МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

1.

По условию: $ab \,\vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot k$

$bc \,\vdots\, 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot m$

$ac \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18} \Rightarrow ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18} \cdot n$; $m, n, k \in \mathbb{N}$

Рассмотрим величину $ab \cdot bc \cdot ac$:

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k$$

$$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k$$, обе части натуральные $\Rightarrow$ можем извлечь корень

$$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k}$$

$a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ произведение справа тоже натуральное

$\Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 \cdot m \cdot n \cdot k$ – это полный квадрат,

~~$3 \cdot m \cdot n \cdot k$~~ причем квадрат числа, кратного 3-м (т.к. 3 уже точно есть). Ближайший такой квадрат – это 9 $\Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \geq 3$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}.$$

Осталось привести пример на $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$

Пусть $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7$; $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7$; $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11}$

Тогда $abc = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$, а $ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} \,\vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$,

$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \,\vdots\, 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$; $ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18} \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}$ $\Rightarrow$ Эта тройка удовлетворяет условию

<u>Ответ</u>: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$

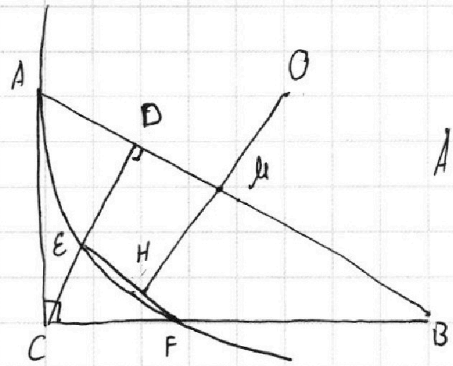
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.



Отметим точку O – центр данной окружности. А также точки M и H – середины AB и EF соответственно.

1) Отрезок из центра окружности к середине этой дуги будет ей перпендикулярен, т.к. будет являться медианой и высотой в ~~треуго~~ р/б треугольнике с вершинами в концах дуги и центре, в кот. 2 отрезка будут равны как радиусы.

2) $\Rightarrow OM \perp AB$; $OH \perp EF$, но $AB \parallel EF \Rightarrow OM \perp EF$, но из точки O можно опустить только один ~~п~~ перпендикуляр на $EF \Rightarrow$
$\Rightarrow O, M$ и H лежат на одной прямой.

3) Теперь пусть $AB = 13x$, тогда:

$$BD = \frac{\cancel{13x}\ AB}{1{,}3} = \frac{13x}{1{,}3} = 10x \Rightarrow AD = AB - BD = 13x - 10x = 3x$$

$$AM = MB = \frac{1}{2}AB = 6{,}5x \quad (M\text{ – середина } AB)$$

$$\Rightarrow \cancel{DM = AM}\ DM = AM - AD = 6{,}5x - 3x = 3{,}5x$$

4) Рассмотрим четырёхугольник EDMH, в нём: $\angle EDM = 90°$, $\angle DMH = 90°$ (по условию)
и $\angle EHM = 90°$ (из п. 2) $\Rightarrow$ EDMH – прямоугольник $\Rightarrow DM = EH = 3{,}5x$.

5) H – середина $EF \Rightarrow EF = 2EH = 7x$.

6) Высота на гипотенузу отсекает ~~отсека~~ ~~отсе~~ рассекает прямоугольный треугольника,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подобных между собой (а также исходному) =>

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBD,\ k = \frac{CD}{BD}$.

А сама высота равна корню из произведения проекций катетов

$\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{BD}$

8) Площади подобных относятся как квадрат коэфф. пропорциональности

$\Rightarrow S_{ACD} : S_{CBD} = k^2 = \frac{AD \cdot BD}{BD^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{3x}{10x} = \frac{3}{10}$

9) Осталось заметить, что т.к. $\angle EFC = \angle DBC$ как соответственные при $AB \parallel EF$ и секущей BC, то $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по 2-м углам (у них общий угол DCB) $\Rightarrow k = \frac{EF}{DB} = \frac{7x}{10x} = \frac{7}{10}$

10) А их площади относятся как $k^2 = \frac{7^2}{10^2} = \frac{49}{100} = S_{CEF} : S_{CDB} \Rightarrow \frac{S_{CDB}}{S_{CEF}} = \frac{100}{49}$

11) из п. 8 и 10 $\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} \cdot \frac{S_{CBD}}{S_{CEF}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{49} = \frac{30}{49}$

Ответ: $\frac{30}{49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$, воспользуемся формулой приведения:

$5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$, теперь из определения арккосинуса $\Rightarrow$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Подставим $x = \frac{\pi}{6}$ в исходное уравнение, чтобы убедиться, что решение подходит:

$5\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

А $\frac{3\pi}{2} + x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$\Rightarrow 5\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ подходит и это единственный корень, так как мы пользовались равносильными преобразованиями.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

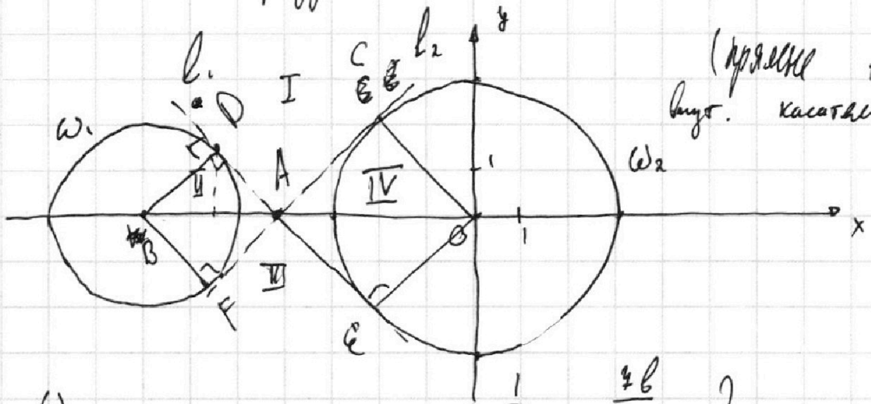
4.

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$, оба множителя существуют на $\mathbb{R}$

*) Эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \end{cases} = \begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ \left[\begin{array}{ll} (x+7)^2+y^2=4 & (2) \\ x^2+y^2=9 & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности на Oxy с ц. $(-7;0)$ и $(0;0)$ и радиусами 2 и 3 соот.:



(прямые l_1 и l_2 — общие внут. касательные к окружностям ω_1 и ω_2)

А урав (1) задаёт прямую $y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$. Заметим, что b отвечает только за сдвиг по Oy. => Пусть уравнения (1) задавало прямую l. ~~Сдвинем~~ Изменим b так, чтобы l проходила через т. пересечения l_1 и l_2. Если l совпадает с l_1 или l_2, то решений максимум 2 ~~(сдвиг~~ (если $l=l_1$, то сдвиг ↑, то l не пересек ω_1, а если сдвиг ↓ то не пересек ω_2; аналогично если $l=l_2$)

~~Если l лежит в I и III, то пересечений тоже максимум 3?~~

Заметим, что если ~~пересечений~~ решений 4 ($\Leftrightarrow$ 4 пересечения окружностей и прямой), то прямая обязана лежать в строго II и IV, и возможно в I или III, но не в I и III одновременно.

$\Rightarrow$ Чтобы она лежала в II и IV, необходимо чтобы её угол наклона ~~...~~ с полож. осью Ox был меньше чем у l_2 и больше чем у l_1. Для этого сначала найдем урав наклон l_1 и l_2

l_1: $Ax + By + C = 0$

Тогда т.к. l_1 кас, должны выполняться следующие равенства: для ω_1 и l_1
$$\frac{|A\cdot(-7) + B\cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2$$

ω_2 и l_1:
$$\frac{|A\cdot 0 + B\cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 3 \Rightarrow C = \pm 3\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{|-7A + 3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ \dfrac{|-7A - 3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \end{array}\right.$$

Но еще l_1 проходит через точку A, которая делит OB в отношении радиусов (в виду подобия) $\Rightarrow$ $OA = \frac{3}{5}|OB| = \frac{21}{5}$

$\Rightarrow$ $(-\frac{21}{5}; 0) \in l_1$ $\Rightarrow$ $-\frac{21}{5}A + C = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим l_1 проходит через точки A и D. Точка A делит (*)

~~OB в отношении радиусов (в силу подобия ADB и AEO)~~

$\Rightarrow \cancel{OA = \frac{3}{5} OB = \frac{21}{5}}$, $\cancel{AB = \frac{2}{5} OB = \frac{14}{5}}$

$\cancel{AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25}}$.

$\cancel{AD^2 = (x_d - x_a)^2 + (y_d - y_a)^2}$

(*) так OB в отношении радиусов (в силу подобия ADB и AEO)

$\Rightarrow AB = \frac{2}{5} \cdot BO = \frac{14}{5}$

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{96}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow tg\, DAB = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow tg\angle DAO = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$ = угол наклона l_1

А угол наклона $l_2 = tg\angle BAF = tg\angle DAB = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

Угол наклона прямой $l = -\frac{1}{3a}$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2\sqrt{6}} < -\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{3a} < -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} < -\frac{15}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2\sqrt{6}}{15} \; \cancel{\frac{15}{2\sqrt{6}}} < a < \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

Ответ: $(\cancel{-\frac{15}{2\sqrt{6}}};\ -\frac{2\sqrt{6}}{15};\ \frac{2\sqrt{6}}{15})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

Воспользовавшись свойствами логарифмов, преобразуем оба равенства:

1) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$ 2) $\log_7^4 y + 6\log_7 y = \log_{y^2}7^5 - 4$

$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4$ ... аналогично

$\frac{2\log_7^4 y + 8\log_7 y + 7}{2\log_7 y} = 0$

$\log_7^4 6x - \frac{7}{2\log_7 6x} + 4 = 0$

Аналогично для п 1), только единственный корень будет при $\log_7 y < 0$

$\frac{2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7}{2\log_7 6x} = 0$

Сделаем замену $t = \log_7(6x)$:

$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$, обозначим левое выражение за $f(t)$

$f'(t) = \frac{(2t^5+8t-7)'2t - (2t)'(2t^5+8t-7)}{4t^2} = \frac{10t^5+16t-4t^5-16t+14}{4t^2} =$

$= \frac{-4t^5+10t^5+14}{4t^2} = \frac{6t^5+14}{4t^2}$ при $t>0$ $f'(t)>0$

=> $f(t)$ возрастает. А при $t<0$ очевидно решений нет

т.к. $2t^5+8t-7<0$

=> Если ~~решение~~ корень есть, ~~решение~~ то корень единственно.

2) Аналогично получаем что ~~решения~~ если y корень, то он единственный

Заметим что если ~~$\log_7 6$~~ $t = \log_7(6x)$ - корень, то

$-\log_7 y = -t$ - корень второго => $\log_7(6x) = -\log_7 y$

$\log_7 6xy = 0$ => $6xy = 1$ $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

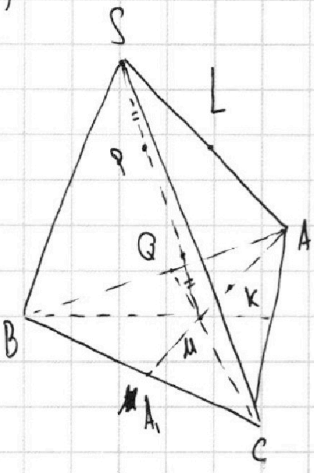
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7 а)



1) Расм. сечение шара плоскостью (SAM)

Это будет окружность, проходящая через точки L, P, Q и K (из условия), назовем эту окружность ω.

2) Тогда степень точки S относительно ω:

$$\deg_\omega S = SL^2 = SP \cdot SQ \left(= SP \cdot (SP + PQ)\right)$$

а степень точки M: $\deg_\omega M = MK^2 = MQ \cdot MP \left(= MQ \cdot (MQ + PQ)\right)$ =>

т.к. $MQ = SP$, $SL^2 = MQ \cdot MP = MK^2$ => $SL = MK$ (они очевидно не нулевые и не отрицательны как длины отрезков)

3) $AK = AL$ как отрезки касательных => $AM = AK + MK = AL + LS = AS = 10$

4) Если $AM = 10$, а M – ~~точка~~ центроид $\triangle ABC$ => $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15$ и $A_1M = \frac{1}{3} AM = 5$

5) => В $\triangle BMC$: $BA_1 = A_1C = A_1M = 5$ => $\triangle BMC$ – прямоугольный => $S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$

6) Медианы разбивают треугольник на 6 равновеликих

=> ~~$S_{BA_1M} = S_B$~~ $S_{BMC} = S_{BA_1M} + S_{CA_1M} = \frac{1}{6} S_{ABC} + \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$

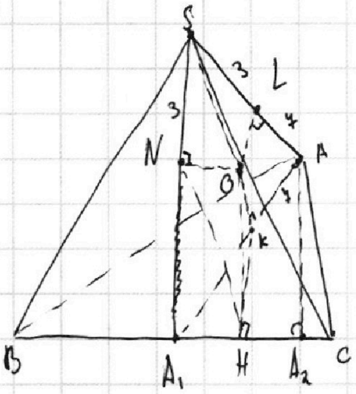
7) => $\frac{1}{2} BM \cdot MC = 20$ => $BM \cdot MC = 40$

8) Т.к. M – центроид: $BB_1 = \frac{3}{2} BM$; $CC_1 = \frac{3}{2} CM$

9) из п. 4, 7 и 8 => $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{3}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{2} = 1350$

Ответ: 1350

7 б)



Отметим точку O - центр сферы.

1) $SN = SL$ как отрезки касательных к сфере

$\Rightarrow SL = 3 \Rightarrow LA = 4$

2) Аналогично $AK = AL = 4$

3) Опустим перпендикуляры ~~и~~ на BC из K и A

и отметим точки H и A_2 ~~а также точку~~

2) $AA_2 = \frac{2 S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$

3) из подобия $\triangle A_1KH$ и $\triangle A_1AA_2 \Rightarrow \frac{KH}{AA_2} = \frac{A_1K}{A_1A}$

$\Rightarrow KH = \frac{AA_2 \cdot A_1K}{A_1A} = \frac{12 \cdot 8}{15} = \frac{4 \cdot 8}{5} = 6.4$

4) ~~$\angle OHK$ равен~~ $\frac{1}{2} \angle$ точки N, O, K и H лежат ~~на~~ в одной плоскости $\Rightarrow \angle S(BC)A = 2\angle OHK$

$tg \angle OHK = \frac{OK}{HK} = \frac{4}{\frac{4 \cdot 8}{5}} = \frac{5}{8}$

$tg\, 2\angle OHK = \frac{2\, tg \angle OHK}{1 - tg^2 \angle OHK} = \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{39}{64}} = \frac{5 \cdot 364}{4 \cdot 39} = \frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 39} = \frac{80}{78}$

$\Rightarrow$ ~~$2\angle OH$~~ $\angle S(BC)A = 2\angle OHK = arctg \frac{80}{78}$

Ответ: $arctg \frac{80}{78}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{|-7A+3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \\ -\dfrac{21}{5}A+3\sqrt{A^2+B^2}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{|-7A-3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \\ -\dfrac{21}{5}A-3\sqrt{A^2+B^2}=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. Воспользовавшись свойствами логарифмов, преобразуем оба уравнения к видом:

1) $\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4$

$\cancel{x}$ $f(\cancel{x})$ $\frac{\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7}{\log_7 6x} = 0$

$\cancel{f}$ $f'(x) = 6\log_7^5 6x + 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4 6x - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ $\qquad \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4$

$\log_7^4 6x - \frac{7}{2\log_7 6x} + 4 = 0$ $\qquad \log_7^4 y + \frac{7}{2\log_7 6xy} + 4 = 0$

$t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0$ $\qquad \log_7 6x = -\log_7 y$

$t^4 + \frac{7}{2t} + 4 = 0$ $\qquad \log_7 6x \cdot y = 0$

$\frac{2t^5 + 8t \pm 7}{2t} = 0$ $\qquad 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_7 6x} + \frac{1}{\log_7 6y}\right) = 0$

$(\log_7 y + \log_7 6x)(\log_7 y - \log_7 6x)(\log_7^2 y + \log_7^2 6x) + \frac{\log_7 6x + \log_7 y}{\log_7 6x \log_7 6y} \cdot \frac{7}{2} = 0$

$(\log_7 y + \log_7 6x)\left(\log_7^3 y + \log_7 y \log_7^2 6x - \log_7^2 y \log_7 6x - \log_7^3 6x + \frac{7}{2\log_7 6x \log_7 6y}\right) = 0$

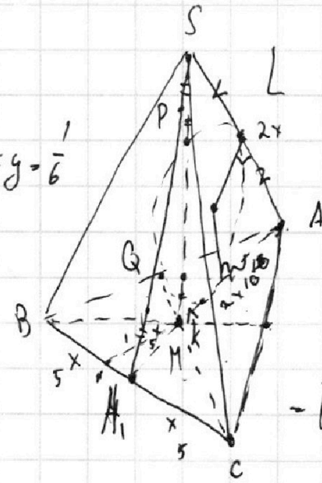
$2\alpha^4\beta + 2\alpha^2\beta^3 - 2\alpha^3\beta^2 - 2\alpha\beta^4 + 7 = 0$

10

$150 \cdot 9 = 1350$

$\left(\log_7^4 6x - \frac{7}{2\log_7 6x}\right)' = \frac{4\log^3 6x}{\ln 7 \cdot 6x} + \frac{7}{2}\left(\frac{\ln 7 \cdot 6x}{\log_7^2 6x}\right)$

$(\log_7 6x)^{-1}$



$SP \cdot SQ = SL^2$

$MQ \cdot MP = MK^2$

$BK \cdot KC = 20$

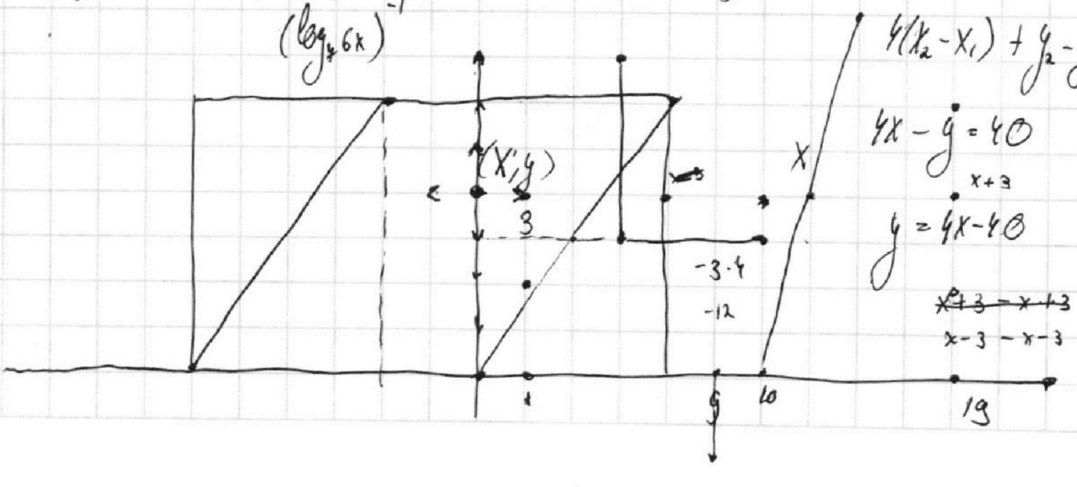
$\frac{9}{4} \cdot 20 \cdot AM =$

$\boxed{3 \cdot 5 \cdot 15}$

$68 : 4$

17

$(y_2 - y_1) : 4$



$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

$4x - y = 40$

$x + 3$

$y = 4x - 40$

~~$x + 3 = x + 3$~~

$x - 3 = x - 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

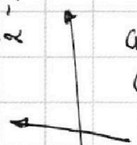
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$64|16$ 39

$a\cdot b = 2^{7}\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}\cdot n \quad bc = 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}\cdot m \quad ac = 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{18}\cdot k$

$abc = \sqrt{2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{50}\cdot n\cdot m\cdot k} = 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{25}\cdot \sqrt{3\cdot n\cdot m\cdot k}$



$a = 2^{4}\cdot 3^{7}\cdot 5^{7} \quad b = 2^{3}\cdot 3^{5}\cdot 5^{7} \quad c = 2^{10}\cdot 3^{10}\cdot 5^{11}$

$5\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} =$

$\arccos(\sin x)$

$\arccos\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x+\frac{\pi}{2}$

$ctg\,2\alpha =$

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$ctg\,2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$

$\frac{5\pi}{6}$ BD

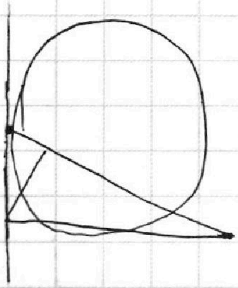
ACD ~ CDB

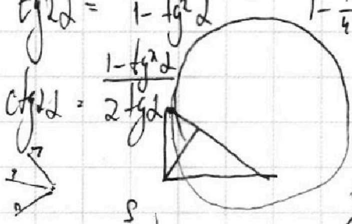
$\frac{AC}{CB} =$

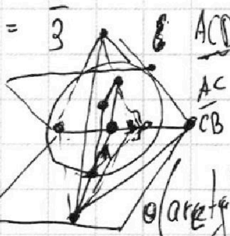
$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

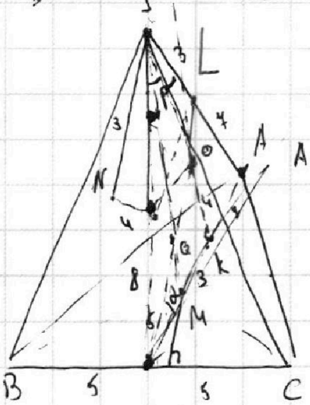
$CD = \sqrt{\ }$

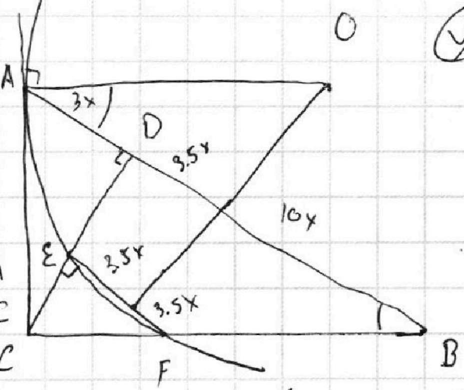
$\theta\left(arctg\frac{1}{2}\right)$











$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$\frac{16}{11}$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}+x$

$25(1-x^2) = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2$

$25(1-x^2) - \frac{9\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{4} = 0$

$26x^2 + 3\pi x - 25 + \frac{9\pi^2}{4} = 0$

$D = 9\pi^2 - 4\cdot 26\left(\frac{9\pi^2}{4} - 25\right) =$

$= 9\pi^2 - 26\cdot 9\pi^2 + 4\cdot 26\cdot 25 =$

$= -9\pi^2\cdot 25 + 4\cdot 26\cdot 25 =$

$25(-9\pi^2 + 4\cdot 26)$

$\frac{-3\pi + 5\sqrt{4\cdot 26 - 9\pi^2}}{52}$

$5\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$96|3$

32

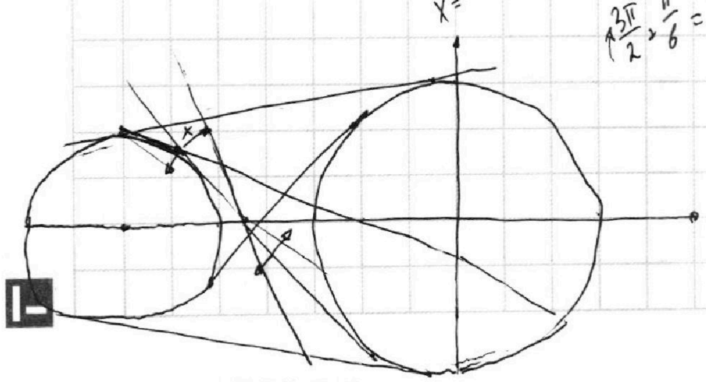
$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6}$

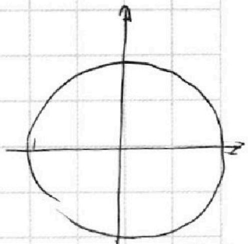
$\begin{cases} x+3ay-4b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{4b}{3a}$

$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right.$





$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$