



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$$

$$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$$

$$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

чтобы выполнялись условия и abc было наименьшим, никакие другие множители в a, b и c быть не должно.

$$ab \bmod 2^6 3^{13} 5^{11} \equiv 0, \text{ значит } \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$$

аналогично $a_2 + c_2 \geq 16; a_3 + c_3 \geq 25; a_5 + c_5 \geq 28;$

$$b_2 + c_2 \geq 14; b_3 + c_3 \geq 21; b_5 + c_5 \geq 13$$

складывая ~~каждые~~ неравенства со степенями двойки, тройки и пятёрки, получаем:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

п.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$,
 $a_3 + b_3 + c_3 \in \mathbb{Z}$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

$a_2; b_2; c_2; a_3; \dots \geq 0$, целые

добавим начальные условия: $a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 5^{a_5 + b_5 + c_5}$$

$$\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

такое возможно при

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} \end{aligned}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

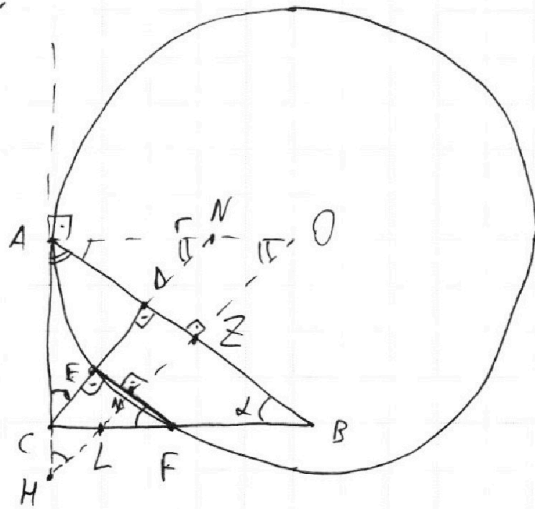
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.



$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$\angle ABC = \alpha$$

$$\angle EFC = \alpha, \text{ так как } AB \parallel EF$$

$$\angle CDB = 90^\circ, \angle CEF = 90^\circ, AB \parallel EF$$

$$\angle CAD = 90 - \alpha, \text{ из } \triangle ABC$$

$$\angle ACD = \alpha, \text{ из } \triangle ADC$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ по 3 углам: } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{AB}{BD} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{7}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}; \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CEF; \frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = k; \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2$$

EF — хорда окружности, M — середина EF; $\angle OMF = 90^\circ$

$OM \parallel CE$, $\angle ANC = 90 - \alpha$; $\angle AOM = 90 - \alpha$

$$CL = LF$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AO = r \text{ - радиус}$$

$$OZ = \sin \alpha = r = \sqrt{\frac{2}{7}} r$$

$$MO = \frac{r}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{7}{2}} r$$

$$ML = \frac{CL}{\sin \alpha} ; \quad LF = \frac{ML}{\sin \alpha} \rightarrow CL = ML$$

$$\downarrow$$
$$\angle CMF = 90^\circ$$

$$\downarrow$$
$$M = E$$

$$\downarrow$$
$$N = 0$$

$$AN = r$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$. $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$$\sin x \in [-1; 1], \arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)] = [0; \pi]$$

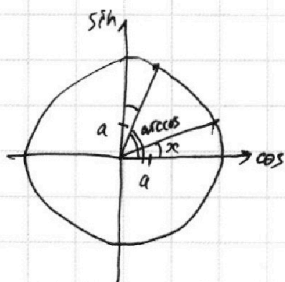
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

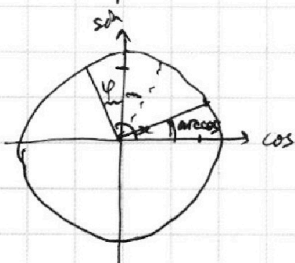
$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n, \quad x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$$

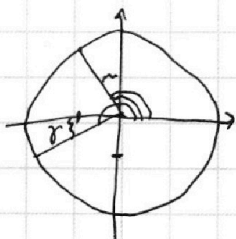


$$\arccos(\sin x) = \varphi = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$$



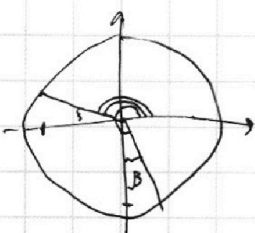
$$\varphi = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \gamma = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n, \quad x \in \left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$



$$\gamma = x - \pi - 2\pi n$$

$$\arccos(\sin x) = \pi - \beta = \frac{5\pi}{2} - x - 2\pi n, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right]$$



$$\beta = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n$$

~~или~~

~~$$\arccos(\sin x) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\pi n, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right]$$~~
~~$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n$$~~

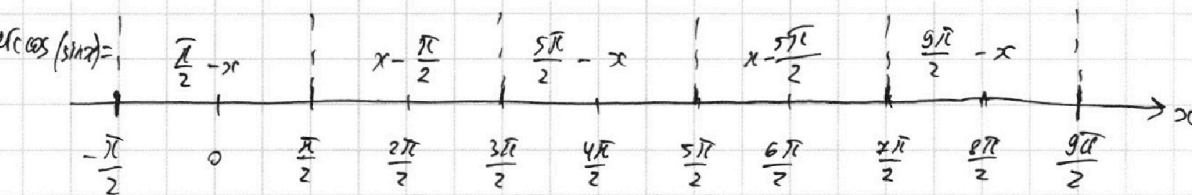
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $5\pi - 10x = 9\pi - 2x$ ← подстановка случаев в исходное уравнение
 $8x = -4\pi$
 $x = -\frac{\pi}{2}$ (+)

2) $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $10x - 5\pi = 9\pi - 2x$
 $12x = 14\pi$
 $x = \frac{7}{6}\pi$ (+)

3) $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$: $25\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 16\pi$
 $x = 2\pi$ (+)

4) $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $10x - 25\pi = 9\pi - 2x$
 $12x = 34\pi$
 $x = \frac{17}{6}\pi$ (+)

5) $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$: $45\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 36\pi$
 $x = \frac{9}{2}\pi$ (+)

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р.ч.

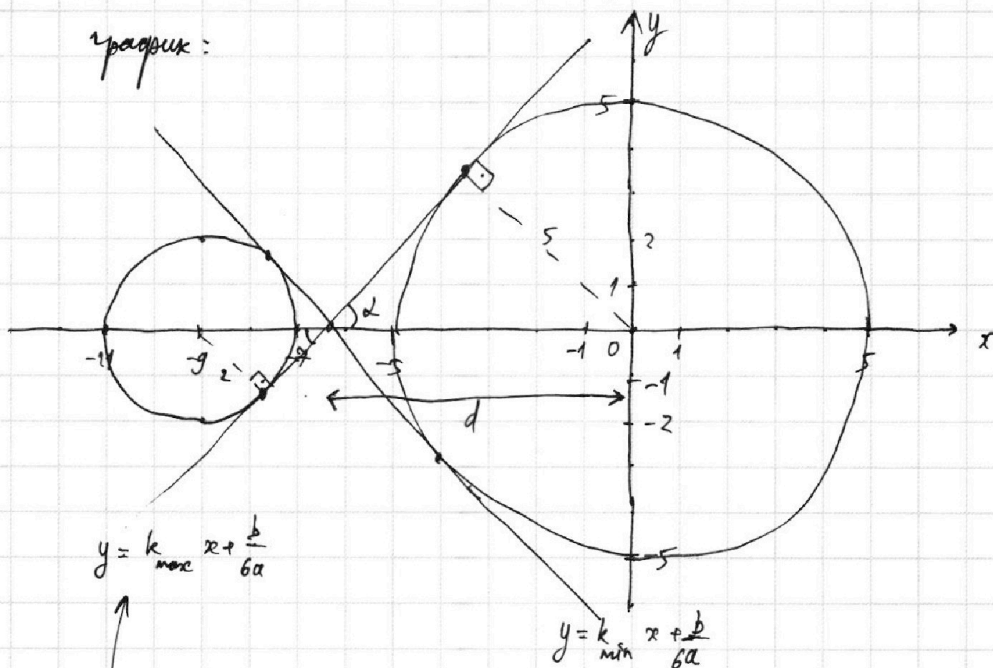
$$① \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$②: \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

график:



①:

$$6ay = b - 5x$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} - \text{прямая с наклоном } \frac{5}{6a} = k$$

когда прямая пересекает обе окружности - 4 решения

крайние случаи: прямая касается обеих окружностей

при $k \geq k_{\max}$ или $k \leq k_{\min}$ нельзя подобрать b , чтобы было

4 решения.

из-за симметрии графика относительно Ox , $k_{\min} = -k_{\max}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = k_{\max}$$

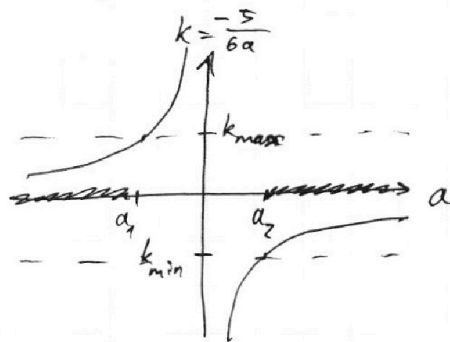
$$\sin \alpha = \frac{5}{d} = \frac{2}{9-d}; \quad 45-5d = 2d; \quad 7d = 45; \quad d = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = k_{\max}; \quad k_{\min} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = k_{\max}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = k_{\min}; \quad 42a_2 = 20\sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$



$$k_{\max} < k < k_{\min}$$

$$\begin{cases} a < a_1 \\ a > a_2 \end{cases}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№ 5} \quad \textcircled{1} \quad & \begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 (11)^{-2} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)}^3 (11)^{-13} - 5 \end{cases} \\ \textcircled{2} \quad & \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}: \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad ; \quad t = \log_{11} x$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$3t^5 + 15t = 16$$

$$\textcircled{2}: \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$$

$$0,5y > 0, \quad 0,5y \neq 1 \quad ; \quad p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^5 - 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$3p^5 + 15p = -16$$

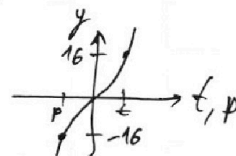
$$\begin{cases} 3t^5 + 15t = 16 & , \quad t = \log_{11} x \\ 3p^5 + 15p = -16 & , \quad p = \log_{11} (0,5y) \end{cases}$$

$3t^5 + 15t$ и $3p^5 + 15p$ - возрастающие функции, симметричные относительно OY .

$$\begin{aligned} t &= -p \\ t + p &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_{11} (x \cdot 0,5y) = 0, \quad 0,5xy = 1; \quad xy = 2$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

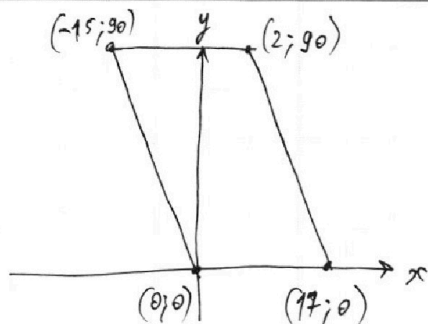
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



уравнение левой стороны
параллелограмма: $y = -6x$,
 $y \in [0; 90]$

правой: $y = -6x + 104$,
 $y \in [0; 90]$

точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$: $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

при фиксированной точке A , $y_2 = -6x_2 + k$, $k = 48 + 6x_1 + y_1$

на такой прямой 0; 15 или 16 точек с целыми
координатами, которые попадают в параллелограмм

15 если k не делится на 6, 16 если делится

из уравнений сторон параллелограмма $k \in [0; 104]$, $k \in \mathbb{Z}$

$$n = 6x_1 + y_1 = k - 48$$

↑
15 или 16 точек B

$$n \in [-48; 56]$$

$$y_1 = n - 6x_1, y_1 \in [0; 90] \rightarrow n \in [0; 104] \rightarrow n \in [0; 56]$$

$k = n + 48$, 48 делится на 6

если n делится на 6, то 16 точек B , иначе 15.

~~n — кол-во B \sum количества $B = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 9 + 15 \cdot 2 =$~~

| | |
|---|----|
| 0 | 16 |
| 1 | 15 |
| 2 | 15 |
| 3 | 15 |
| 4 | 15 |
| 5 | 15 |
| 6 | 16 |

~~$= 160 + 30 + 675 = 865$~~

| | | |
|----|----|----|
| 54 | 16 | 16 |
| 55 | 15 | 15 |
| 56 | 15 | 15 |

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при каждом n , A лежит на прямой $y_1 = n - 6x_1$,
16 или 15 точек A по такой же прямой.

| n | кол-во B | кол-во A | вариантов пар $A; B$ |
|-----|------------|------------|----------------------|
| 0 | 16 | 16 | 256 |
| 1 | 15 | 15 | 225 |
| 2 | 15 | 15 | 225 |
| 3 | 15 | 15 | 225 |
| 4 | 15 | 15 | 225 |
| 5 | 15 | 15 | 225 |
| 6 | 16 | 16 | 256 |
| ... | ... | ... | ... |
| 54 | 16 | 16 | 256 |
| 55 | 15 | 15 | 225 |
| 56 | 15 | 15 | 225 |

$$\begin{aligned} \sum \text{вариантов} &= 256 \cdot 10 + 9 \cdot 5 \cdot 225 + 225 \cdot 2 = \\ &= 2560 + 450 + 10125 = 13135 \end{aligned}$$

$y_2 = -6x_2 + n + 48 \rightarrow$ ~~B всегда выше~~ B на прямой,
которая выше, чем прямая A .
 \downarrow
нет пар $(A; B)$, $(B; A)$,
силу делить не надо

Ответ: 13135

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1. $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \rightarrow a_2 + b_2 \geq 6; a_3 + b_3 \geq 13; a_5 + b_5 \geq 11$

$bc \rightarrow b_2 + c_2 \geq 14; b_3 + c_3 \geq 21; b_5 + c_5 \geq 13$

$ac \rightarrow a_2 + c_2 \geq 16; a_3 + c_3 \geq 25; a_5 + c_5 \geq 28$

$abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 5^{a_5 + b_5 + c_5}$

$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$

$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$



$S_{ABC} = S_{ADC} +$

$a_2 + c_2 + b_2 \geq \max\left(\frac{36}{2}; a_2 + b_2; b_2 + c_2; a_2 + c_2\right) = 18 + S_{BCD} =$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = S_{ADC} + \frac{k}{\text{tg} \alpha} S_{CEF} =$

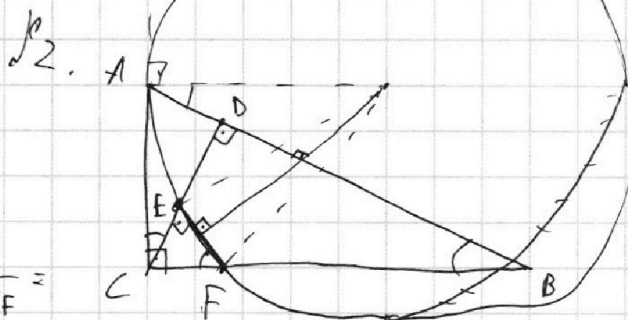
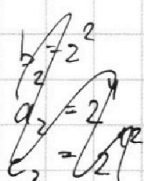
$= \frac{S_{ADC}}{k^2 S_{CEF}} + \frac{k}{\text{tg} \alpha} S_{CEF}$

$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{DB} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

$AD = \frac{2}{5} DB$



$\frac{BC}{CF} = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\text{tg} \alpha \cdot EF} =$

$= k \cdot \frac{1}{\text{tg} \alpha}$

$\angle CDB = 90^\circ = \angle CEF$

$\angle ACD = \alpha; \angle CAD = 90 - \alpha; \angle ECF = 90 - \alpha; \angle EFC = \alpha; \angle ABC = \alpha$

$\triangle ADC \sim \triangle CEF; \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$

$\triangle ACB \sim \triangle CDB; \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD}; \frac{AB}{BD} = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2 = \frac{49}{25}; \cos \alpha = \frac{5}{7} = \frac{BD}{CB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2. прог.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 - 25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

№3. 10 $\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$, $\sin x \in [-1; 1]$

~~$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$~~

$$\arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)]$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

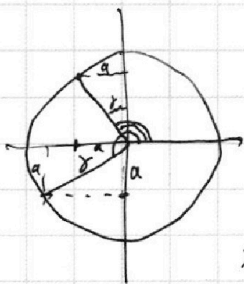
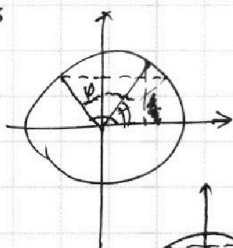
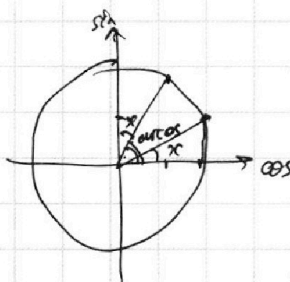
$$x \in \left[0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]: \arccos = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]:$$

~~$$\arccos = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi$$~~

$$\varphi = x - \frac{\pi}{2}$$

~~$$\arccos = x - \frac{\pi}{2}$$~~

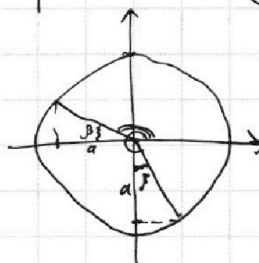
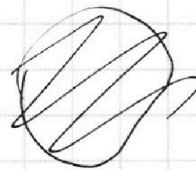
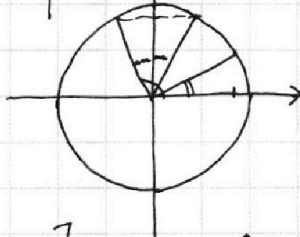


$$\varphi = x - \pi$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} + \varphi =$$

$$= x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$



~~$$\arccos = \pi - \beta$$~~

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi(n+1)\right]$$

$$0 \leq 10 \arccos \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

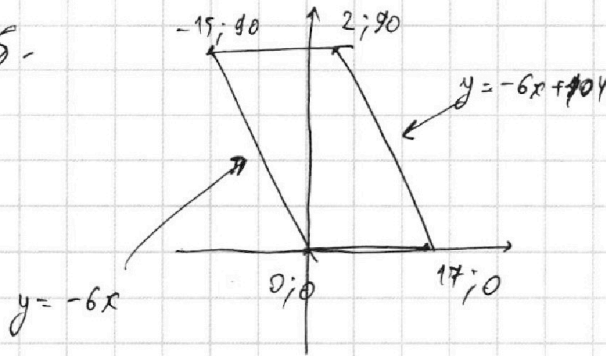
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

реш.



$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

Зафиксируем $A(x_1; y_1)$

$$6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1$$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

или $y = -6x + k : \leq 16$ точек с целыми координатами.
 $y \in [0; 90]$

~~$k = 0 : 16$~~

~~$k \in [1; 6] : 15$~~

~~$k \in [7; 12] : 14$~~

~~\dots~~

~~$k \in [45; 90] : 1$~~

$k \bmod 6 = 0 : 16$ точек

$k \bmod 6 \neq 0 : 15$ точек

~~$k = 48 + 6x_1 + y_1$~~

~~$k \in [0; 104]$~~

$6x_1 + y_1 \in [-48; 56] = n$

$y_1 = n - 6x_1 \rightarrow n \in [0; 104] = [0; 56]$

$n \bmod 6 = 0 : 16$ точек

$n \bmod 6 \neq 0 : 15$ точек

$$\begin{array}{r} 17 \\ - 104 \\ \hline 48 \\ 56 \end{array}$$

| n | кол-во точек |
|-----|--------------|
| 0 | 16 |
| 1 | 15 |
| 2 | 15 |
| 3 | 15 |
| 4 | 15 |
| 5 | 15 |
| 6 | 16 |
| 7 | 15 |
| ... | ... |
| 54 | 16 |
| 55 | 15 |
| 56 | 15 |

$\Sigma = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 15 \cdot 2 =$

~~$-160 + 30 + 15 \cdot 45 = 865$~~ 865

$$\begin{array}{r} 10125 \\ + 2560 \\ \hline 12685 \\ + 12685 \\ \hline 25370 \\ + 12685 \\ \hline 38055 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1675 \\ + 190 \\ \hline 1865 \\ + 225 \\ \hline 2090 \\ + 900 \\ \hline 2990 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245 \\ + 15 \\ \hline 260 \\ + 190 \\ \hline 450 \\ + 190 \\ \hline 640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 16 \\ \hline 32 \\ + 16 \\ \hline 48 \\ + 16 \\ \hline 64 \\ + 16 \\ \hline 80 \\ + 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 112 \\ + 16 \\ \hline 128 \\ + 16 \\ \hline 144 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_2 - b_2 \geq 2; a_2 + b_2 \geq 6; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = 12$$

$4 + 2 + 12 = 12 + 6 = 18$

$$a_3 - b_3 \geq 4; a_3 + b_3 \geq 13; a_3 = 9; b_3 = 4; c_3 = 17$$

$17 + 9 = 20 + 6 = 26$
 $20 + 4 > 20$

$$a_5 - b_5 \geq 28 - 13 = 15; a_5 + b_5 \geq 11; a_5 = 18; b_5 = 0; c_5 = 13$$

$15 + 13 = 28$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№ 5. 1) } \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6 \log_{11} 11}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t = \log_{11} x, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{-2}{3 \cdot t} - 5 \quad / \cdot 3t, t \neq 0, x \neq 1$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \log_{(0,5y)} 3 (11^{-13}) - 5$$

$$p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5 \quad / \cdot 3p$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$t = -p$$

$$\log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = 0$$

$$\log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1; \quad \textcircled{xy = 2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

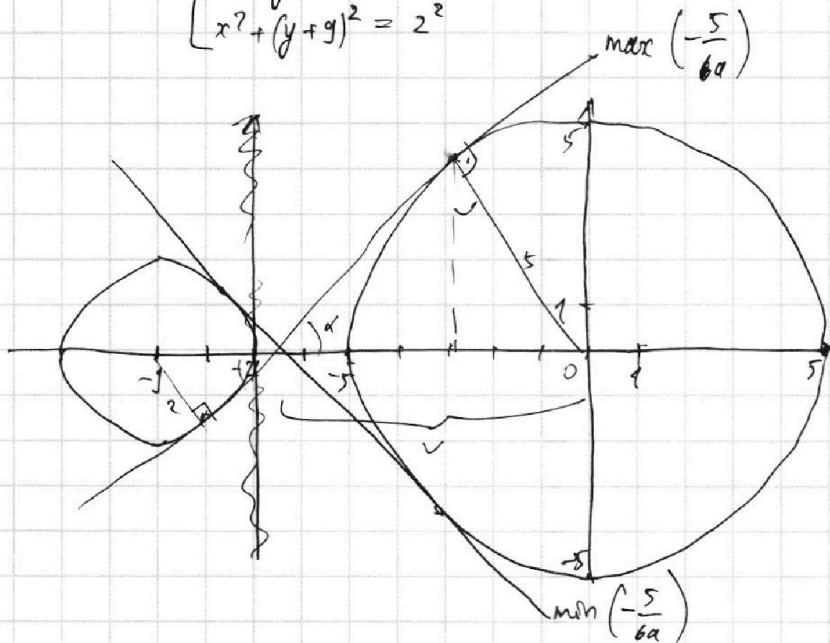


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$



$$\frac{21^{10} - 49}{32}$$

$$5x + 6ay - b = 0: \quad 6ay = b - 5x; \quad y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{9\sqrt{2}} = \frac{2}{9\sqrt{2}}; \quad 45 - 5V = 2V; \quad 7V = 45; \quad V = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

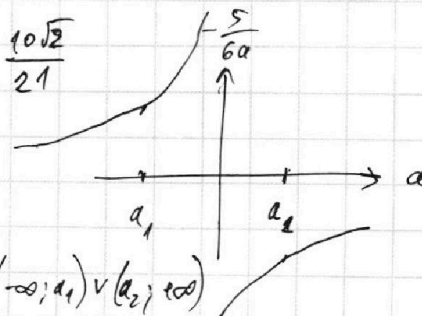
$$\tan \alpha = \max\left(-\frac{5}{6a}\right) = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$\min\left(-\frac{5}{6a}\right) = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = \frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{2}}{21} \mid \frac{10\sqrt{2}}{21} \right)$$



$$a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$$