



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}; \min(abc) = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} ab = \alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \cdot \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} \end{aligned}$$

$$\& a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{a} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a = p^{2q}, \text{ где } p, a \in \mathbb{N}$$

$$abc = 2^{21} \cdot \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot \sqrt{3^{41} \cdot 5^{53}} \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{\alpha \beta \gamma} = \sqrt{3 \cdot 5} \quad (\text{чтобы степени 3 и 5 под корнем стали четными и чтобы } abc \text{ было минимальным})$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

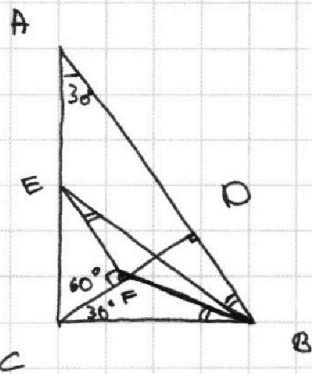
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (A1)



$EF \parallel AB$ $AD : DB = 2 : 1$

$$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{AD}{CD}$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg} \angle ACD = \frac{CD}{DB}$$

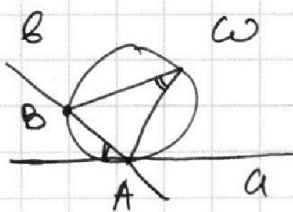
$$\operatorname{tg}^2 \angle ACD = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DB} = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ACD = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$$

$$\angle ACD = 60^\circ; \angle CAD = 30^\circ;$$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$, т.к. $CD \perp AB$ по усл.

$$\angle CFE = 30^\circ$$

По теореме о касательной к окружности:



$$\left. \begin{array}{l} a \cap \omega = A \\ a \cap b = A \\ b \cap \omega = A, B \end{array} \right\} \Rightarrow \angle a, b = \frac{1}{2} \cup AB$$

$\angle FBC = \angle FEB$, (т.к. $a = (BC)$, $b = (FB)$, $\cup AB = \cup BF$, $\angle FEB = \frac{1}{2} \cup BF$, т.к. B, F, E лежат на окр по условию, FEB - вписанный угол.)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle FEB = \angle ABF \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle CFB$, т.к.

$$\angle CBF = \angle EBA \text{ и } \angle EAB = \angle FCB = 30^\circ$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2} \text{ т.к. } \sin \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2 (12)

$$\begin{cases} \frac{CF}{AE} = \frac{1}{2} \\ \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sin \angle CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$AE = CE = \frac{1}{2} AC$$

~~$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2 = 4, \text{ т.к. } \Delta CEF \sim \Delta CAD$$~~

Ответ: ~~4~~

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{AC^2}{CE^2} = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \Delta CAD \sim \Delta CEF \\ \Delta CAD \sim \Delta ABC \end{array} \right)$$

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \cos^2 \angle CAB = \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$S_{\Delta CAD} = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC} \cdot \frac{3}{4}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}; \quad \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$x \in \left[-3\pi; 2\pi\right] !$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n & (1) \\ \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m & (2) \\ -\frac{3\pi}{2} + x + 2\pi k & (3) \\ -\frac{3\pi}{2} - x + 2\pi l & (4) \end{cases}$$

$$(1): \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n$$

$$-\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n = \frac{4}{10}\pi + 2\pi n = \frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi \end{cases}$$

$$(2): \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi m$$

$$6x = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 10\pi m = 2\pi + 10\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \end{cases}$$

$$(3): 2\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{3}{2}\pi$$

(3) и (4) вытекают из (1) и (2) при $k, l = 1$

$$\text{Ответ: } x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (12)

r_1 и r_2 — это два крайних случая

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{R_1}{x}, \quad x - \text{пересечение координата на } O_x \\ \text{точки пересечения } r_1 \text{ и } O_x$$

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{3}{x}$$

$$2x = 18 - 3x$$

$$5x = 18$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{3 \cdot 5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{8^2 \cdot 2^2}}} =$$

$$= \frac{5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{64}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{64-9}{64}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{55}{64}}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = -2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{-10}{\sqrt{11}}$$

$$a \in (-|a_1|; |a_1|) = \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

Для прямых r_1 и r_2 4 решения действительно быть не может, ведь увеличивая b , мы будем лишь отдаваться от ω_2 , а уменьшая, удаляться от ω_1 , где 4 решения как минимум хотя бы пересекают ω_1 и ω_2 .

Похожим образом можно рассуждать и для прямых, проходящих через точку $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$ и имеющих наклон: от α до $\pi - \alpha$.

Увеличивая или уменьшая b , мы будем лишь отдаваться от ω_1 или ω_2 , таким образом 4 решения у таких прямых быть не может.

Все остальные прямые ~~кроме вертикальной~~ имеют 4 решения и b .
проходящие через $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (М1)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \end{cases}$$

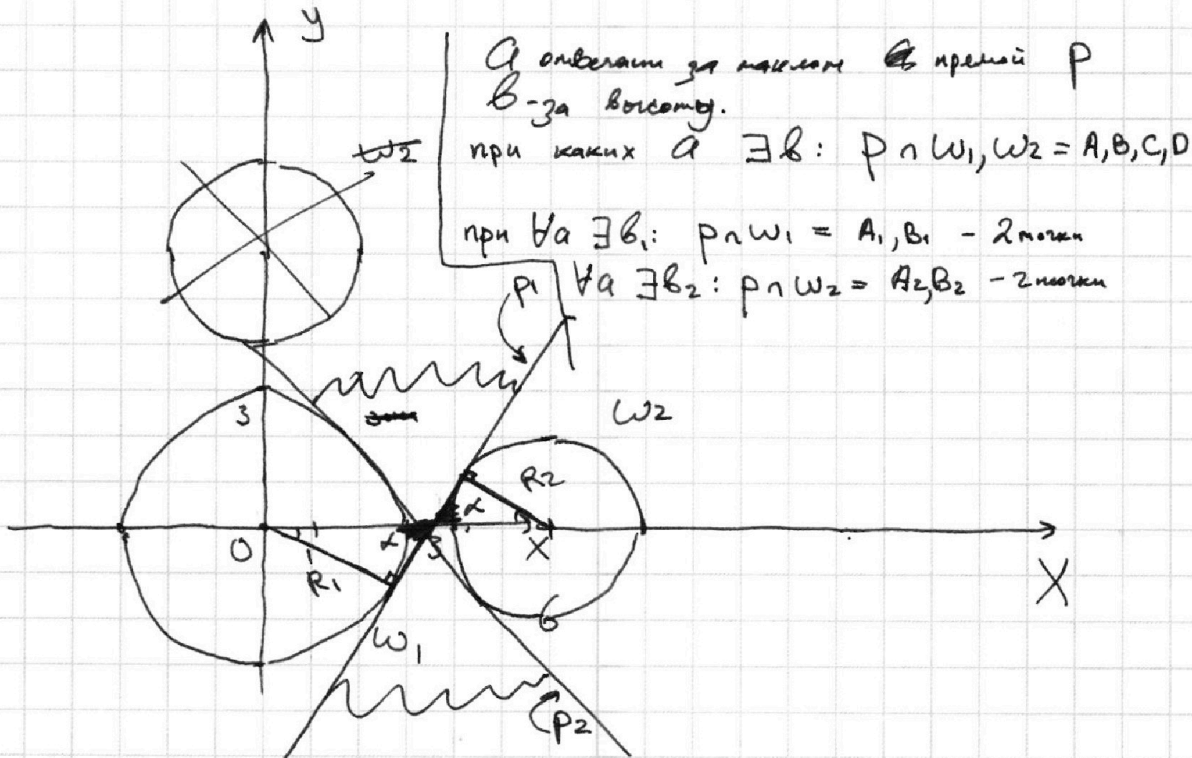
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ - прямая \mathbb{P}

(2): $x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ - окружность ω_1 ; $O_1(0;0)$; $R_1=3$

(3): $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$ - окр. ω_2 ; $O_2(6;0)$, $R_2=2$



$P_1, P_2 \cap \omega_1, \omega_2 = A_1, B_1, A_2, B_2$ (P_1 и P_2 касаются ω_1 и ω_2)

Если P имеет наклон $(-\alpha; \alpha)$, ~~тогда~~ ^{есть} 4 решения

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_1}{2}$, α - наклон P_1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (11)

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{отз. } x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Преобразуем выражения: пусть $z = 5y$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \log_x (3^5) - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{1}{2} \log_z (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8 \end{cases}$$

Пусть $f = \log_3 x$, $w = \log_3 z$, тогда

$$f + w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3 (x \cdot 5y) = \log_3 (xy) + \log_3 5$$

$$\log_3 (xy) = \frac{(f+w) - \log_3 5}{(f+w) - \log_3 5}$$

$$xy = 3$$

$$\begin{cases} f^4 + \frac{6}{f} = \frac{5}{2f} - 8 \\ w^4 + \frac{2}{w} = \frac{11}{2w} - 8 \end{cases} \quad f, w \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases} \quad (+) \rightarrow$$

$$\rightarrow f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f+w) \Rightarrow f^5 + w^5 = -8(f+w)$$

$$(f^5 + w^5 = (w+f)(f^4 - f^3w + f^2w^2 - fw^3 + w^4))$$

$$(f+w)(\dots) = -8(f+w) \rightarrow \boxed{f+w=0}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (A2)

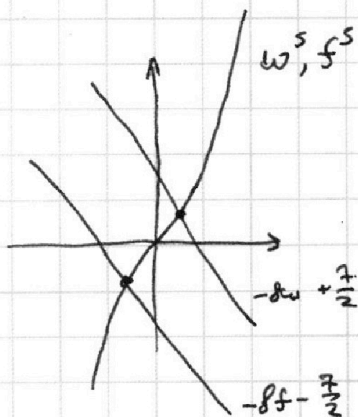
$f+w=0$ - единственно возможная сумма f и w , так как

уравнения: $f^5 = -8f - \frac{7}{2}$ и $w^5 = -8w + \frac{7}{2}$

имеют единственное решение, ведь f^5 и w^5 - монотонно

~~и это так, потому что~~ возрастающие функции, а

$-8f - \frac{7}{2}$ и $-8w + \frac{7}{2}$ - монотонно убывающие ф-ии.



Поэтому решение есть и оно единственное.

$$\begin{aligned} xy &= 3 & f+w &= \log_3 5 & & -\log_3 5 \\ & & & = 3 & & = \\ & = \frac{1}{3^{\log_3 5}} & & = \frac{1}{5} & & \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x - \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = 0$$

$$\cos \alpha - \sin \beta = 0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} - \right.$$

$$\left. \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = 0$$

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} =$$

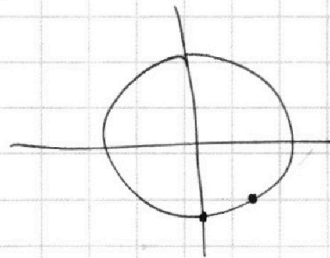
$$\cos x = \sin \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 2\pi \cdot n \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3}\pi + x = -\left(\frac{2}{3}\pi - x \right) + 2\pi \cdot k \quad (2) \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{2}{3}\pi - x = -\left(\frac{2}{3}\pi + x \right) + 2\pi \cdot l \quad (3)$$



$$a) \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi n = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$ab = \alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{\alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}}$$

$$= \sqrt{\alpha\beta\gamma} \cdot \sqrt{2^{43} \cdot 3^{41} \cdot 5^{55}} \in \mathbb{N}$$

$$14+19 = 43$$

$$23+18 = 41$$

$$25+30 = 55$$

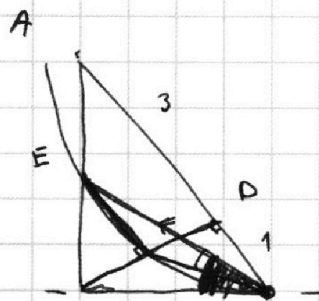
$$\alpha\beta\gamma = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$abc = \sqrt{2^{44} \cdot 3^{42} \cdot 5^{56}} = 2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$$

$$23+19 = 42 \quad \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 6$$

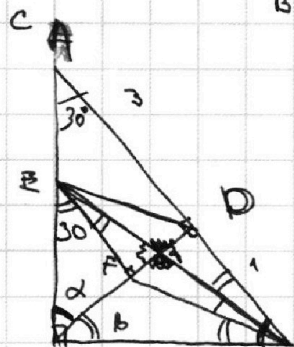
$$23+18 = 41$$

$$27+30 = 57$$



$AB \parallel EF$ $AD:DB = 3:1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$$



$$\frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{DB}{CD}$$

$$\tan \alpha = \frac{CD}{DB}$$

$$\angle FEB + \angle EBF = \angle FEB \cdot \frac{1}{2} = \tan^2 \alpha = \frac{AD}{DB} = 3$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow 60^\circ = \alpha$$

$$\angle FEB + 30^\circ + \angle CBE = 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_3(x))^4 + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 & \begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix} \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - 6 &= \frac{5-12}{2} = \frac{-7}{2} \\ \frac{11}{2} - 2 &= \frac{11-4}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(xz) + 2 \log_{xz} 3 = \frac{11}{2} \log_{xz} 3 - 8$$

$$\log_3 x = f \quad \log_3 z = g \quad \log_3 3 = 1$$

$$f^4 + 6 \cdot \frac{1}{f} = \frac{5}{2} \frac{1}{f} - 8$$

$$\begin{array}{r|l} f^5 + w^5 & f+w \\ \hline f^5 + w^5 & f^4 + w^4 - wf^3 \\ \hline w^5 - wf^4 & \end{array}$$

$$8g^4 + \frac{2}{g} = \frac{11}{2g} - 8$$

$$\begin{array}{r|l} w^5 + fw^4 & \\ \hline -wf^4 - fw^4 & \\ \hline -wf(f^3 - w^3) & = \\ \hline = -wf(f+w)(f^2 + wf + w^2) & \end{array}$$

$$\begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases}$$

$$(f^4 + w^4)(f^5 + w^5)$$

$$\begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases}$$

$$f+w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3(xz) = \log_3(xy \cdot 5)$$

$$f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f+w)$$

$$f^5 + w^5 = -8(f+w)$$

$$f+w = \log_3 x + \log_3 5y = \log_3(5xy) = \log_3 5 + \log_3(xy) = 0$$

$$\log_3(xy) = -\log_3 5$$

$$xy = 3^{-\log_3 5} = \frac{1}{5^{\log_3 5}} = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

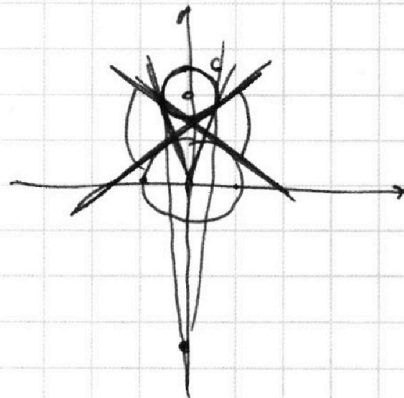
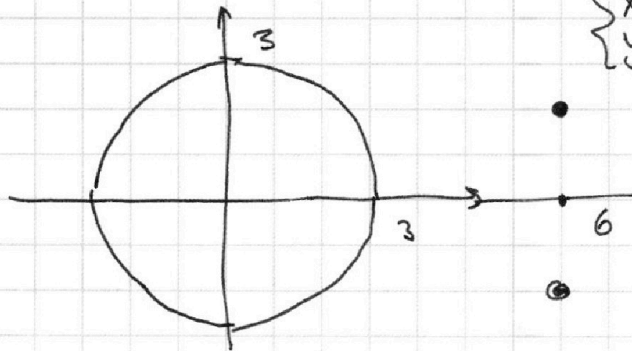
№4

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x - 6)^2 + (y - 2)(y + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2; -2 \end{cases}$$



$$2y = 36 - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}6$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

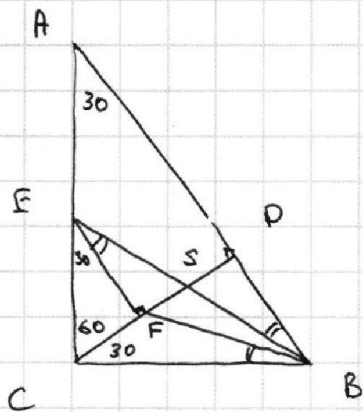
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle FEB + 30^\circ + \angle FEB + \angle AEF = 90^\circ$$

$$2\angle FEB + \angle EBF = 60^\circ$$



$$\triangle ABE \sim \triangle EBF$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = EA$$

$$(2) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} + 2\pi m = \frac{24}{5}\pi + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m$$

$$(3) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi + x + 2\pi k$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi k = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi k$$

$$x = -\frac{23 \cdot 5}{6 \cdot 4}\pi + \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 2}\pi k = -\frac{23}{24}\pi + \frac{5}{2}\pi k$$

$$(4) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi - x + 2\pi l$$

$$\frac{6}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi l = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi l$$

$$x = -\frac{23}{36}\pi + \frac{5}{3}\pi l$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

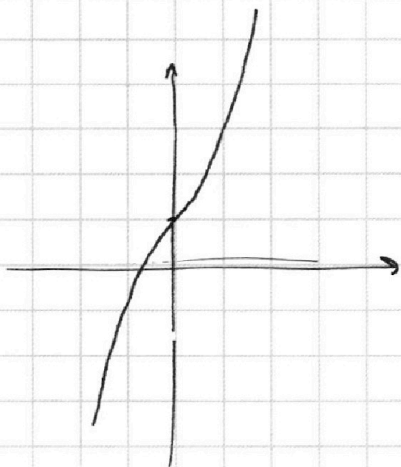
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$f^s = -df -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

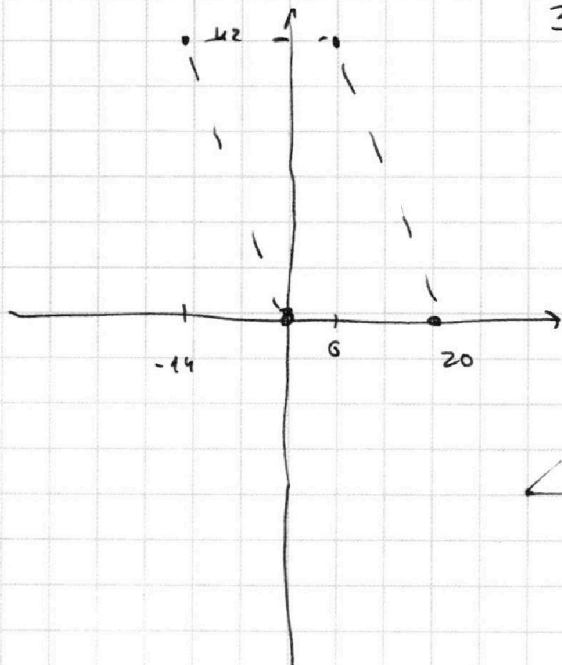
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

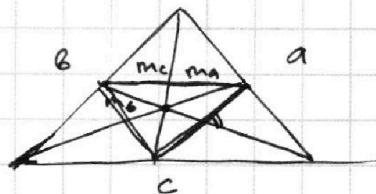
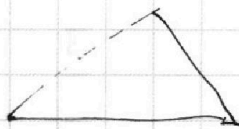


$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$



$$+\frac{D}{4} \cdot \frac{c^4}{4} \cdot \frac{a^2}{2} +$$

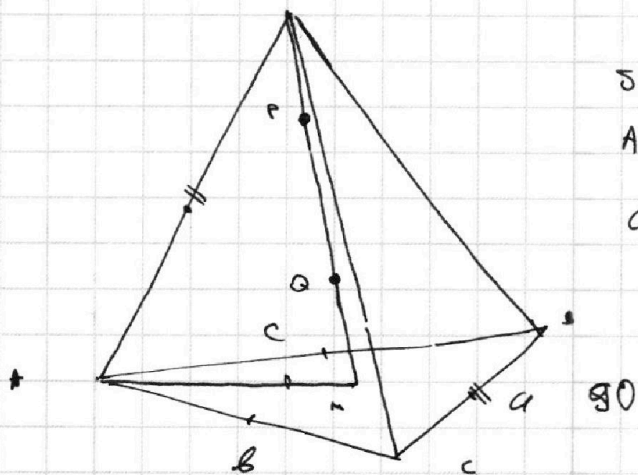
$$+\frac{c^4}{4} \cdot \frac{b^2}{2}$$



$$SA \neq BC$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$a = 12$$



$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{a^6}{16} - \frac{b^6}{16} - \frac{c^6}{16}}$$

$$S =$$