МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

• $a, b, c \in \mathbb{N}$; $ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$; $ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$;

$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$; $b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$;

• $a_1 + b_1 \geq 9$; $b_1 + c_1 \geq 14$; $a_1 + c_1 \geq 19$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$; $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$;

рав-во при $a_1 = 7$; $b_1 = 2$; $c_1 = 12$;

• $a_2 + b_2 \geq 10$; $b_2 + c_2 \geq 13$; $a_2 + c_2 \geq 18$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$; $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$;

рав-во при $a_2 = 7$; $b_2 = 3$; $c_2 = 11$;

• $a_3 + b_3 \geq 10$; $b_3 + c_3 \geq 13$; $c_3 + a_3 \geq 30$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$; $a_3 + b_3 + c_3 \geq 27$;

рав-во не достигается так как $a_3 + c_3 \geq 30$; тогда и $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$; рав-во при $a_3 = 15$; $b_3 = 0$; $c_3 = 15$;

• тогда $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3}$;

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$; рав-во при $a = 2^7 3^7 5^{15}$; $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$;

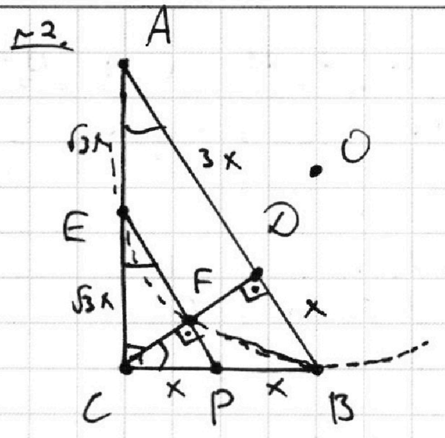
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$AB \parallel EF$; $AD : DB = 3:1$;

• Пусть $DB = x$; $AD = 3x$;

$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x$;

$BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$;

$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$;

• Тогда $\angle CAB = 30^\circ$; $EF \cap BC = P$;

$\angle CAB = \angle CEP = \angle BCD$; т.к. $AB \parallel EF$

• PB - касательная тогда

$CP = y$; $PB = 2x - y$; $FP = \frac{y}{2}$; $PE = 2y$;

• Тогда $PB^2 = PF \cdot PE$; $(2x-y)^2 = \frac{y}{2} \cdot 2y$;

$4x^2 - 4xy + y^2 = y^2$; $4x^2 = 4xy$; $y = x$;

• $EC = \sqrt{3}x$; $CP = x$; $PB = x$; $CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$; $EF = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x$;

$S_{CEF} = \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$.

$S_{ABC} = 2\sqrt{3}x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2$;

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3}$;

Ответ: $\frac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2}$;

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$;

$-3\pi \le x \le 2\pi$;

- если $\pi < x \le 2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x - \frac{5\pi}{2}$;
  $5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = 8\pi$; $x = 2\pi$;
- если $0 < x \le \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$;
  $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$; $2\pi = 6x$; $x = \frac{\pi}{3}$;
- если $-\pi < x \le 0$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$;
  $5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = -2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$;
- если $-2\pi < x \le -\pi$, то $\arcsin(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} - x$;
  $-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$; $-8\pi = 6x$; $x = -\frac{4}{3}\pi$;
- если $-3\pi \le x \le -2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2}$;
  $5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = -12\pi$; $x = -3\pi$;

Ответ: -3π; $-\frac{4}{3}\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; 2π;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

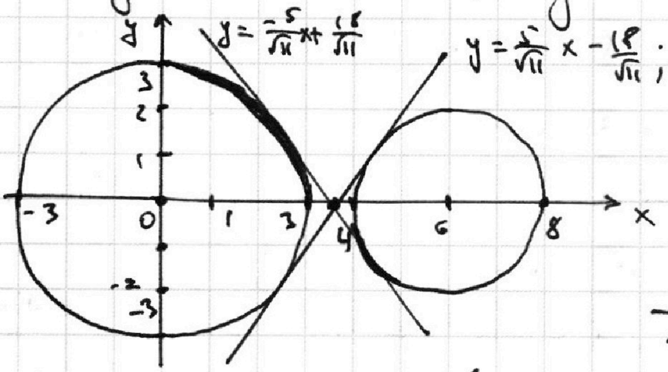
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

1 реш. при каком-то b;

- $x^2+y^2=3^2$; – окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 3)
- $x^2+y^2-12x+32=0$; $(x-6)^2+y^2=4$; – окр. с центром в $(6;0)$ и радиусом 2;
- $2y=-ax+3b$; $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$,



$y+kx+l=0$; ур-ние касат. к двум окр.

условие касания: $\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}}=3$; $\frac{|6k+l|}{\sqrt{k^2+1}}=2$;

- в одном случае $l>0$; $6k+l>0$;
  $l=3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l=2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l=2l$; $-l=18k$;
  $-6k=\sqrt{k^2+1}$; $36k^2=k^2+1$; $35k^2=1$; $k=\frac{1}{\sqrt{35}}$;
  но это внеш. касат.
- $6k+l<0$; $k<0$
  $l=3\sqrt{k^2+1}$; $-6k-l=2\sqrt{k^2+1}$; $-18k-3l=2l$; $5l=-18k$;
  $-\frac{6k}{5}=\sqrt{k^2+1}$; $\frac{36k^2}{25}=\sqrt{k^2+1}^2$; $36k^2=25k^2+25$;
  $11k^2=25$; $k=-\frac{5}{\sqrt{11}}$; $l=-\frac{18}{5}\cdot\frac{-5}{\sqrt{11}}=\frac{+18}{\sqrt{11}}$;
- $l<0$; $6k+l>0$; $k>0$
  $-l=3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l=2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l=-2l$;
  $18k=-5l$; $l=-\frac{18}{5}k$; $-\frac{6k}{5}=\sqrt{k^2+1}$;
  $k=\frac{5}{\sqrt{11}}$; $l=-\frac{18}{\sqrt{11}}$;

две касательные (внутренние):

$y=\frac{5}{\sqrt{11}}x-\frac{18}{\sqrt{11}}$; $y=\frac{-5}{\sqrt{11}}x+\frac{18}{\sqrt{11}}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда $-\frac{a}{2}=\frac{-5}{\sqrt{11}}$; $a=\frac{10}{\sqrt{11}}$; или $a=\frac{-10}{\sqrt{11}}$;

$-\frac{a}{2}\le\frac{-5}{\sqrt{11}}$; $a\ge\frac{10}{\sqrt{11}}$; $-\frac{a}{2}\ge\frac{10}{\sqrt{11}}$; $a\le-\frac{10}{\sqrt{11}}$;

при касании точек пересечения прямой с окружностью будет две, поэтому при $a=\frac{10}{\sqrt{11}}$ или $a=\frac{-10}{\sqrt{11}}$; наша система имеет максимум 2 решения при каждом в.

при $a<\frac{-10}{\sqrt{11}}$ или $a>\frac{10}{\sqrt{11}}$ ~~н~~ найдётся такое в, что решений будет 4, то есть прямая будет пересекать максимум одну окружность, значит ≤ 2 решений;

при $-\frac{10}{\sqrt{11}}<a<\frac{10}{\sqrt{11}}$ всегда найдётся такое в, что прямая будет иметь 4 пресечения с окружностями, достаточно провести её через точку пересечения двух внутренних касательных; через точку $(3,6;0)$, $0=-1,8a+\frac{3}{2}в$; $1,5в=1,8a$;

$в=\frac{18}{15}a$; $в=\frac{6}{5}a$; $в=1,2a$;

при таком в будет 4 решения сис-мы;

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$;

№5.

• $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$; $x \neq 1$; $y \neq \frac{1}{5}$; $x>0$; $y>0$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2,5}{\log_3 x} + 8 = 0$; $\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$;

$\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$;

$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{5,5}{\log_3(5y)} + 8 = 0$; $\log_3^4 (5y) - \frac{3,5}{\log_3(5y)} + 8 = 0$;

• Заметим, если $u = \log_3 x$; $v = \log_3(5y)$, то $u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0$; $v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0$; если u – решение первого ур-ния, то $-u$ – решение 2-го ур-ния; и наоборот v – реш. 2-го; $-v$ – первого;

т.к. $u \neq 0$, то $u^5 + 8u + 3,5 = 0$
и $v \neq 0$, то $v^5 + 8v - 3,5 = 0$

заметим, что эти функции строго возрастающие $\Rightarrow$ имеют ровно 1 корень, т.к. если подставить допустим 1000 и -1000, то будут разные знаки у полученных значений; $\Rightarrow \geq 1$ корня, функции непрерывные (без выколотого нуля), тогда ровно 1 решение.

$\log_3 x = -\log_3(5y)$; $\log_3(5xy) = \log_3 1$;

$5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$; $xy = 0,2$;

Ответ: 0,2;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. $O(0;0)$; $P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $R(20;0)$;

$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$; $(3x_2+y_2)-(3x_1+y_1)=33$;

• заметим, что на прямых вида $y=-3x+b$, где $b\in\mathbb{Z}$ значение функции $f(x;y)=3x+y$, постоянно;

$y+3a=-3(x-a)+b$; $3(x-a)+y+3a=3x+y$;

• тогда $f(x_2;y_2)-f(x_1;y_1)=33$;

всего таких прямых внутри параллелограмма 61, достигаются все значения от 0 до 60;

• тогда A может быть с прямой, где $f(x;y)=0$, пронумеруем прямые от 0 до 60;

A с 0; B с 33; A с 27; B с 60;

A с 1; B с 34; ...

на прямых, чей номер $\vdots 3$ всего 15 подходящих точек с целыми координатами, на остальных лишь 14;

тогда всего способов выбрать A и B

$10\cdot15^2+18\cdot14^2=5778$;

(т.к. можно взять любую точку на первой прямой и любую на другой)

Ответ: 5778;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. $AS = BC = 12$; $S_{ABC} = 90$;

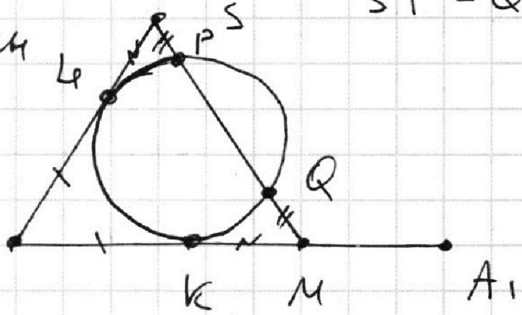
а) рассмотрим сечение SAA_1; $SP = QM$;

ω-окружность-сечение сферы

ω касается AS в L;

ω касается AM в K;

тогда $AL = AK$ (как отрезки касательных)



• MK – касательная $\Rightarrow MK^2 = MQ \cdot MP$;
SL – касательная $\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ$; $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow MK = SL \Rightarrow AM = SA = 12$; тогда $AA_1 = 18$;

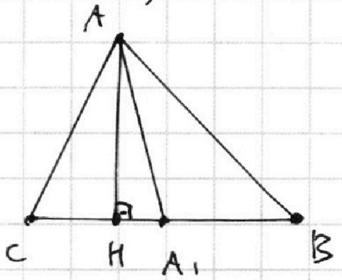
• $BC = 12$; $AH = h_a = \frac{S_{ABC}}{BC} \cdot 2 = \frac{180}{12} = 15$; AH – высота в ABC;

$\sqrt{AA_1^2 - AH^2} = A_1H^2 = 3\sqrt{36-25} = 3\sqrt{11}$;

не нарушая общности $BH = 6 + 3\sqrt{11}$; $CH = 6 - 3\sqrt{11}$;

$AB^2 = 15^2 + (6+3\sqrt{11})^2$; $m = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$;

$AC^2 = 15^2 + (6-3\sqrt{11})^2$;



$m_c = \frac{\sqrt{(12^2+15^2+135-36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 - 36\sqrt{11}}}{2}$;

$= \frac{\sqrt{1008 - 108\sqrt{11} - 15^2 - 135}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$.

$m_b = \frac{\sqrt{(12^2+15^2+135+36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 + 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 + 108\sqrt{11}}}{2}$;

$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11} = \sqrt{162^2 - 27^2 \cdot 11} =$

$= \sqrt{2^2 \cdot 81^2 - 27^2 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 3^8 - 3^6 \cdot 11} = 3^3\sqrt{36-11} =$

$= 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$;

• $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 135 \cdot 18 = 2430$;

б) Ω касается BCS в точке N; $SN = 4$;

$R = 5$; $SN = 4$; O – центр Ω; $ON = 5$, $SO = \sqrt{41}$;

• так как $AS = AM$, то точки S и M равкоудалены, относительно O $\Rightarrow$

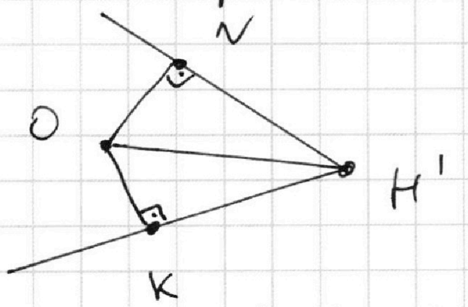
$\Rightarrow OK = 5$; $OM = OS = \sqrt{41}$; $KM = 4$;

$AK = 12 - 4 = 8$;

Тогда $KH' = 15 \cdot \frac{10}{18} = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 5}{\cancel{9}_{3}} = \frac{25}{3}$;

KH' – [redacted] перпендик. на BC;

• рассмотрим сечение [redacted] NKH';



$ON = OK = 5$;

$KH' = \frac{25}{3} = H'N$ (как отрез. касат.)

[redacted] $OH' = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34}$;

$\sin \angle OH'N = \frac{5}{\frac{5}{3}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$;

$\cos \angle KH'N = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = \frac{34-18}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$;

$\angle KH'N = \arccos \frac{8}{17}$;

Ответ: а) 2430; б) $\arccos \frac{8}{17}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

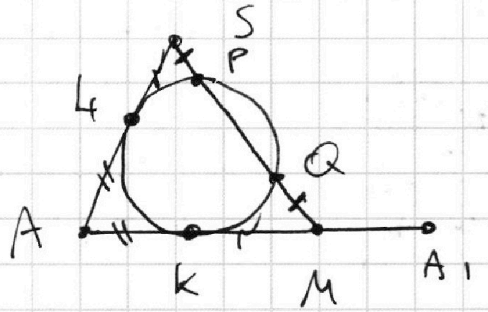
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

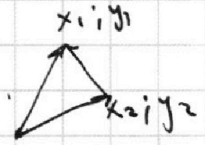
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$S_{ABC} = 90$; $SA = BC = 12$,



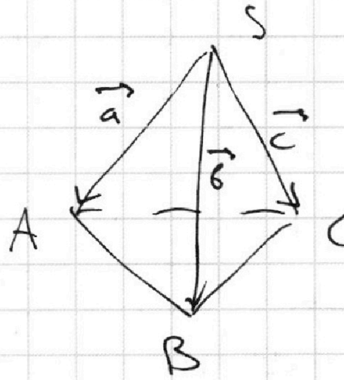
$(1;2)$; $(2;1)$

$\cancel{x_1 y_2 + x_2 y_1}$

$1 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\boxed{x_2 \cdot y_1 - x_1 y_2}$

$\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$,

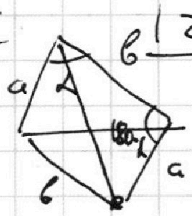


$|\vec{a}| = 12$.

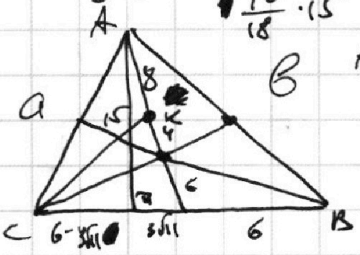
$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

$|\vec{c} - \vec{b}| = 12$.

$m^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$



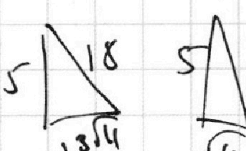
$b \frac{12 \cdot h}{2} = 90$ $h = 15$, $\frac{10}{18} \cdot 15 = \frac{50}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$,



$AS = AM = 12$.

$AA_1 = 18$,

1910
1008
−360
648



$6 \times \frac{23}{5}$
135

$SL^2 = SP \cdot SQ$.

$KM^2 = MQ \cdot MP$;

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$.

$+\ a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = m^2$

$2(a^2 + b^2) = c^2 + (2m)^2$

$m = 36$; $c = 12$;

$2(a^2 + b^2) = 12^2(1 + 3^2)$

$a^2 + b^2 = 12^2 \cdot 5$

360 144 135 225 504 360

$a^2 = 15^2 + 36 - 36\sqrt{11} + 99 = 360 - 36\sqrt{11}$

$b^2 = 15^2 + 36 + 36\sqrt{11} + 99 = 360 + 36\sqrt{11}$ $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

225 + 135 360

$m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 2 \cdot 12^2 - 360 - 36\sqrt{11}}}{2}$

$\times \frac{135}{2}$ 270 $\times$ 9 2430

$= \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$, $m_c = \frac{\sqrt{648 + 108\sqrt{11}}}{2}$;

108 | 9, 12; 648 | 8, 81

144 × 2 288 + 360 648

$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11}$

$9^4 \cdot 8^2 - 9^2 \cdot 12^2 \cdot 11$

4^2 720 × 2 1440

16 × 9 144 − 11 198

99 + 36 4 135

$(2m)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$

$9 \cdot 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 16 - 11}$

$450 + 72 + 9 \cdot 11 \cdot 2$
270 270

$m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

648 | 4, 162; 108 | 4, 27

720 1440
$12^2 \cdot 10 - 12^2 = (12)^2 \times 648$ 144

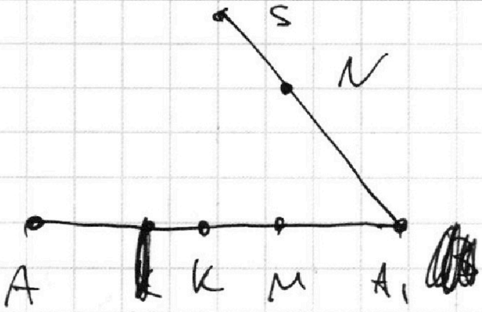
× 18 18 144 18 324

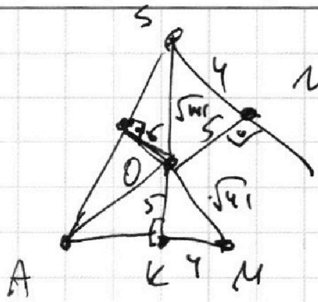
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

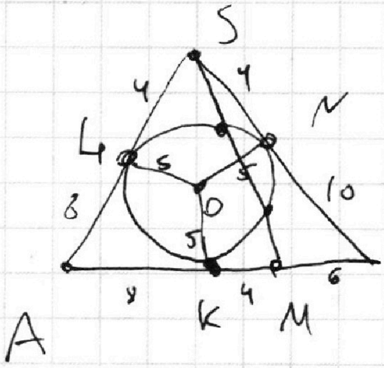


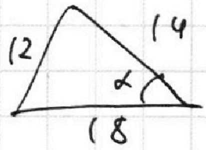


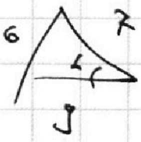
$16+25=41$

$MO=SO=\sqrt{41}$;

$KM=4$;







$50+80$

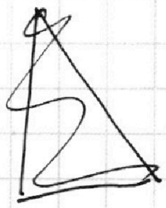
130
-36
94

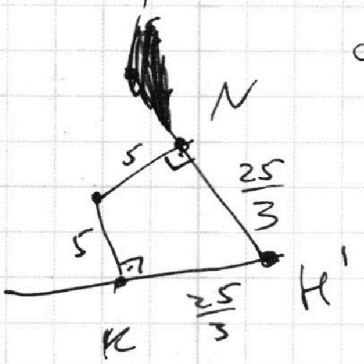
$36=49+81-2\cdot 9\cdot 7\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{57}{63}$;

94
57

$\cos\alpha=\frac{19}{21}$;





$5 \quad \frac{25}{3} \to 1 \quad \frac{5}{3}$

$\frac{5}{3} \to 3 \quad 5$

$\frac{5}{3}\cdot\sqrt{34}$

$\left(\frac{50}{\sqrt{34}}\right)^2=$

$h=\frac{\frac{125}{3}}{\frac{5}{3}\cdot\sqrt{34}}=\frac{25}{\sqrt{34}}$;

$\frac{5}{\sqrt{11}}x-\frac{18}{\sqrt{11}}=y$

$5\sqrt{1+\frac{25}{9}}=$

$=5\sqrt{\frac{34}{9}}=$

$x^2+y^2=9$

$\frac{+25}{9}$
34

$18^2=324$
-99
225

$x^2+(5x-18)^2\cdot\frac{1}{11}=9$

$y^2=(5x-18)^2\cdot\frac{1}{11}$

$11x^2+25x^2-180x+18^2=99$

$36x^2-180x+15^2=(6x-15)^2=0 \quad x=\frac{5}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$

$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$

$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$

$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$

$a_1 + b_1 \geq 9$
$a_2 + b_2 \geq 10$
$a_3 + b_3 \geq 10$

$b_1 + c_1 \geq 14$
$b_2 + c_2 \geq 13$
$b_3 + c_3 \geq 13$

$a_1 + c_1 \geq 19$
$a_2 + c_2 \geq 18$
$a_3 + c_3 \geq 30$

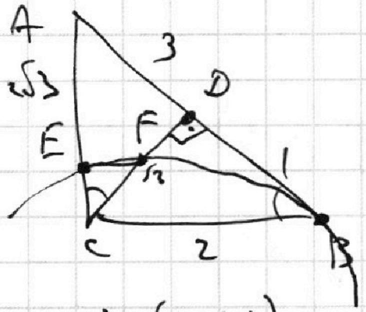
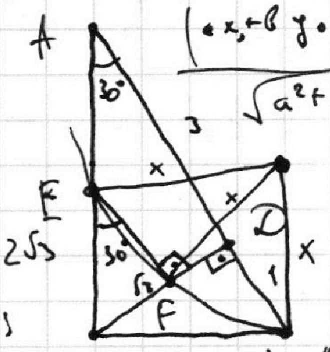
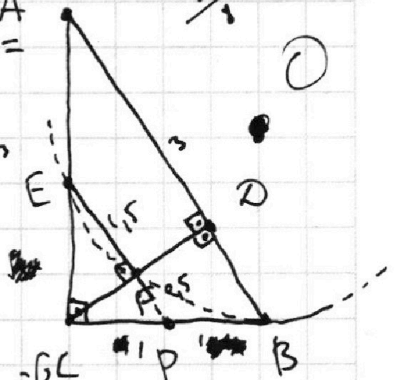
$2 + 7 \geq 9$
$2 + 12 \geq 14$
$7 + 12 \geq 19$

$2 + 7 + 12 = 21$
$9 + 19 + 14 = 28 + 14 = 42$

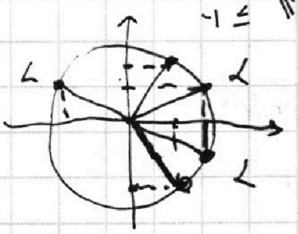
$ax + by + c = 0$

$\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$

$\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$



$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$2\pi = 6x$

$PE = 2x; \quad PF = \frac{x}{2};$

$PF \cdot PE = PB^2;$

$(2-x)^2 = \frac{x}{2} \cdot 2x$

$x^2 = x^2 - 4x + 4$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$y = x$

$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \leq x \leq 2\pi$

$\cos x = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

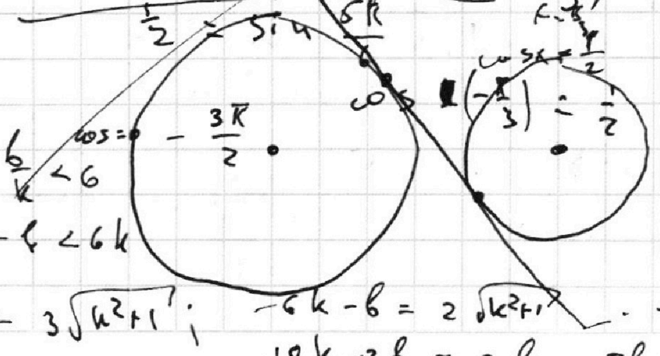
$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$x = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2}$

$k = \frac{5}{6};$



$y = kx + b$

$36k^2 = 25k^2 + 25$

$b = -3{,}6k$

$y - kx - b = 0$

$-\frac{b}{k} < 6$

$-b < 6k$

$b = 3\sqrt{k^2+1};$

$-6k - b = 2\sqrt{k^2+1}$

$-18k - 3b = 2b$

$5b = -18k;$

$\dfrac{|-6k - b|}{\sqrt{k^2+1}} = 2;$

$\dfrac{|-b|}{\sqrt{k^2+1}} = 3;$

$-3{,}6k = 3\sqrt{k^2+1}$

$\frac{6}{5}k = \sqrt{k^2+1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\qquad \log_2 24 = \log_2 4 \cdot 2$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

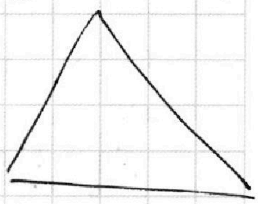
$6 - 2,5 = 3,5$

$\boxed{t = \log_3 x; \quad t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0;}$ $\boxed{t}$

$\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8$

$2 - 5,5 = -3,5$

$2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \cdot \log_{5y} 3 - 8$



$\boxed{v = \log_3 5y; \quad v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0}$ $\boxed{-t}$

$\log_3 x = -\log_3 5y; \qquad \log_3 5xy = 0$

$x^5 + 8x + 3,5 = 0$ $\qquad xy = \frac{1}{5}$ $\quad 0,2 \quad \log_3 1$

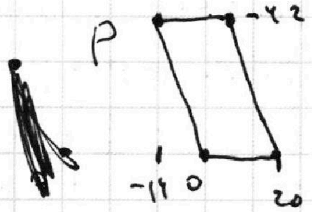
[redacted]

$2x^5 + 16x + 7 = 0$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

[redacted]

$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5;$



$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$ $\qquad 60 - x = 33$

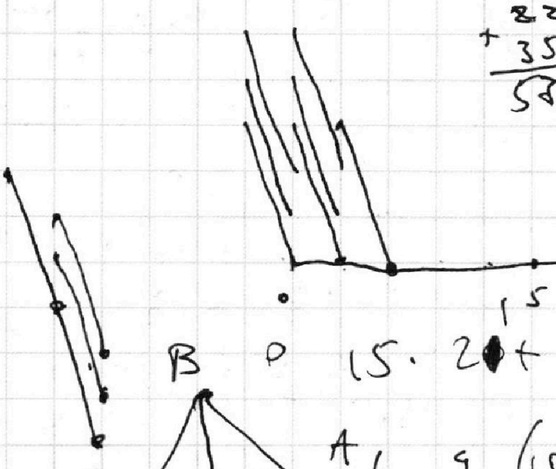
$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33;$ $\qquad x = 60 - 33$

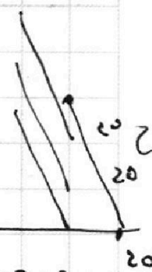
27

$2250 + 3528 = 5778$

$14 \times 14 = 54$, $14 \cdot 14$

196×18: $1568 + 196 = 3528$





$15 \cdot 21 + 40) \cdot 14 = 560 + 315 = 875$ $\qquad 20 \cdot 3 + 1 = 61$

$3 \cdot 0,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2, \ldots 3 \cdot 9$ $\qquad 60$

$A_1 \quad 9\,(10 \cdot 125 + 2 \cdot 14^2)$

$642 \times 9 = 5778$ $\qquad 392 + 250 = 642$ $\qquad 18 \times 14$, $196 \times 2 = 392$ $\qquad \frac{21 \cdot 15}{2} + 20 \cdot 2 \cdot 14$