E is marked on the arc AC. A point D is also marked on the arc AB.
- Bottom right: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment AB is drawn, and a point E is marked on the arc AC. A point D is also marked on the arc AB.

**Equations and Calculations:**

- $\cos x + \cos y = \cos xy$
- $\cos x \cos y = \cos xy$
- $\frac{CE}{AD} = \frac{CF}{BD}$
- $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$
- $xy$
- $SD = 10$
- $\frac{AO}{BD} = 1,4$
- $\frac{CE}{AE} = \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{AB}$
- $\frac{[ACD]}{[CEF]}$
- $\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{y}{4yx} = \frac{EF}{1,4}$
- $\frac{2y}{24yx} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{1,4^2}{\sin(90-2\beta)} = \frac{1}{x}$
- $1,4^2 = 1,4^2 \cdot \frac{1}{2} + (y+x)^2$
- $\frac{y}{x} = ?$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^6 \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

н.ч. abc - ?

$$abc: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$abc \cdot 2^{10} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$a: 2$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y-x=4 \\ 2y=17 \end{cases}$$

$$a = 2^2$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{12}$$

$$a: 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$b: 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c: 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

$$t^4 - 6 = -\frac{1}{6t} - 5 \quad | \cdot t$$

$$\log_6 x = t$$

$$x = 6^t$$

$$6 \leq d_1 + b_1$$

$$13 \leq d_2 + b_2$$

$$14 \leq b_1 + b_2$$

$$25 \leq d_2 + b_2$$

$$t^5 - 6 + \frac{1}{6} + 5t = 0$$

$$16 \leq d_1 + b_1$$

$$21 \leq b_2 + b_2$$

$$t^5 + 5t - \frac{35}{6} = 0 \quad | \cdot 6$$

$$t = 18$$

$$\frac{1}{30}$$

$$6t^5 + 30t - 35 = 0$$

$$18 = \frac{6+14+16}{2} \leq d_1 + b_1 + b_1$$

$$2, 4, 12$$

$$29 \leq \frac{13+21+25}{2} \leq d_2 + b_2 + d_2$$

$$6, 7, 19$$

$$26 = \frac{24+28}{2} \leq d_3 + b_3 + b_3$$

$$b_2 + d_2 + b_2 = 29$$

$$b_2 \leq 16$$

$$b_2 \leq 14$$

$$b_2 \leq 16$$

$$46 + 13 = 59$$

$$25 + b_2 \leq d_2 + d_2 + b_2 = 29$$

$$21 + d_2 \leq b_2 + d_2 + b_2 = 29$$

$$d_2 \leq 8$$

30

$$d_2 + d_2 + b_2 = 30$$

$$\leq \quad \leq \quad \leq$$

$$b_2 + 25$$

$$d_2 + 21$$

$$b_2 + 13$$

$$b_2 \leq 25$$

$$d_2 \leq 9$$

$$b_2 \leq 17$$

$$d_3 + d_3 + b_3 = 26$$

$$d_3 + 11$$

$$d_3 + 13$$

$$b_3 + 28$$

$$d_3 \leq 15 \quad d_3 \leq 13$$

$$5, 9, 17$$

$$31$$

$$4, 9, 17$$

$$b_2 \leq 17$$