



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- $a, b, c \in \mathbb{N}$ ;  $ab: 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$   $bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ ;  $ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$ ;  
 $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$ ;  $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$ ;  $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$ ;
- $a_1 + b_1 \geq 3$ ;  $b_1 + c_1 \geq 14$ ;  $a_1 + c_1 \geq 19$ ;  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$ ;  $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$ ;  
рав-во при  $a_1 = 7$ ;  $b_1 = 2$ ;  $c_1 = 12$ ;
- $a_2 + b_2 \geq 10$ ;  $b_2 + c_2 \geq 13$ ;  $a_2 + c_2 \geq 18$ ;  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$ ;  $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$ ;  
рав-во при  $a_2 = 7$ ;  $b_2 = 3$ ;  $c_2 = 11$ ;
- $a_3 + b_3 \geq 10$ ;  $b_3 + c_3 \geq 13$ ;  $c_3 + a_3 \geq 30$ ;  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$ ;  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 27$ ;  
рав-во не достигается так как  $a_3 + c_3 \geq 30$ ;  
тогда  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$ ; рав-во при  $a_3 = 15$ ;  
 $b_3 = 0$ ;  $c_3 = 15$ ;
- Тогда  $abc = 2^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 3^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 5^{a_3 + b_3 + c_3}$ ;  
 $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ ; рав-во при  $a = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{15}$ ;  
 $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$ ;
- Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ ;

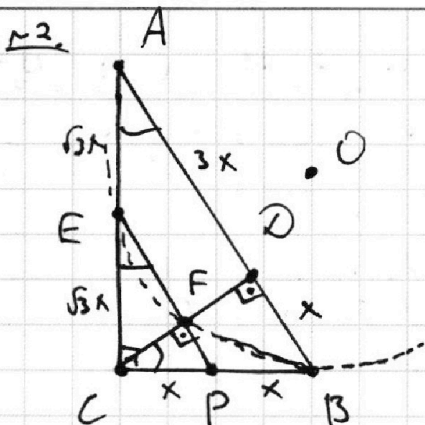
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- $AB \parallel EF; AD:DB = 3:1;$
- Пусть  $DB = x; AD = 3x;$
- $CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x;$
- $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x;$
- $AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x;$
- Тогда  $\angle CAB = 30^\circ; EF \perp BC = P;$
- $\angle CAB = \angle CEP = \angle BCD;$

•  $PB$  - касательная, тогда т.к.  $AB \parallel EF$

$$CP = y; PB = 2x - y; FP = \frac{y}{2}; PE = 2y;$$

• Тогда  $PB^2 = PF \cdot PE; (2x - y)^2 = \frac{y}{2} \cdot 2y;$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = y^2; 4x^2 = 4xy; y = x;$$

•  $EC = \sqrt{3}x; CP = x; PB = x; CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x; EF = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x;$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2.$$

$$S_{ABC} = 2\sqrt{3}x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2;$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{5\sqrt{3}} = \frac{16}{3};$$

Ответ:  $\frac{16}{3};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi;$$

• если  $\pi < x \leq 2\pi$ , то  $\arcsin(\cos x) = x - \frac{5\pi}{2}$ ;

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = 8\pi; \quad x = 2\pi;$$

• если  $0 < x \leq \pi$ , то  $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ ;

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3};$$

• если  $-\pi < x \leq 0$ , то  $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ ;

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -2\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2};$$

• если  $-2\pi < x \leq -\pi$ , то  $\arcsin(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} - x$ ;

$$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad -8\pi = 6x; \quad x = -\frac{4}{3}\pi;$$

• если  $-3\pi \leq x \leq -2\pi$ , то  $\arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2}$ ;

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -12\pi; \quad x = -3\pi;$$

Ответ:  $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

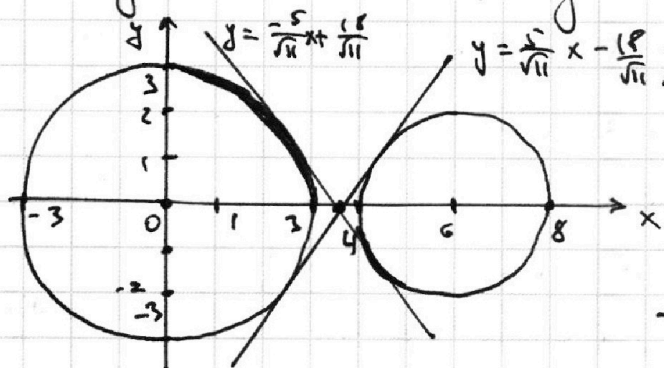


реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

т.е. при каком-то  $b$ ;

- $x^2 + y^2 = 3^2$ ; - оуп. с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 3
- $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$ ;  $(x-6)^2 + y^2 = 4$ ; - оуп. с центром в  $(6; 0)$  и радиусом 2;
- $2y = -ax + 3b$ ;  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ ;



$$y + kx + l = 0;$$

у-ые касат.  
к оупам оуп.

условие касания:

$$\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}} = 3; \frac{|6k+l|}{\sqrt{k^2+1}} = 2;$$

- в оупе оупае  $l > 0$ ;  $6k+l > 0$ ;  
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$ ;  $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$ ;  $18k+3l = 2l$ ;  $-l = 18k$ ;  
 $-6k = \sqrt{k^2+1}$ ;  $36k^2 = k^2+1$ ;  $35k^2 = 1$ ;  $k = \frac{1}{\sqrt{35}}$ ;  
 но это внеш. касат.

- $6k+l < 0$ ;  $k < 0$   
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$ ;  $-6k-l = 2\sqrt{k^2+1}$ ;  $-18k-3l = 2l$ ;  $5l = -18k$ ;  
 $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$ ;  $\frac{36k^2}{25} = \sqrt{k^2+1}^2$ ;  $36k^2 = 25k^2 + 25$ ;  
 $11k^2 = 25$ ;  $k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$ ;  $l = -\frac{18}{5} \cdot \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$ ;

- $l < 0$ ;  $6k+l > 0$ ;  $k > 0$ ;  
 $-l = 3\sqrt{k^2+1}$ ;  $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$ ;  $18k+3l = -2l$ ;  
 $18k = -5l$ ;  $l = -\frac{18}{5}k$ ;  $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$ ;  
 $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$ ;  $l = -\frac{18}{\sqrt{11}}$ ;  
 две касательные (внутренние);

$$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}; \quad y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}};$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } -\frac{a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}}; a = \frac{10}{\sqrt{11}}; \text{ или } a = \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

$$-\frac{a}{2} \leq \frac{-5}{\sqrt{11}}; a \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; -\frac{a}{2} \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; a \leq \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

при касании точки пересечения прямой с окружностью будет две, поэтому при  $a = \frac{10}{\sqrt{11}}$  или  $a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$  наша система имеет максимум 2 решения при касании в.

при  $a < \frac{-10}{\sqrt{11}}$  или  $a > \frac{10}{\sqrt{11}}$  найдётся такое  $b$ , что решений будет 4, то есть прямая будет пересекать максимум одну окружность, значит  $\leq 2$  решений;

при  $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$  всегда найдётся такое  $b$ , что прямая будет иметь 4 пересечения с окружностями, достаточно провести её через точку пересечения двух взаимных касательных; через точку

$$(3, 6; 0), 0 = -1,8a + \frac{3}{2}b; 1,5b = 1,8a;$$

$$b = \frac{18}{15}a; b = \frac{6}{5}a; b = 1,2a;$$

при таком  $b$  будет 4 решения сис-мы;

$$\text{Ответ: } \left( -\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right);$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6 \log_{\sqrt{x}} 3 = \log_{x^2} 243 - 8; \quad x \neq 1; y \neq 1; \quad x > 0; y > 0; \frac{1}{y} > 0; \frac{1}{x} > 0;$   
 $\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2,5}{\log_3 x} + 8 = 0; \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0;$

$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3'') - 8;$

$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} - \frac{5,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0; \quad \log_3^4 (5y) - \frac{3,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0;$

Заметим, если  $u = \log_3 x; v = \log_3 (5y),$

то  $u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0;$  если  $u$  - решение  
первого ур-ния,  
 $v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0;$  то  $-u$  - решение

$u$  наберет  $v$ -реш. 2-го ур-ния;  
т.к.  $u \neq 0,$  то  $u^5 + 8u + 3,5 = 0$   
 $u \neq 0,$  то  $v^5 + 8v - 3,5 = 0$

заметим, что эти функции строго  
возрастающие  $\Rightarrow$  имеют равно,  
корень, т.к. если подставить допустим  
 $1000$  и  $-1000,$  то будут разные знаки  
у непрерывных значений; 0 - не  
корень функции непрерывной (без  
выколотой точки), тогда равно (решение)

$\log_3 x = -\log_3 (5y); \log_3 (5xy) = \log_3 1;$   
 $5xy = 1; xy = \frac{1}{5}; xy = 0,2;$

Ответ: 0,2;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.  $O(0; 0); P(-14; 42); Q(6; 42); R(20; 0);$   
 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33; (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33;$
- заменим, что на прямой вида  $y = -3x + b$ , где  $b \in \mathbb{Z}$  значение функции  $f(x, y) = 3x + y$ , постоянно;  
 $y + 3a = -3(x - a) + b; 3(x - a) + y + 3a = 3x + y;$
  - Тогда  $f(x_2; y_2) - f(x_1; y_1) = 33;$   
всего таких прямых в нашем параллелограмме 61, достигаются все значения от 0 до 60;
  - Тогда  $A$  может быть с прямой, где  $f(x; y) = 0$ , проинтерпретируем прямые от 0 до 60;  
 $A < 0; B < 33;$   
 $A < 1; B < 34; \dots$   
 $A < 27; B < 60;$
- на прямой, той номер; 3 всего 15 подводящих точек с целыми координатами, на остальных лишь 14;
- Тогда всего способов выбрать  $A$  и  $B$   
 $10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2 = 5778;$   
(т.к. можно взять любую точку на первой прямой и любую на второй)
- Ответ: 5778;





- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.  $AS = BC = 12; S + BC = 90;$

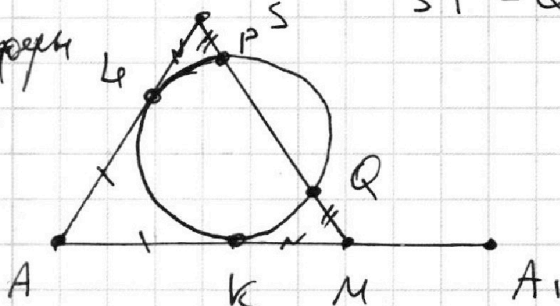
а) рассмотрим сегменты  $SA A_1$ ;  $SP = QM$ ;

$\omega$  - окружность - сегменты среза

$\omega$  касается  $AS$  в  $L$ ;

$\omega$  касается  $AM$  в  $K$ ;

тогда  $AK = AL$   
(как отрезки касательных)



$MK$  - касательная  $\Rightarrow MK^2 = MQ \cdot MP$ ;  
 $SL$  - касательная  $\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ$ ;

$\Rightarrow MK = SL \Rightarrow AM = SA = 12$ ; тогда  $AA_1 = 18$ ;

$BC = 12$ ;  $AK = h_a = \frac{S_{ABC} \cdot 2}{BC} = \frac{180}{12} = 15$ ;  $AK$  - высота  $\triangle ABC$ ;

$\sqrt{AA_1^2 - AK^2} = A_1K = 3\sqrt{36 - 25} = 3\sqrt{11}$ ;

и наружная длина  $BH = 6 + 3\sqrt{11}$ ;  $CH = 6 - 3\sqrt{11}$ ;

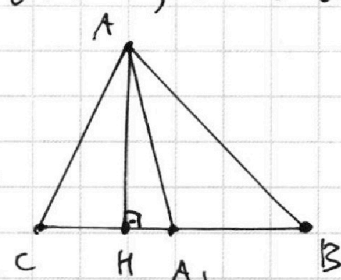
$AB^2 = 15^2 + (6 + 3\sqrt{11})^2$ ;  $m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$ ;

$AC^2 = 15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2$ ;

$m_c = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 - 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 - 36\sqrt{11}}}{2}$ ;

$= \frac{\sqrt{1008 - 108\sqrt{11} - 15^2 - 135}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$ ;

$m_b = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 + 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 + 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 + 108\sqrt{11}}}{2}$ ;



$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11} = \sqrt{162^2 - 27^2 \cdot 11} =$

$= \sqrt{2^2 \cdot 81^2 - 27^2 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 3^8 - 3^6 \cdot 11} = 3^3 \sqrt{36 - 11} =$

$= 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$ ;

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 135 \cdot 18 = 2430$ ;

б)  $\Omega$  касается  $BCS$  в точке  $N$ ;  $SN = 4$ ;

$R = 5$ ;  $SN = r$ ;  $O$  - центр  $\Omega$ ;  $ON = 5$ ,  $SO = \sqrt{41}$ ;

• так как  $AS = AM$ , то точки  $S$  и  $M$  рав-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

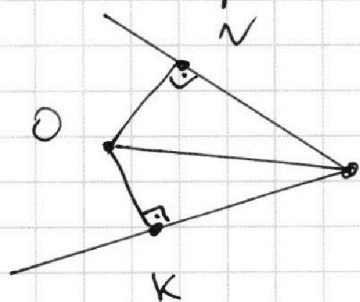
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

конушены, относительно  $O \rightarrow$   
 $\Rightarrow OK = 5; OM = OS = \sqrt{41}; KM = 4;$

$$AK = 12 - 4 = 8;$$

Тогда  $KH' = 15 \cdot \frac{10}{18} = \frac{15 \cdot 5}{3} = \frac{25}{3};$   
 $KH'$  - ~~перпендикул.~~ на  $BC$ ;

• рассмотрим ~~сечение~~  $\triangle NKH'$ :



$$ON = OK = 5;$$

$$KH' = \frac{25}{3} = H'N \text{ (как осн. катет.)}$$

~~$OK' = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34};$~~   
 $\sin \angle OH'N = \frac{8}{\frac{5}{3} \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$

$$\cos \angle KH'N = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = \frac{34 - 18}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\angle KH'N = \arccos \frac{8}{17};$$

Ответ: а)  $2430$ ; б)  $\arccos \frac{8}{17}$



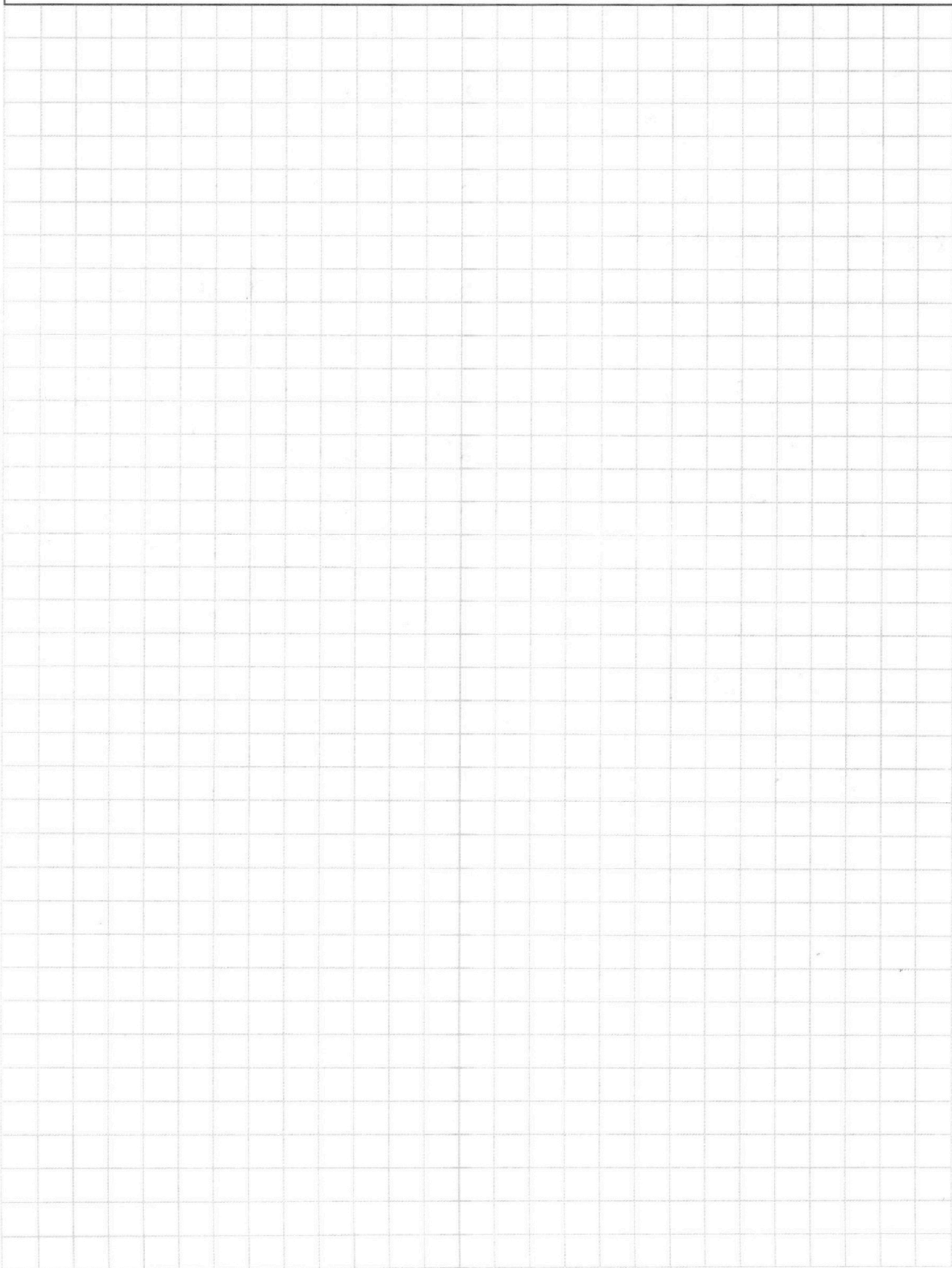
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



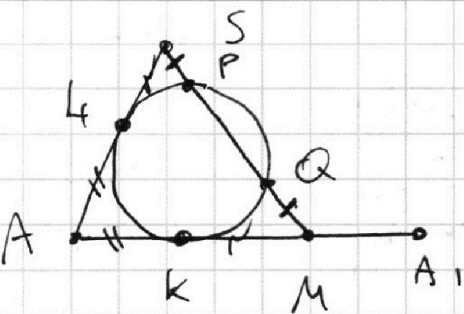
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

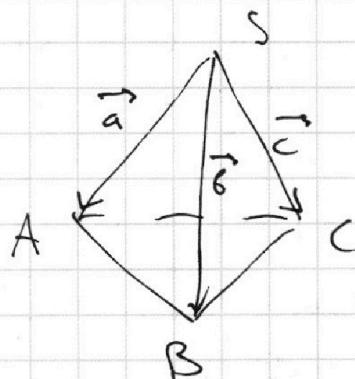
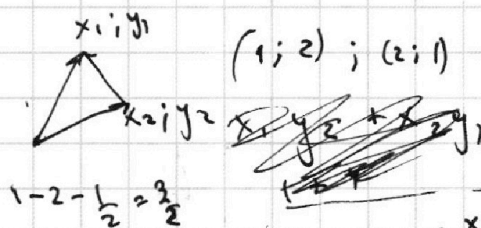
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

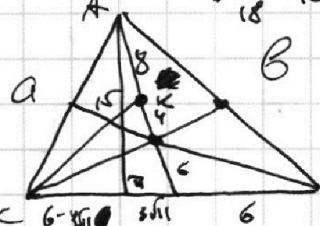
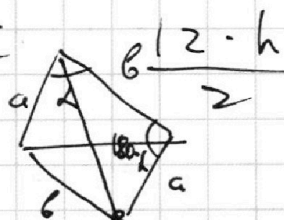


$$S_{ABC} = 90; \quad SA = BC = 12$$



$$|\vec{a}| = 12; \quad \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$|\vec{c} - \vec{b}| = 12$$



$$h = 15; \quad m^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$\frac{10}{18} \cdot 15 = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

$$AS = AM = 12$$

$$AA_c = 18$$

$$SK^2 = SP \cdot SQ;$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP;$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2$$

$$+ a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = m^2$$

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{2} = \frac{c^2 + m^2}{2}$$

$$m = 36; \quad c = 12;$$

$$2(a^2 + b^2) = 12^2(1 + 3^2)$$

$$a^2 = 15^2 + 36 - 36\sqrt{11} + 99 = 360 - 36\sqrt{11}$$

$$b^2 = 15^2 + 36 + 36\sqrt{11} + 99 = 360 + 36\sqrt{11}$$

$$m_c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 2 \cdot 12^2 - 360 - 36\sqrt{11}}$$

$$= \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$$

$$m_c = \sqrt{648 + 108\sqrt{11}}$$

$$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11}$$

$$(2m)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

$$9 \cdot 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 16 - 11}$$

Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram of a triangle with sides 15, 18, and 12.
- Diagram of a triangle with sides 6, 8, and 10.
- Diagram of a triangle with sides 10, 15, and 18.
- Diagram of a triangle with sides 12, 15, and 18.
- Diagram of a triangle with sides 12, 15, and 18.
- Diagram of a triangle with sides 12, 15, and 18.

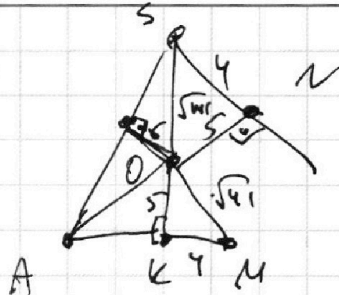
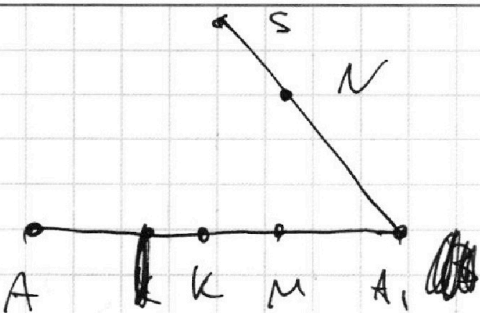
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

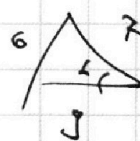
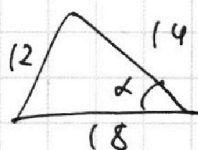
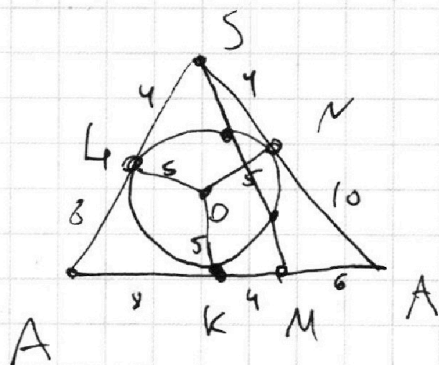
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16 + 25 = 41$$

$$MO = SO = \sqrt{41};$$

$$KM = 4$$



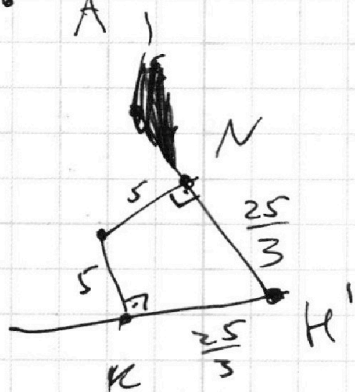
$$50 + 80$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ - 80 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$36 = 19 + 81 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{57}{63}; \quad 94$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{21}; \quad 57$$



$$5 \frac{25}{3} \rightarrow 1 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \rightarrow 3 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \sqrt{34}$$

$$\left( \frac{50}{\sqrt{34}} \right)^2 =$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}} x - \frac{18}{\sqrt{11}} = y \quad \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = h = \frac{125}{3 \cdot \sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11} = 9 \quad \sqrt{\frac{34}{9}} =$$

$$11x^2 + 25x^2 - 180x + 18^2 = 99$$

$$36x^2 - 180x + 18^2 = (6x - 15)^2 = 0 \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 18^2 - 321 \\ - 99 \\ \hline 1225 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$   $a, b : 2^9 3^{10} 5^{10}$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$a_1 + b_1 \geq 9$

$a_2 + b_2 \geq 10$

$a_3 + b_3 \geq 10$

$b_1 + c_1 \geq 14$

$b_2 + c_2 \geq 13$

$b_3 + c_3 \geq 13$

$a_1 + c_1 \geq 19$

$a_2 + c_2 \geq 18$

$a_3 + c_3 \geq 30$

$a + b + c = 41$

$2 + 7 \geq 9$

$2 + 12 \geq 14$

$2 + 12 \geq 19$

$2 + 7 + 12 = 21$

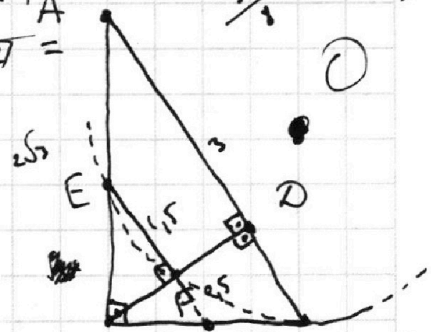
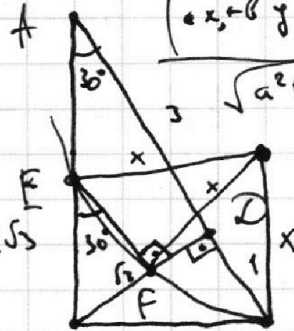
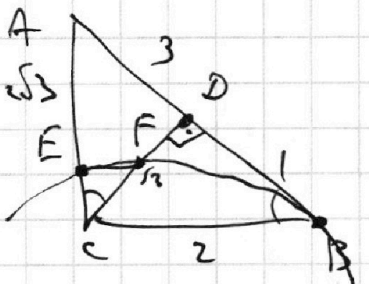
$7 + 19 + 14 = 28 + 14 = 42$

21

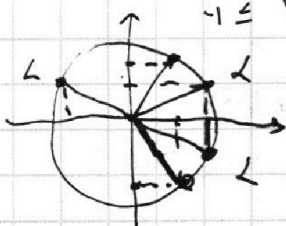
$ax + by + c = 0$

$(ax + by + c) \cdot A = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot A$

$\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}$   
 $\frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$



$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2}$   
 $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$   
 $2\pi = 6x$   
 $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{6}$   
 $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$   
 $y = x$   
 $\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} = x$   
 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$   
 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$   
 $1 = \cos x$   
 $x = 0$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

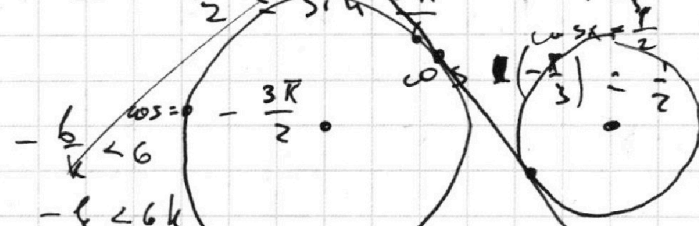
$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \leq x \leq 2\pi$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{1}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



$6 = 3\sqrt{k^2 + 1}$   
 $-6k - b = 2\sqrt{k^2 + 1}$   
 $-18k - 3b = 2b$   
 $5b = -18k$   
 $b = -\frac{18k}{5}$   
 $\frac{-6k - b}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$   
 $-3.6k = 3\sqrt{k^2 + 1}$   
 $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2 + 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_3 x^2 \cdot 243 - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x^3 - 8$$

$$\log_3 27 = \log_3 4 \cdot 2$$

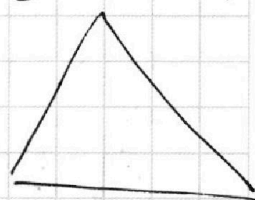
$$t = \log_3 x; \quad t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0; \quad \boxed{t}$$

$$\log_2^4 (xy) + 2 \log_2 xy^3 = \log_2 25y^2 \cdot 3^{11} - 8$$

$$2 - 5,5 = -3,5$$

$$2 \log_2 y^3 = \frac{11}{2} \cdot \log_2 y^3 - 8$$

$$v = \log_2 y; \quad v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \quad \boxed{-t}$$



$$\log_3 x = -\log_3 5xy; \quad \log_3 5xy = 0$$

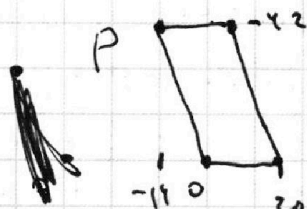
$$x^5 + 8x + 3,5 = 0$$

$$xy = \frac{2,2}{3} \log_3 1$$

~~$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$~~

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

~~$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$~~



$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5;$$

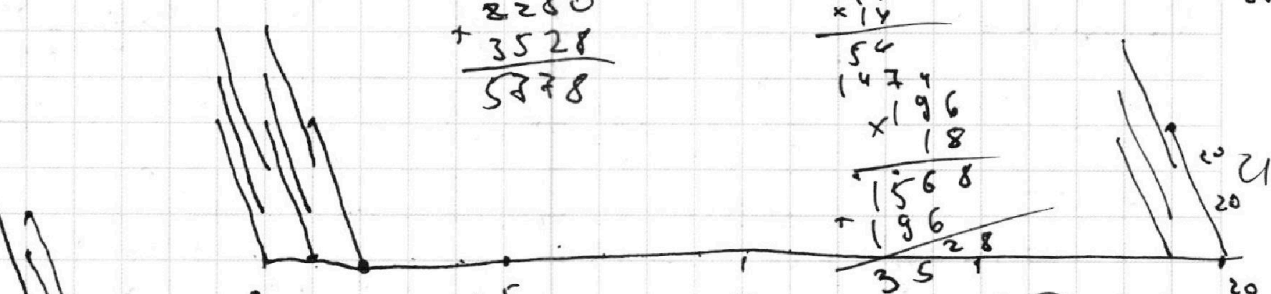
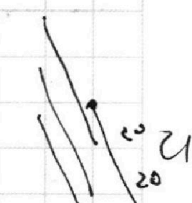
$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33$$

$$60 - x = 33 \quad x = 60 - 33 = 27$$

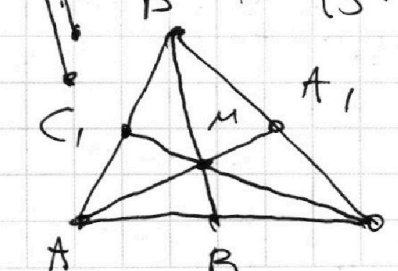
$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 3528 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 50 \\ 1474 \\ \times 196 \\ 18 \\ \hline 1568 \\ + 196 \\ \hline 35 \end{array}$$



$$15 \cdot 20 + 40 = 14 = 560 + 315 = 875$$

$$3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 9$$



$$9(10 \cdot 25 + 2 \cdot 14^2)$$

$$\begin{array}{r} \times 642 \\ 3 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 392 \\ + 280 \\ \hline 642 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 14 \\ \hline 196 \quad 21 \cdot 15 \\ \quad 2 \\ \hline 352 \quad 20 \cdot 2 = 4 \end{array}$$