



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$$

Но $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 > 34$,

Пример $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 9 \end{cases}$

Пример: $\begin{cases} \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 7 \\ \beta_3 = 14 \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$

Пример: $\gamma_2 = 0$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 19 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 20 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \min(abc) = \min(2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}) = \\ = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Т.к. $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$, а $\arccos(\cos x) = x \in [0; \pi]$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x; & 4\pi = 8x; & x = \frac{\pi}{2} \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$

$4\pi = 8x$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

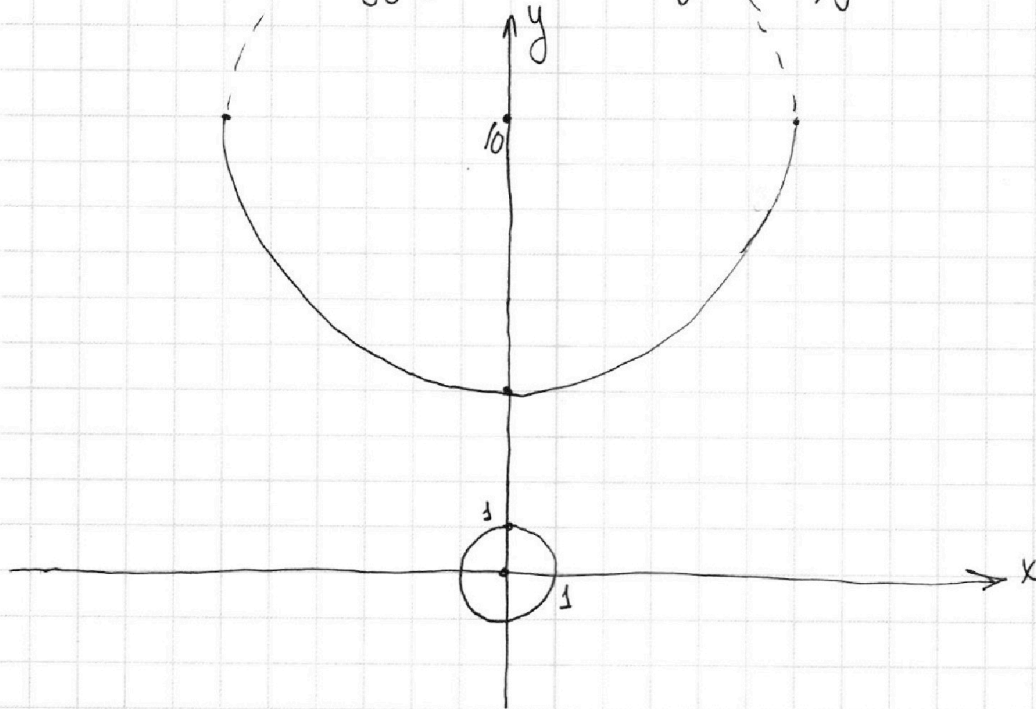
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

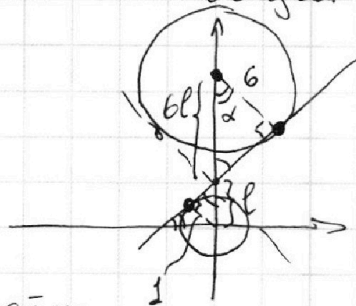
$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - прямая вращающаяся вокруг точки $A(0; \frac{4}{3}b)$. Эв Чреш.

① $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0$

① Графиком будут являться две окружности:



Найдем уравнения общих внутренних касательных:



$$10 = 6l + l$$

$$l = \frac{10}{7}$$

$(-1)B(0; \frac{10}{7})$ - принадлежит касательной

Пусть α - один из углов касательных

$$y = kx + b \quad (k > 0), \quad y = kx + \frac{10}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{6l} = \frac{7}{10}; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Следовательно уравнение касательных имеет вид $y = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Изменяя $\frac{a}{3} = c$ от $-\infty$ до ∞ будем смотреть ~~максимум~~ кол-во решений

$c \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) - \leq 4$ реш

~~$c \in (-\frac{\sqrt{51}}{7}; -\frac{\sqrt{51}}{7}) - 2$ реш~~

~~$c \in (-\frac{\sqrt{51}}{7};$~~

$c \in [-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}] - \leq 2$ реш

$c \in (\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty) - \leq 4$ реш

Ровно $\frac{a}{3}$ 4 реш ~~будут~~ в случае $\frac{a}{3} \in (-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty)$

$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty)$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\log_5 2x = a$; $\log_5 y = b$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$$\# \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ 3a^5 - 9 = 4 - 9a; 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 12 = -1 - 9b; 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(g) = 3g^5 + 9g$. Она нечетная, $(g \neq 0)$
 так $f(-g) = -(3g^5 + 9g) = -f(g)$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) - 13 = 0 \\ f(b) + 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) + f(b) = 0 \rightarrow a = -b; a + b = 0 \\ f(a) = 13 \end{cases}$$

Так $a + b = \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy$
 $(a \neq 0; b \neq 0)$ только если такое a , $2x \neq 1$
 так $f(g)$ при $g \neq 0$
 непрерывна $x > 0 \vee x \neq \frac{1}{2}$
 $a \neq 0 \rightarrow y > 0 \vee y \neq 1$

$$2x \cdot xy = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

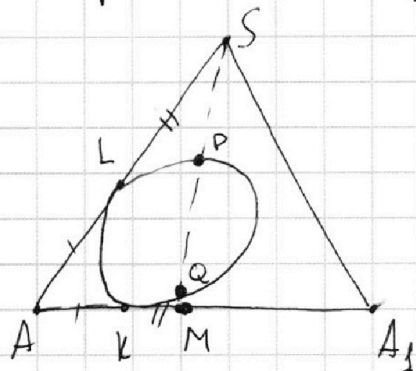
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим сечения пирамиды плоскостью:



$$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ + QP)$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$$

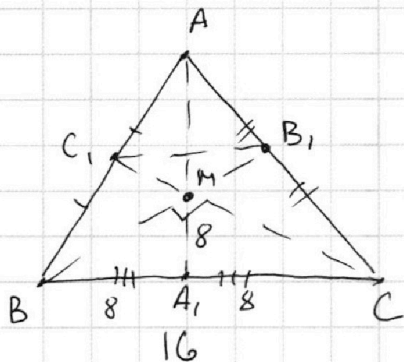
Т.к. $SP = MQ$ по условию, то

$$KM = LS$$

С учетом, что $AL = AK$ получаем, что $AS = AM$. $\triangle ASM$ - р/д

$$\text{След } AM = AS = 16$$

Рассмотрим основание ABC :



По св-ву $MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8 = BA_1 = A_1C$. След $\triangle BMC$ - пря. по признаку

$$S_{BC, B_1C} = S_{ABC} - S_{AB_1C} = S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} S_{ABC}$$

$$S_{BC, B_1C} = \frac{1}{2} \sin \angle BMC \cdot BB_1 \cdot C_1C$$

$$\frac{1}{2} BB_1 \cdot C_1C = \frac{3}{4} \cdot 100$$

$$BB_1 \cdot C_1C = 150$$

$$\text{След } AA_1 \cdot BB_1 \cdot C_1C = 150 \cdot 24 = 3600$$

Ответ: 3600



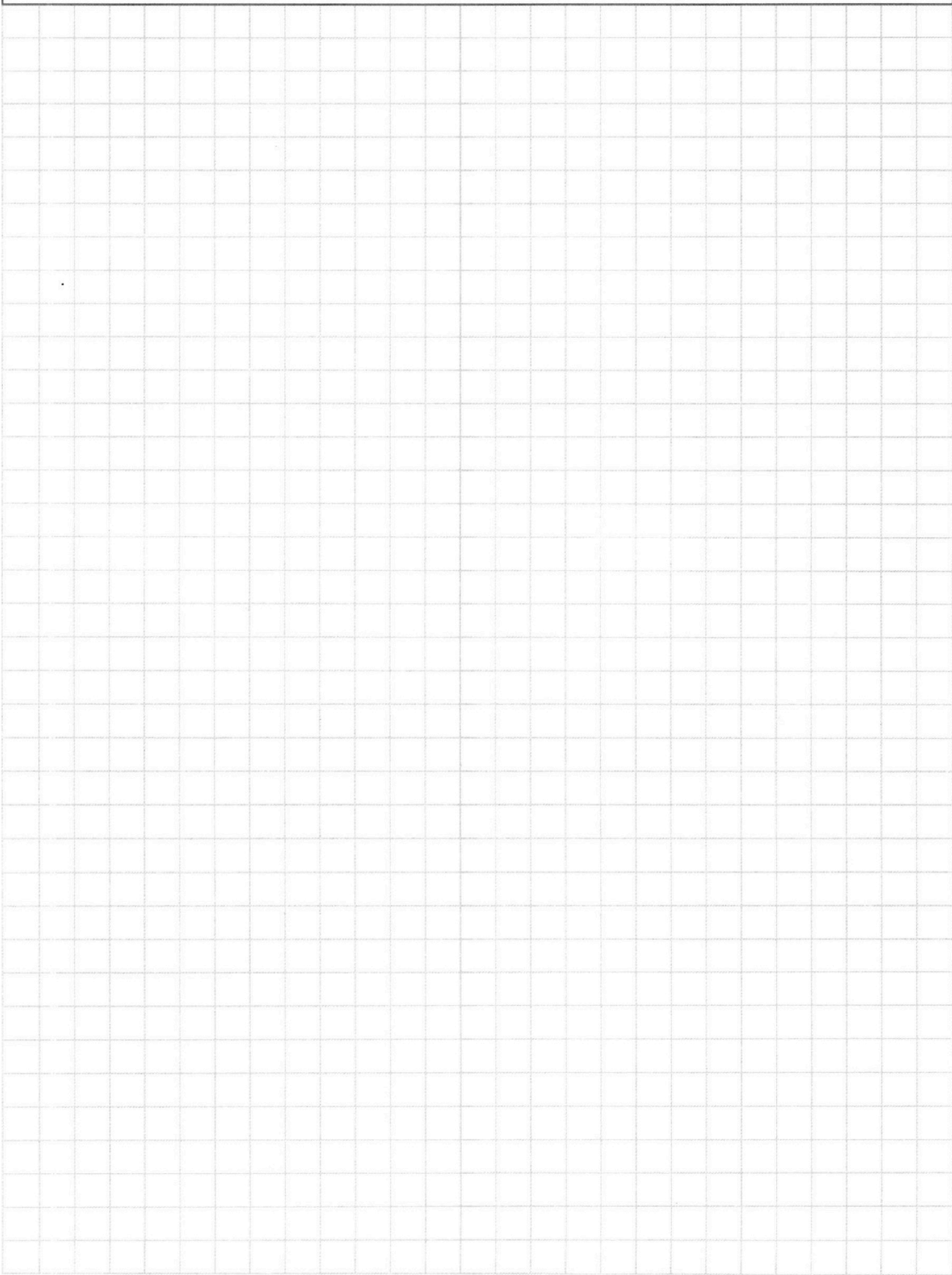
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b, c

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\min(a, b, c)$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 20$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 21$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$$

$$\alpha_1 \geq 8 - \alpha_2$$

$$\alpha_2 \geq 8 - \alpha_1$$

$$\beta_2 \geq 14 - \beta_1$$

$$\gamma_2 \geq 12 - \gamma_1$$

$$\alpha_3 \geq 4 + \alpha_1, \quad \alpha_1 + 8 - \alpha_1 + 4 + \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_3 \geq 6 + \beta_1, \quad 12 + \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\gamma_3 \geq 5 + \gamma_1$$

$$\alpha_1 + 4 + \alpha_1 \geq 14$$

$$\alpha_1 \geq 5$$

$$\beta_1 + 6 + \beta_1 \geq 21 \quad 2\beta_1 \geq \frac{21}{2}; \beta_1 = 11$$

$$\gamma_1 + 5 + \gamma_1 \geq 39 \quad \gamma_1 \geq 20, \gamma_1 = 34 \quad \gamma_1 = 17$$

$$2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

$$\alpha_1 = 5 \quad \gamma_1 = 17$$

$$\beta_1 = 11$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 68 \\ 29 \end{array}$$

$$\Rightarrow \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 = 39$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

$$abc^2; 2$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 = 39$$

$$\gamma_1 = 39 - \gamma_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha_1 \geq 12 - \alpha_2$$

$$\alpha_2 \geq 12 - \alpha_1$$

$$\alpha_3 \geq 39 - \alpha_1$$

$$51 - 2\alpha_1 \geq 17$$

$$39 + 29 = 68$$

$$abc$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -17 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$39 - \gamma_3 + \gamma_2 \geq 12$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$$

$$\gamma_2 - \gamma_3 \geq 17 - \gamma_3$$

$$34 \geq 2\alpha_1; \alpha_1 \leq 17$$

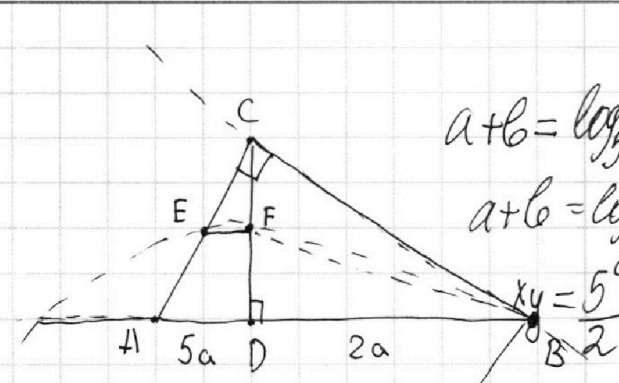
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x > 0, y > 0$
 $x \neq 1$
 $a+b = \log_5 2xy$
 $a+b = \log_5 2xy$
 $xy = 5^{a+b}$



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10 \arcsin(\cos x) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right)$

$\cos x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$x \in [0; \pi]$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$\cos x \in [-1, 1]$

$4\pi = 8x$

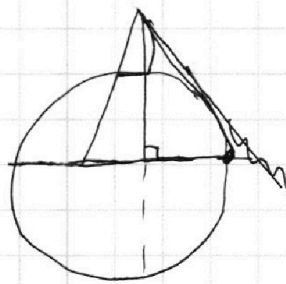
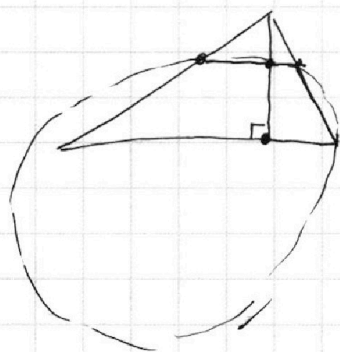
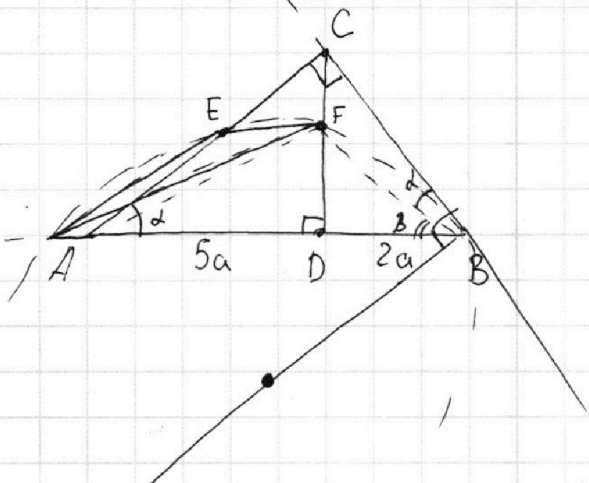
$x = \frac{4\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x$
 $x \in [0; \pi]$

$-\log_5 2 = a$

$\log_5 \frac{1}{2} = a$

$b = \log_5 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = ? \exists b$ Чреш.

$$ax + 4b = 3y$$

$$x^2 + (y^2 - 20y + 100) = 36$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$y = kx + \frac{10}{7}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{100}{49} = 1$$

$$(k^2 + 1)x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{51}{49} = 0$$

$y^2 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$$

$y =$

75

2

24

$\times 150$

$\frac{120}{+24}$
 $\frac{3600}{}$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{51}{49}x^2 + \frac{20\sqrt{51}}{49}x + \frac{100}{49} = 1$$

$$100x^2 + 20\sqrt{51}x + 51 = 0$$

$$(10x + \sqrt{51})^2 = 0$$

25.

$$\begin{array}{r} k \quad 3^2 \quad 15 \\ 150 \\ \times 24 \\ \hline 60 \\ + 30 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$10 - \frac{10}{7} = \frac{60}{7}$$

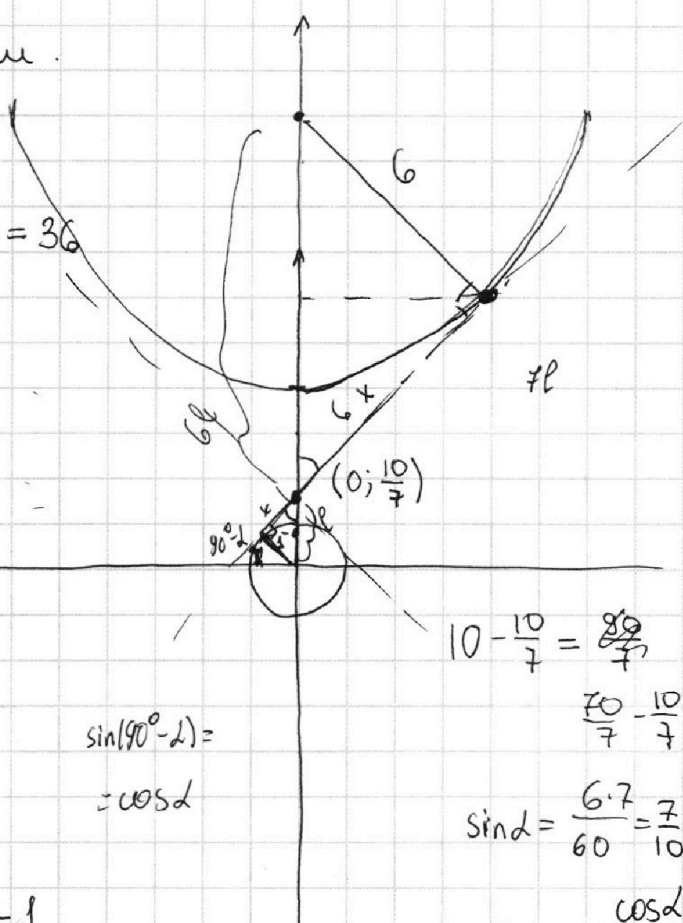
$$\frac{60}{7} - \frac{10}{7} = \frac{50}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{6 \cdot 7}{60} = \frac{7}{10}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

150



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \quad a = -b$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \log_{2x} 5 - 3 \quad f(a) + f(b) = 0 \quad \frac{1}{5^4}$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad a = \log_5 2x \quad f(b) + 13 = 0$$

$$b = \log_5 y \quad \log_5^4 y + 4 \log_5 y = -\frac{1}{3} \log_5 53$$

$$f(a) - 13 = 0$$

$$f(b) + 13 = 0$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 0$$

$$\log_5 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_5 y} + 3 = 0$$

$$\log_5 y \neq 0$$

$$y \neq 1$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 + 1 + 9b = 0$$

$$3b^5 + 13 + 9b = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a^5 + b^5) + 3(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + 3a + b^5 + 3b = 0$$

$$a(a^4 + 3) = -b(b^4 + 3)$$

$$f(a) = -f(b)$$

$$f(a) + f(b) = 0$$

$$f(a) + f(b) = 0$$

$$a^5 + b^5 + 3(a + b)$$

$$f(a) = -f(b)$$

$$a = -b$$

$$5^0 = \frac{1}{2}$$

$$\log_5 2x$$

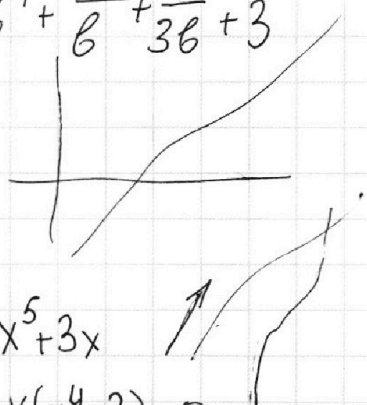
$$f(x) = x(x^4 + 3) = x^5 + 3x$$

$$x \text{ и } -x$$

$$x(x^4 + 3) = 0$$

$$f(x) = x^5 + 3x$$

$$f(-x) = -x^5 - 3x = -(x^5 + 3x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 3^4 5^{12} \quad abc = 2^{14} \quad \min(abc) \quad abc$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17} \quad 8+12+14=34 \quad abc: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \quad 20$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \quad 3^{28} \quad 17 \quad 5^{39} \quad a=19 \quad c=20$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2 \quad 14 \quad 21 \quad 7 \quad 14+20+21=55 \rightarrow \frac{55}{2}=28$$

$$abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39} \quad abc = 2^{17} 3^9 5^9 \quad abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39} \quad 12+17+39=29+39=68 \quad 34$$

$$abc: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \quad a=5^{19} \quad abc = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = p \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = q \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases} \quad ap = \sqrt{kpq} \cdot 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \quad ck = \sqrt{3kpq} \cdot 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{22}$$

$$a^2 b^2 c^2 = kpq \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \quad k, p, q$$

$$abc = \sqrt{kpq} \cdot 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{27} \quad \sqrt{3kpq}$$

$$bq \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} = \sqrt{3kpq} \cdot 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot 3^{27}$$

$$bq 5^5 = \sqrt{3kpq} \cdot 2^3 \cdot 3^6 \quad a = 5^{19} \cdot 2^3 \cdot 3^6$$

$$b = \frac{\sqrt{3kpq} \cdot 2^3 \cdot 3^6}{q \cdot 5^5} \quad c = 5^{20} \cdot 2^3 \cdot 3^6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$d_1 + d_2 + d_3 = k$$

$$d_1 + d_2 \geq 8$$

$$d_2 + d_3 \geq 12$$

$$d_1 + d_3 \geq 14$$

$$\underline{d_1 + d_2 + d_3 \geq 17}$$

Пример:

$$d_1 = 5$$

$$d_2 = 3$$

$$d_3 = 9$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq \frac{SS}{2} = 27,5$$

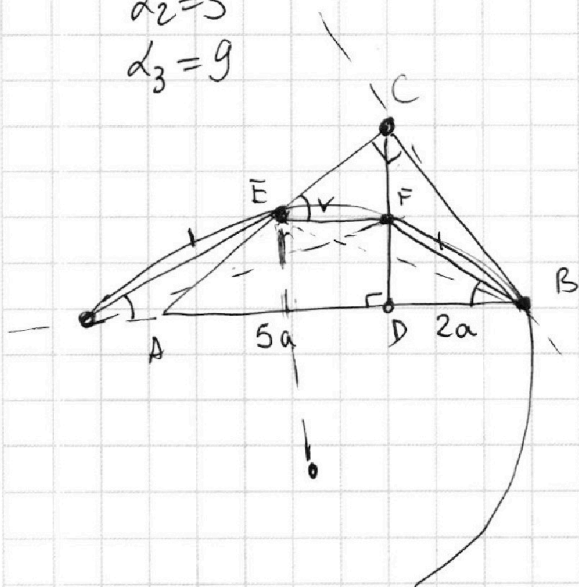
$$b_1 + b_2 + b_3 = 28$$

Пример. 7 7 14 29

~~7 7 14~~ 7+7 68

$$7+19$$

$$19+7=26$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

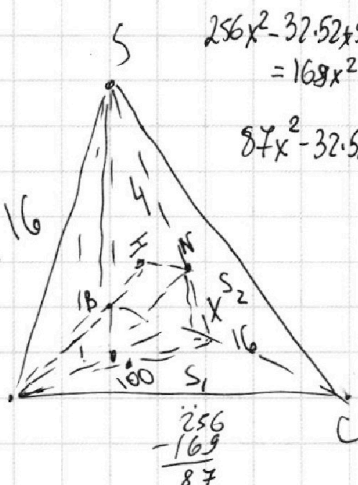
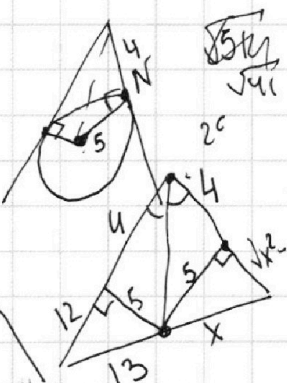
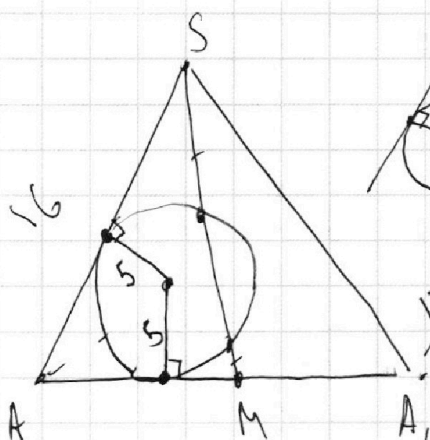
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$256x^2 - 32 \cdot 52x + 52^2 = 169x^2 - 169 \cdot 25$$

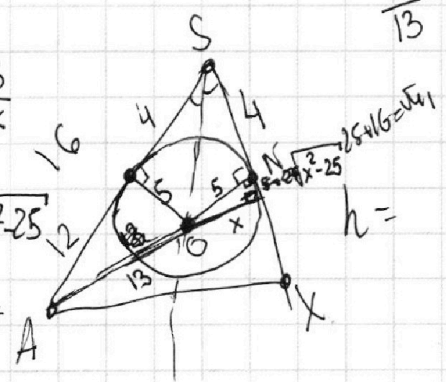
$$87x^2 - 32 \cdot 52x$$

$$\frac{16}{13} = \frac{4 + \sqrt{x^2 - 25}}{x}$$

$$\frac{16}{4 + \sqrt{x^2 - 25}} = \frac{13}{x}$$

$$16x = 52 + 13\sqrt{x^2 - 25}$$

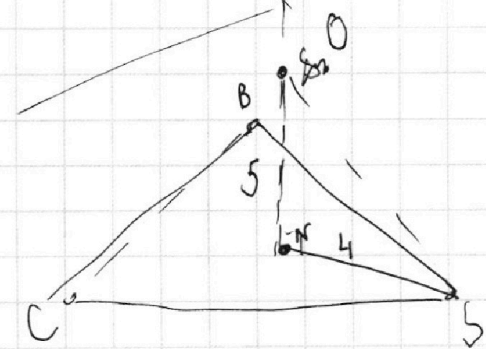
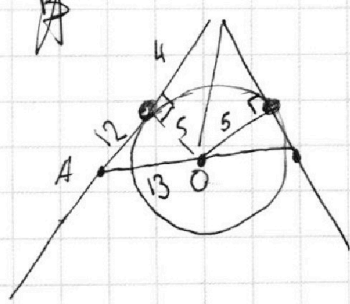
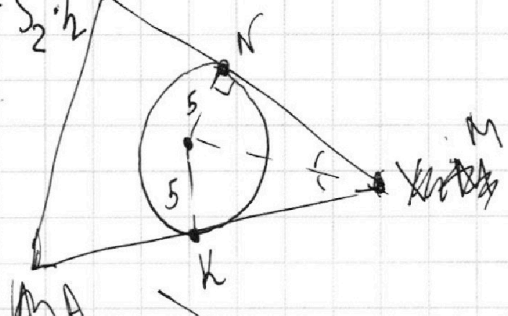
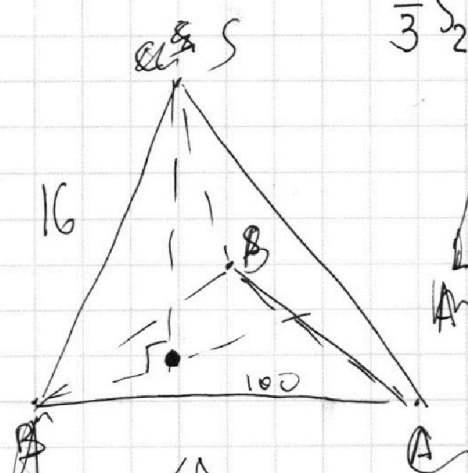
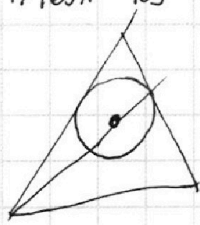
$$256x^2 - 16 \cdot 2 \cdot 52 + 52^2 = 169x^2 - 169$$



$$x = \frac{29}{3}$$

$$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3BC}$$

$$\frac{1}{3} S_2 \cdot h$$



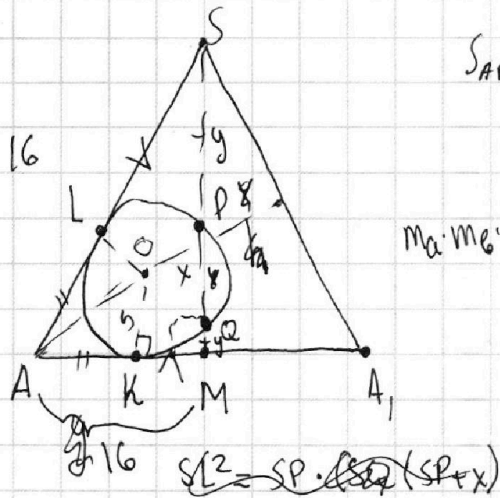
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

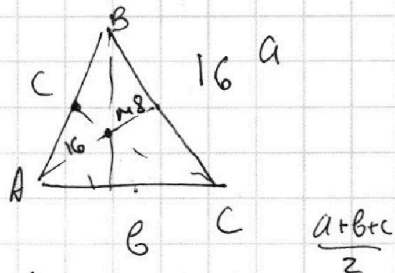


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 100$$

$$m_a \cdot m_b \cdot m_c =$$



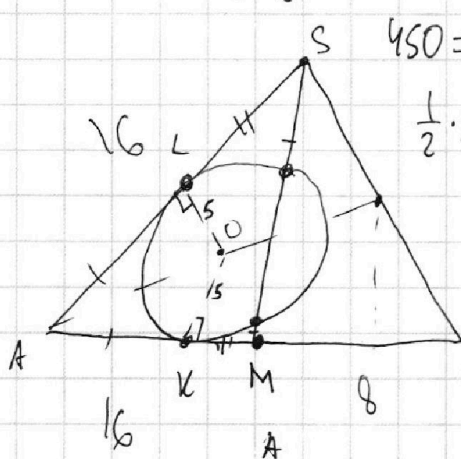
$$\frac{1}{8} \sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 - 2b^2 + c^2)(2b^2 - 2a^2 + c^2)}$$

$S_{\triangle m}$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = 100$$

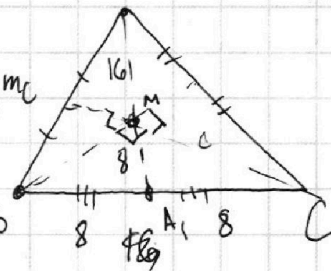
$$\frac{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{4} = 100$$

100



$$450 = 24(m_c \cdot m_b) + m_b \cdot m_c$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$



$$50 = \frac{1}{2}$$

$$S = 100$$

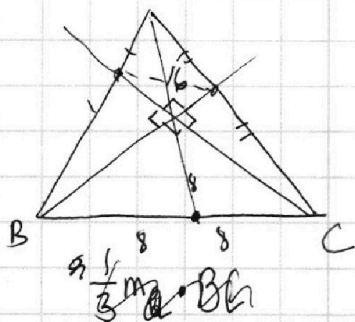
$$\frac{100}{6}$$

$$m_a = 26, m_b = 24$$

$$\frac{2}{3} m_c \cdot m_b$$

$$\frac{3}{4} S = \frac{1}{2} m_b m_c$$

$$m_b m_c =$$



$$\frac{100}{6}$$

$$\frac{1}{8} m_b \cdot c = \frac{100}{6}$$

$$m_b \cdot m_c = k$$

$$m_b \cdot c = 50$$

$$\frac{1}{2} c \cdot m_b = 50$$

$$450 = 24m_c + 24m_b + m_b m_c$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_b \cdot \frac{2}{3} m_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_b = 100$$

$$\frac{2}{9} (m_b m_c + m_a m_c + m_a m_b) = 100 \quad \frac{2}{9} (m_b m_c + 24m_c + 24m_b) = 100$$