



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $ab = k 2^9 3^{10} 5^{10}$; $bc = m 2^{14} 3^{13} 5^{13}$; $ac = n 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Тогда, $a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{42} 3^{41} 5^{53}$. Так, a, b и c натуральные по условию, то abc - тоже натуральное, а значит, из числа $kmn \cdot 2^{42} 3^{41} 5^{53}$ мы должны быть уверены

является квадратом натурального, тогда, оно должно содержать в разложении на простые множители четное кол-во двоек, троек и пятёрок.

Чтобы это условие выполнялось, нам нужно, чтобы kmn делилось как минимум на 15. kmn было кратно четвёртой степени 15 или т.к. нам требуется наименьшее abc , возьмём $kmn = 15$

Тогда в этом случае $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{24}$

Приведём пример чисел a, b и c , когда такое возможно.

Допустим, $k=1, m=15, n=1$, тогда числа

$$a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1$$

чтобы kmn делило в разложении хотя бы одну тройку и как минимум 4 пятёрки, т.к. $a^2 c^2 = 2^{60}$

Допустим, что $a^2 b^2 c^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$ (т.к. мы ищем наименьшее abc), тогда $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$

Тогда, $a =$ Приведём пример, когда такое возможно:

$$\begin{cases} a = 2^7 5^{10} 3^8 \\ b = 2^2 3^3 \\ c = 2^{12} 3^{11} 5^{20} \end{cases}$$

Ответ: $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$

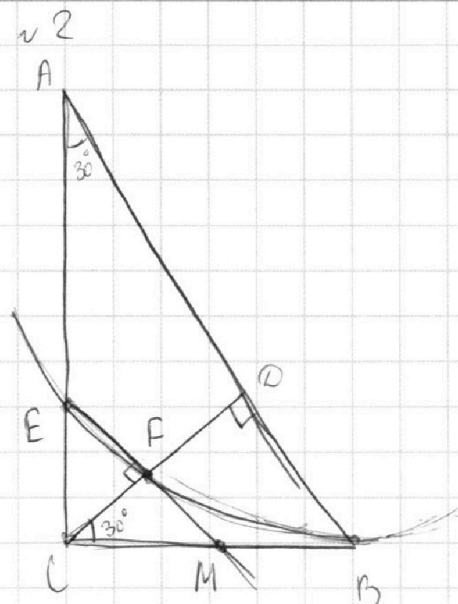
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AD:DB = 3:1$$

$$AD \parallel EF$$

кр. ω касается BC в M

Найти:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:

1) Пусть $AD = 3x$; $BD = x$; тогда $CD = x\sqrt{3}$

$$AC = \sqrt{3x \cdot 4x} = 2x\sqrt{3}; \quad BC = \sqrt{x \cdot 4x} = 2x$$

Заметим, что $BC = 0,5AB$, значит, $\angle CAB = 30^\circ$

2) $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ по двум углам;

$\angle CFE$ - острый

$\angle CFE = \angle CDA$, т.е. EF как соответственные при $FE \parallel AD$ и секущей CD

Пусть $\frac{CE}{AC} = k$

3) Продолжим EF за F ;

$MB^2 = MF \cdot ME$ как отрезок касательной

$$MB = \sqrt{k \cdot DB \cdot k \cdot AB} = k \sqrt{x \cdot 4x} = 2kx$$

$\angle MCF = 30^\circ$ значит, $CM = 2FM = 2kx$

Тогда, EM - средняя линия $\triangle ABC$ по признаку

Тогда, $\frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$, $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$, т.к. $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{16}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

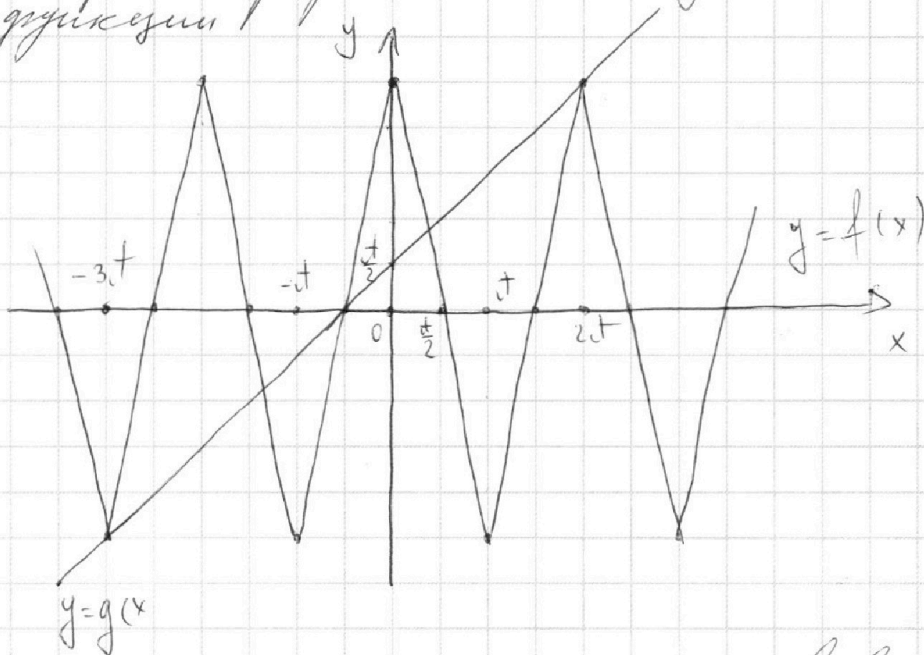
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad y = f(x) = 5 \arcsin(\cos x)$$

Построим графики обеих функций

$$y = g(x) = x + \frac{\pi}{2}$$



Из построения можно сделать вывод, что уравнение имеет ~~5 корней~~ как минимум 3 ~~корня~~ корня. Проверим, пересекаются ли графы ~~пересекутся ли~~ графика в точке $(-3\pi; -\frac{5\pi}{2})$ и $(2\pi; \frac{5\pi}{2})$

$$5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2} \text{ (верное)} \quad -3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2} \text{ (верное)}$$

$$5 \arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2} \text{ (верное)} \quad 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ (верное)}$$

Значит, уравнение имеет 5 корней, два из которых - это -3π и 2π .

Попробуем подобрать остальные

$$5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } -\frac{\pi}{2} \text{ - корень}$$

$$5 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } \frac{\pi}{3} \text{ - корень}$$

$$5 \arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } -\frac{4\pi}{3} \text{ - корень}$$

~~5 корней~~
Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

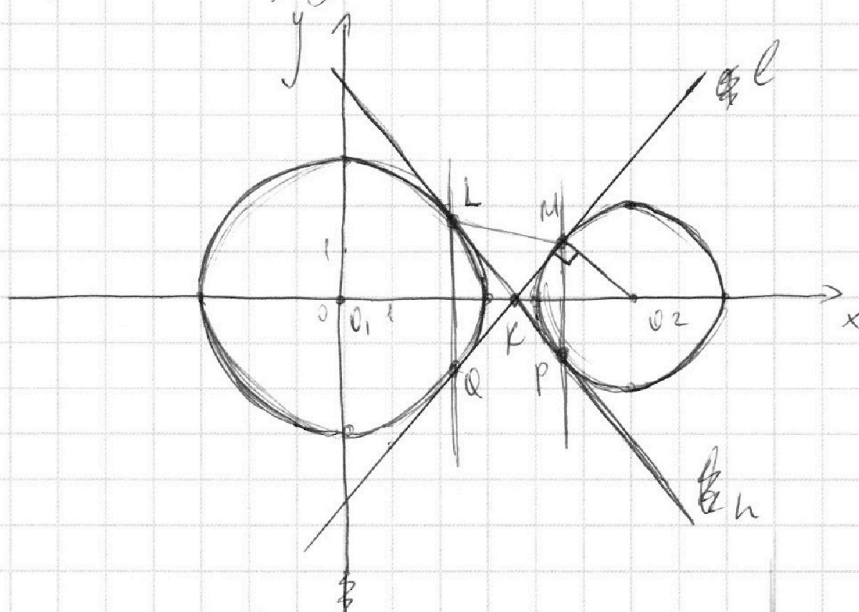
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Уравнениями данной системы задаются окружности и прямая, при этом прямая может иметь любое расположение на плоскости.
Построим окружности



Построим две общие касательные окружностей, они симметричны относительно Ox .
Можно утверждать, что ни одна прямая $x = m$, где $m \in \mathbb{R}$ не будет удовлетворять условию, это видно из чертежа.

Заметим, что прямые l и n можно назвать границами положений, так для любой прямой, у которой угловой коэффициент больше, чем у прямой a , или меньше, чем у прямой b , как бы мы ни двигали эту прямую в плоскости условие выполнения не будет, т.к. когда такая прямая начинает касаться одной окружности, она уже не пересекает

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

другую. а вот для всех чисел $k_{\min} < t < k_{\max}$, где
 ~~t — угловой коэффициент~~ (k_{\min} — угловой коэффициент α прямой l ,
 k_{\max} — угловой коэффициент β) прямая l для прямой
с таким угловым коэффициентом найдётся
такой свободный член, при котором выпол-
даны условия будет выполняться.

При этом, в силу симметрии относительно
 Ox , $k_{\min}' = -k_{\max}$

$$k_{\max}' = \operatorname{tg} \angle MKO_2; \quad \operatorname{tg} \angle MKO_2 = \frac{MO_2}{KM} = \frac{2}{KM}$$

~~$\triangle MKP \sim \triangle QKL$~~ $\frac{MK}{KQ} = \frac{2}{3}$, т.к. $\frac{MP}{LQ} = \frac{2}{3}$

$$\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{3}{2} \quad O_2K = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$MK = \sqrt{\frac{144 - 100}{25}} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{4\sqrt{11}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle MKO_2 = \frac{12}{4\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{1}$$

$$-\frac{3\sqrt{11}}{1} < t < \frac{3\sqrt{11}}{1}$$

$$-\frac{3\sqrt{11}}{1} < -\frac{a}{2} < \frac{3\sqrt{11}}{1}$$



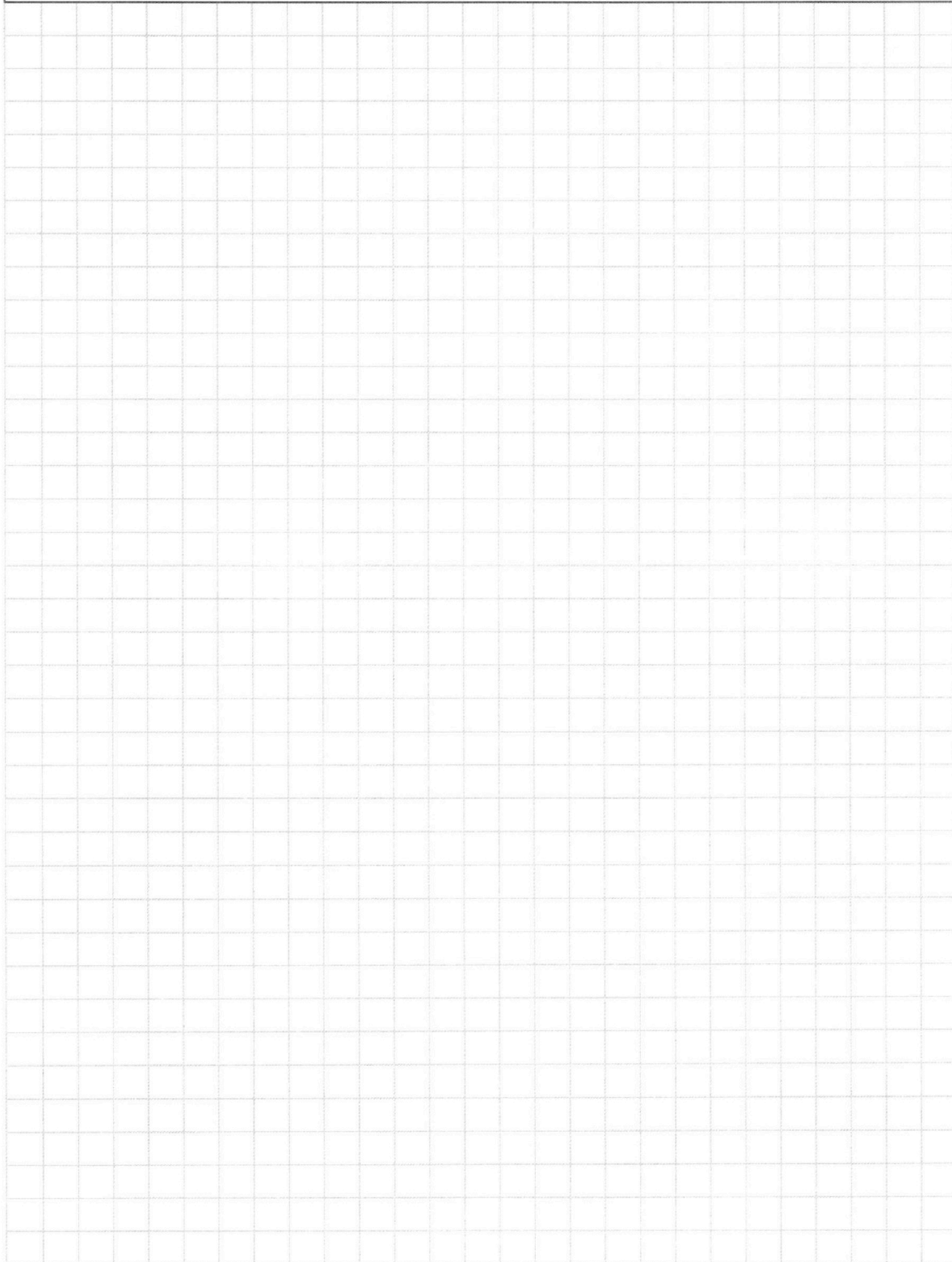
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

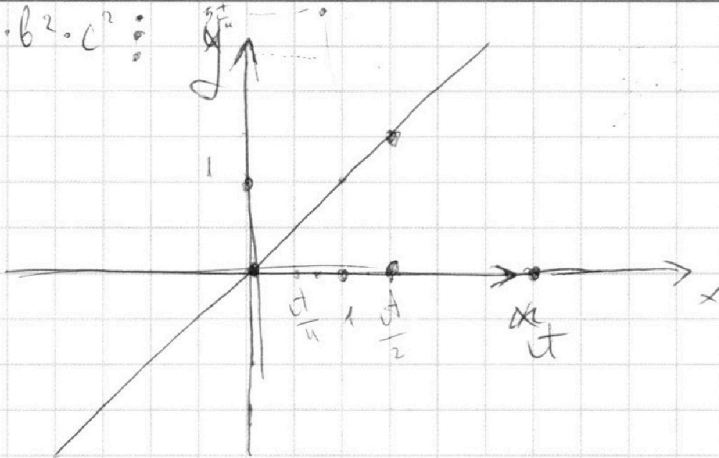
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 =$



~~$\arcsin 0 = 0$~~

~~$5 \arcsin \frac{\sin(\frac{t}{2} + x)}{5} = \frac{t}{2} + x$~~

~~$x = \frac{t}{5}$~~

$5(\arcsin(\sin(\frac{t}{2} + x))) = x + \frac{t}{2}$

$5(\frac{t}{2} + x - k) = x + \frac{t}{2}$

$5(\frac{t}{2} + x) - 5k = x + \frac{t}{2}$

$5k = 4(\frac{t}{2} + x)$

$k = \frac{4}{5}(\frac{t}{2} + x)$

$-\frac{t}{2} \leq \frac{t}{2} + x - k \leq \frac{t}{2}$

~~$\frac{t}{2} + x - k$~~

$-t \leq x - k \leq 0$

$x - k \leq 0$

$x \leq k$

$k m n = 3 \cdot 5^4$

~~$5(\frac{t}{2} + x) - 5k = x + \frac{t}{2}$~~

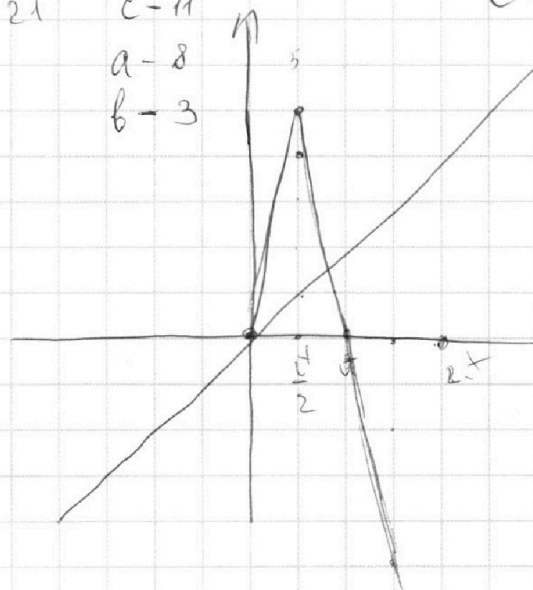
$a = 2^4 \cdot 5^{10} \cdot 4053$

$b = 2^2 \cdot 3^3$

$c = 2^{12} \cdot 5^{20} \cdot 3^{11}$

$3,5 \log_3 3 = 8$

21 $c = 11$
 $a = 8$
 $b = 3$



$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$

$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} 3 - 8$

$(\log_3 5xy)^4 + \log_3 \log_3 x + \log_3 5y + 16 = 0$

$(\log_3 5xy)^4 + \frac{3,5 \log_3 \log_3 5y}{\log_3 5y \cdot \log_3 5y} = 0$

М

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ab~~ $ab = k 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc = m 2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac = n 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = kmn 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

abc - натуральное, значит, $kmn = 15$ $kmn = 15$

$abc = 2^1 3^1 5^1$

$a = 2$
 $b = 2$
 $c = 2$
 $m = 15$
 $n = 30$

c = 12	c = 11	c = 14
a = 9	a = 14	a = 13
b = 3	b = 3	b = 1

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$kc = 2^1 3^1$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin t \leq \frac{5\pi}{2}$

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$

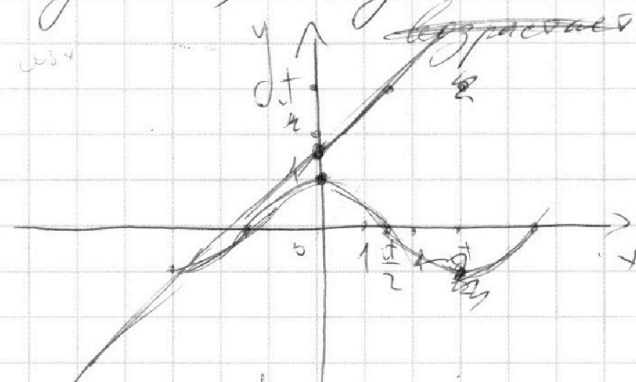
$5 \arcsin(\cos x) - x - \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \frac{5 \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} - 1 = \frac{-5 \sin x}{|\sin x|} - 1$

~~$\sin x$ независимо от знака $\sin x$ имеет определенный знак производной.~~

Там, где ~~$\sin x > 0$~~ убывает, там, где ~~$\sin x < 0$~~ возрастает.

~~$x = \pi$~~



~~$5 \arcsin(\cos x)$~~

$5 \arcsin(\sin t) = t$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

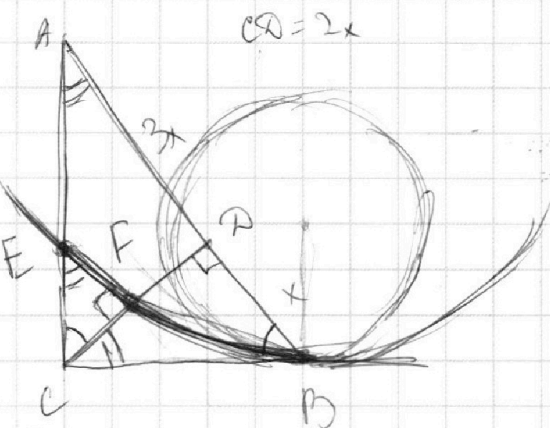
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

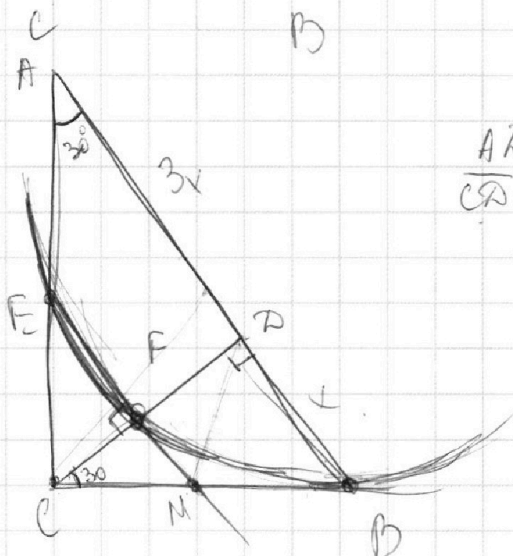


$AB \parallel EF$

$AD \cdot DB = 3:1$ *Используй:* $\frac{S_{ABC}}{S_{OEF}}$

$\frac{EC}{AC} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{AB}$

$\frac{EC}{BC} = \frac{CF}{BD} = \frac{EF}{CD}$



$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}, CD^2 = AD \cdot DB$

$CD = x\sqrt{3}$

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$

$MB^2 = MF \cdot ME = kx \cdot k4x = 2kx$

$MB = 2kx; MB = 2$

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$

$AC = \sqrt{4x \cdot 3x} = 2x\sqrt{3}$

$MB =$

$CD = x\sqrt{3} \quad BC = 2x \quad MF = kx$

$MB = \sqrt{kx \cdot 3kx} = kx\sqrt{3}; CM = 2kx$

$2kx + kx\sqrt{3} = 2x$

$k^2 = \frac{4}{7+4\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3 S_{ABC}}{7+4\sqrt{3}}$

$2k + k(2+\sqrt{3}) = 2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{OEF}} = \frac{S_{ABC}}{3 S_{ABC}} = \frac{7+4\sqrt{3}}{3}$

$k = \frac{2}{2+\sqrt{3}} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$abc: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

c содержит на $7 \cdot 5^{2^4}$

$$bc: 2^7 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

Больше, чем a 3^{13}

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

c содержит на 10^{2^2} , $8 \cdot 3^{18}$, $20 \cdot 5^{30}$
Больше чем b

a содержит на 5^{2^2} , $5 \cdot 3^{17}$, $17 \cdot 5^{30}$ больше b

$$ab = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z, \quad a = 2^{x+5} \cdot 3^{y+5} \cdot 5^{z+17}, \quad c = 2^{x+10} \cdot 3^{y+8} \cdot 5^{z+20}$$

$$abc = 2^{2x+5} \cdot 3^{2y+5} \cdot 5^{2z+17}$$

$$2x+5=9$$

$$bc = 2^{2x+10} \cdot 3^{2y+8} \cdot 5^{2z+20}$$

$$2x+5=9$$

$$ac = 2^{2x+15} \cdot 3^{2y+13} \cdot 5^{2z+37}$$

$$x=4$$

$$y=2,5$$

$$z=-3,5$$

$$abc = 2^{3x+15} \cdot 3^{3y+13} \cdot 5^{3z+37} =$$

$$= 2^{12+15} \cdot 3^{7,5+13} \cdot 5^{-10,5+37} = 2^{27} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, \quad b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, \quad c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_2 + x_3 = 14 \\ x_3 + x_1 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 12 \\ x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_2 + y_3 = 13 \\ y_3 + y_1 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 21 \\ y_2 = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 10,5 \\ y_1 = 7,5 \\ y_2 = 2,5 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$28 + 14 = 42$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 42$$

$$z_1 + z_2 = 10$$

$$z_3 = 16,5$$

$$z_2 + z_3 = 13$$

$$z_2 = 13 - 3,5 = 9,5$$

$$z_1 + z_3 = 30$$

$$z_1 = 13,5$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 26,5$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

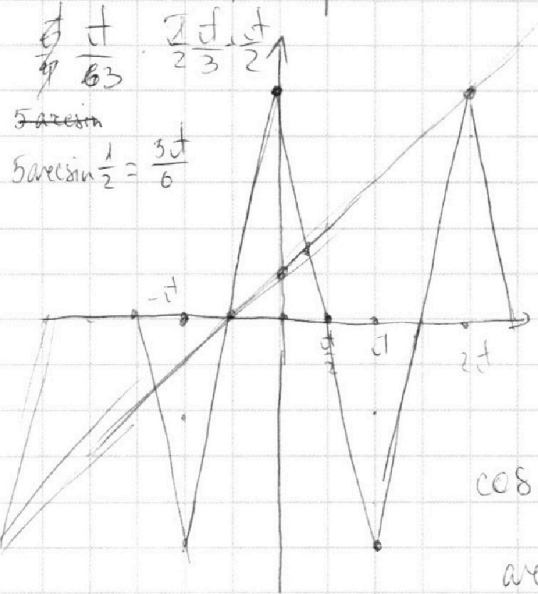
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{5t}{2} \leq 5a \cos \sin(\cos \alpha) \leq \frac{5t}{2}$$

$$-\frac{6t}{2} \leq x \leq \frac{4t}{2}$$

$x = 2at$ - решение



если решение есть, то оно в этом диапазоне.

$$\begin{cases} x = 2at \\ x = -\frac{t}{2} \\ x = \frac{t}{3} \\ x = -\frac{5t}{2} \end{cases}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arcsin =$$

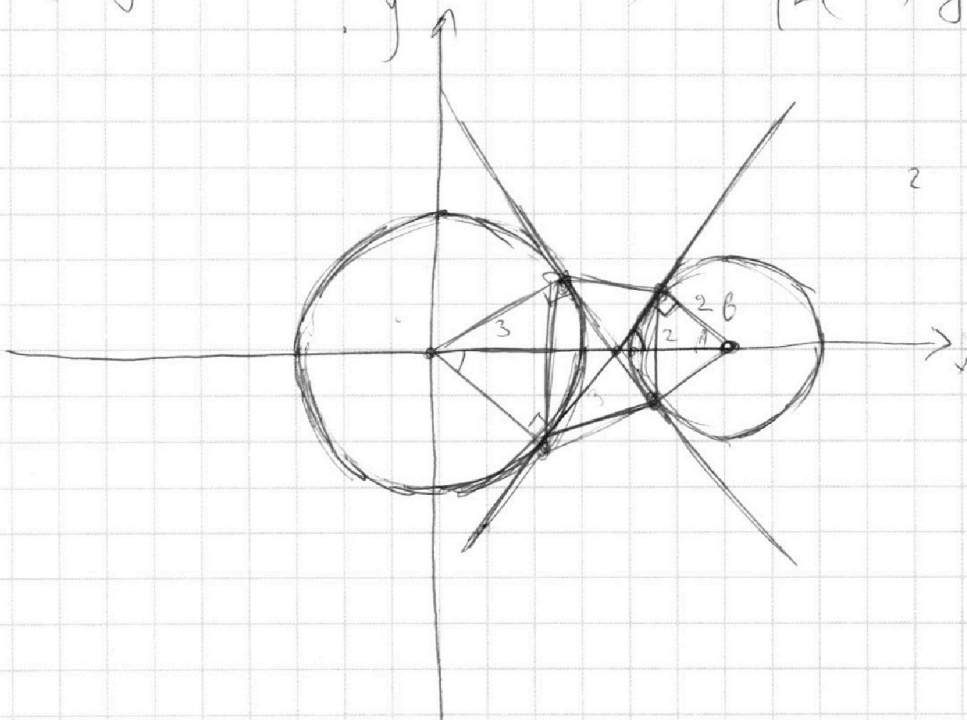
$$\cos = -\frac{1}{2}$$

$$5a \cos \sin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5t}{6}$$

$$\frac{8t}{6} + \frac{3t}{6} = \frac{5t}{6}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0.$$

$$2y = -ax + 3b.$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}.$$