



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$ab = k_1 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = k_2 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = k_3 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} 3^{28} 5^{34}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

Корень из  $3^{55}$  равен  $3^{55/2}$ , а это не целое  
равное число  $\Rightarrow k_1 k_2 k_3 = 3$ , тогда

$$(abc)^2 = 2^{34} 3^{56} 5^{68} \Rightarrow abc = 2^{17} 3^{28} 5^{34}$$

~~№2~~

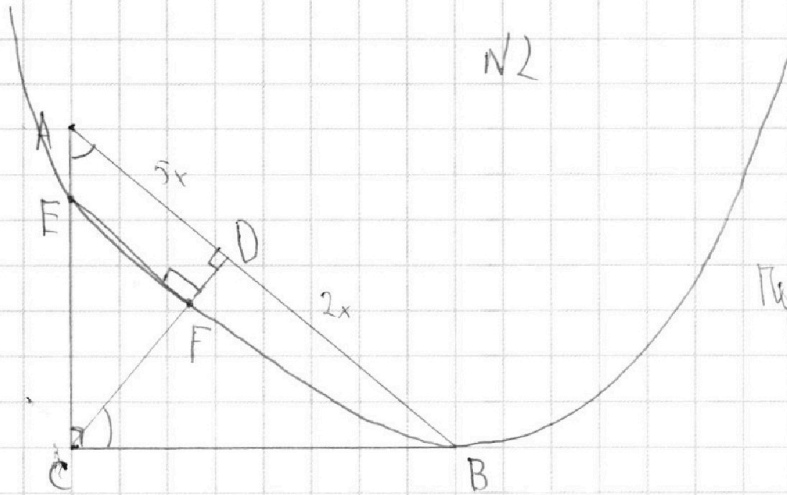
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $DB=2x$ , тогда  $AD=5x$ ;

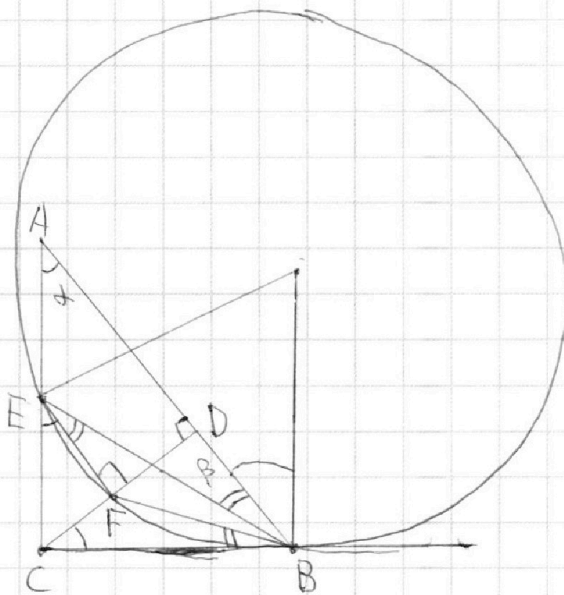
$$\angle CAB = \angle DCB$$

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CD}{AD} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$$

$$\operatorname{tg} \angle DCB = \frac{DB}{CD}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{10} \cdot 7x = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$\alpha + 2\beta + \angle FBE = 90^\circ$$



$$15a^4 - 9 = 0$$

$$\frac{14}{58} = \frac{14}{140}$$

$$\frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{16}{25} = 25 \Rightarrow \dots =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№3

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) = 4\pi + 2x$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$\text{Если } x \in [2\pi; 3\pi), \text{ то } \arccos(\cos(2\pi + x)) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$2\pi + x = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$10\pi + 5x = 2\pi + x$$

$$8\pi = -4x$$

$$x = -2\pi$$

$$\text{Если } x \in [-\pi; 0), \text{ то } \arccos(\cos(-x)) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$-x = \frac{2\pi + x}{5} \Rightarrow 2\pi + x = -5x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Если } x \in [0; \pi), \text{ то } \arccos(\cos x) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$x = \frac{2\pi + x}{5} \Rightarrow 5x = 2\pi + x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Если } x \in [\pi; 2\pi), \text{ то } \arccos(\cos(-(x-2\pi))) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$-(x-2\pi) = \frac{2\pi + x}{5} \Rightarrow -x + 2\pi = \frac{2\pi + x}{5} \Rightarrow -5x + 10\pi = 2\pi + x \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Если } x \in [2\pi; 3\pi), \text{ то } \arccos(\cos(x-2\pi)) = \frac{2\pi + x}{5}$$

$$x - 2\pi = \frac{2\pi + x}{5} \Rightarrow 5x - 10\pi = 2\pi + x \Rightarrow x = 3\pi$$

$$\text{Ответ: } -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$$

$$\text{ОДЗ: } \left| \frac{\pi - 2x}{10} \right| \leq$$

$$\text{ОДЗ: } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$\underline{-2\pi \leq x \leq 3\pi}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax - 3y + 48 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

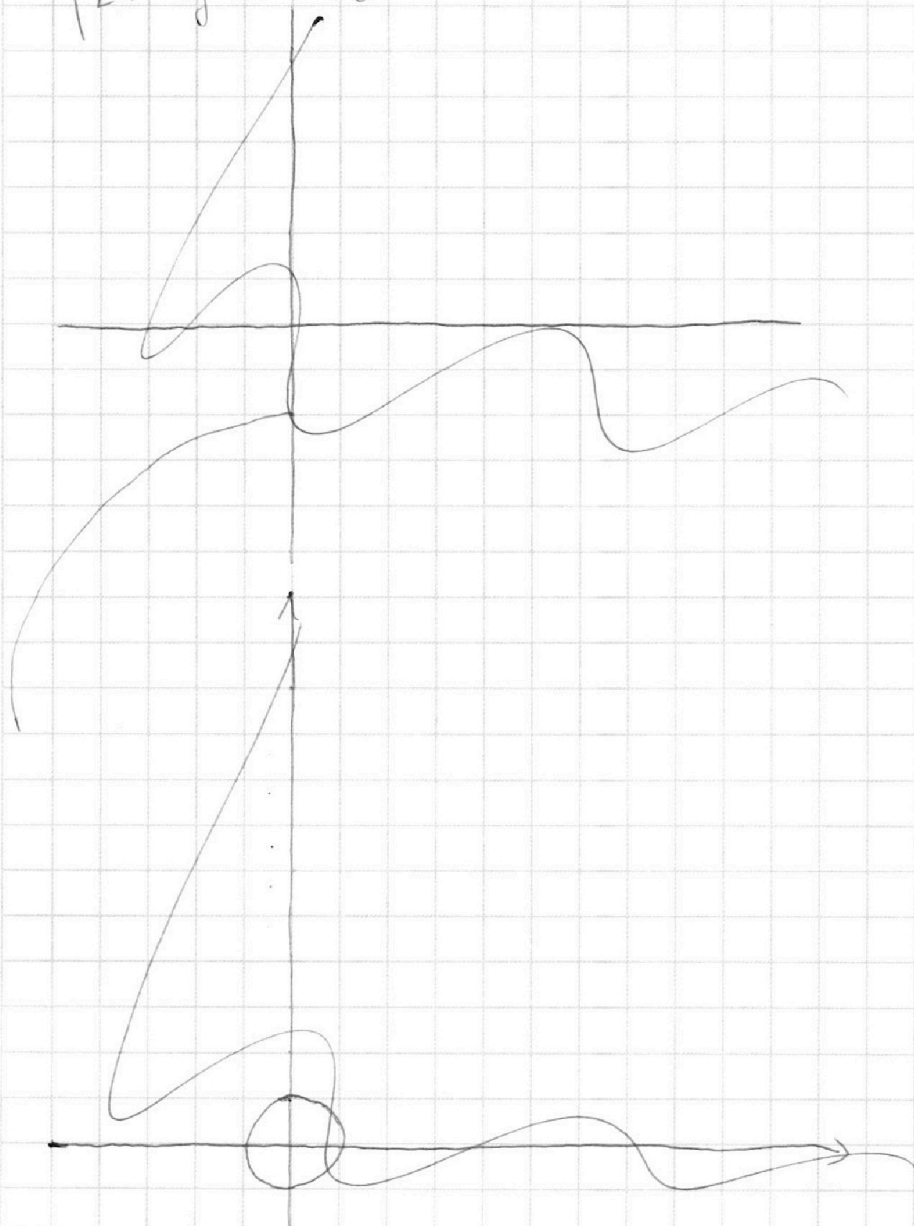
$$y = \frac{a}{3}x + \frac{48}{3}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{48}{3}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-10)^2 - 36) = 0$$

Построим график 2-го ур-на.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

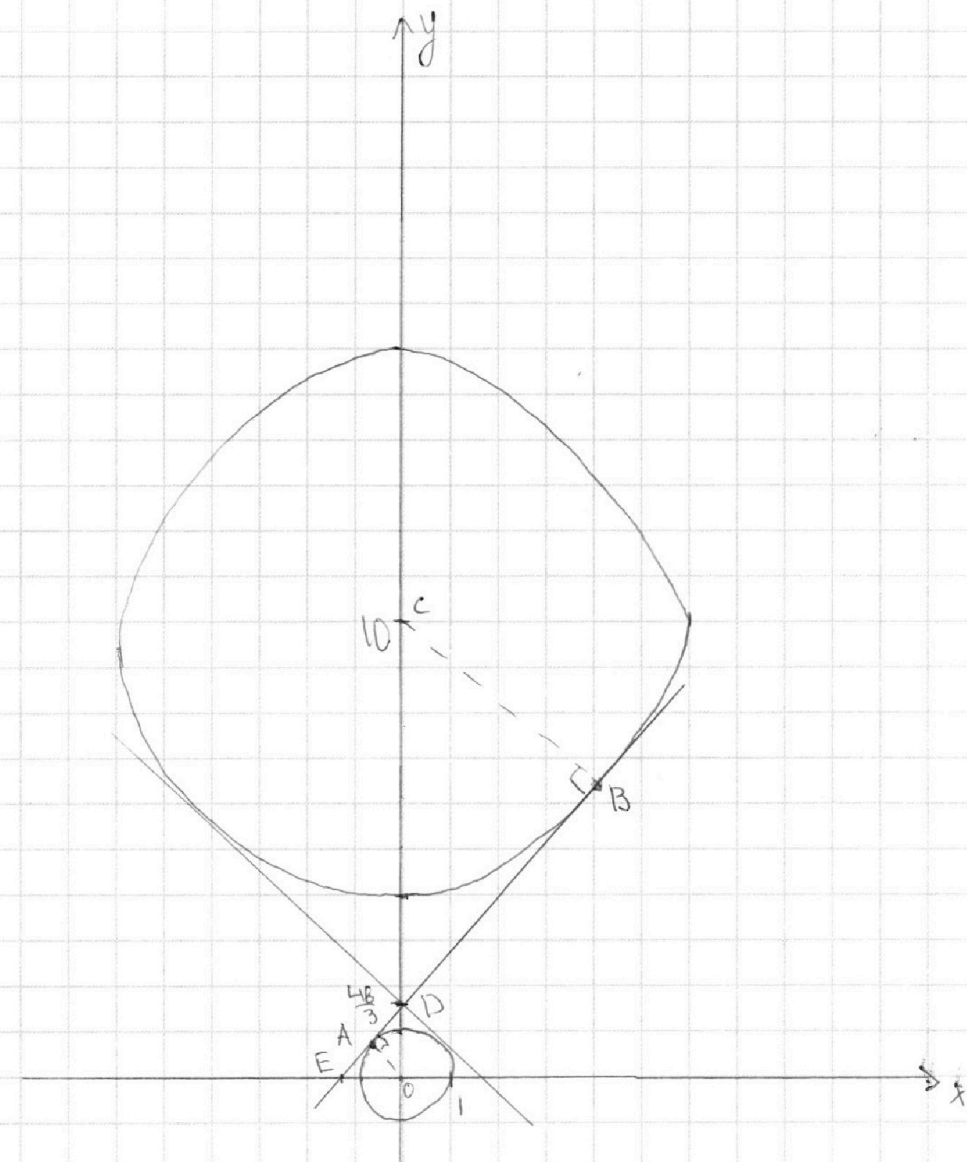


График  $l$  — ур  $l$  — прямая. Есть только 2 случая, когда не найдется

такое  $b$ , при кот. будут 4 решения — это такие 2 прямые, кот. могут либо пересекать только 1 окр., либо касаться обеих окружностей.

Там же, прямую, у кот.  $a > 0$ ;

Из подобия  $\triangle AOD$  и  $\triangle BCD$  следует:

$$\frac{1}{\frac{4b}{3}} = \frac{6}{10 - \frac{4b}{3}} \Rightarrow \frac{1}{4b} = \frac{6}{30 - 4b} \Rightarrow 30 - 4b = 24b \Rightarrow b = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$$

Т.е. эти две прямые

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем точку пересечения прямой с  $Ox$ ;  
Из подобия  $\triangle DAO$  и  $\triangle DOE$  следует:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{DA}{DO} \Rightarrow OE = \frac{AO \cdot DO}{DA} = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{14}}{\sqrt{DO^2 - AO^2}} = \frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{\frac{416}{8} - \frac{225}{49}}} = \frac{\frac{10}{7}}{\sqrt{\frac{100}{49} - 1}}$$
$$= \frac{\frac{10}{7}}{\sqrt{\frac{51}{49}}} = \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{10}{\sqrt{51}} = \frac{10}{51} \sqrt{51}$$

Тогда  $a = \frac{DO}{OE} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{15}{14}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{10}{7} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

Т.к. обе эти прямые симметричны от  $Oy$ , то  $a = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$ ;  
Это означает, что при  $a = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$  не найдется такое  $b$ , что система имеет 4 р-м.  $\Rightarrow$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

Ответ:  $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 & \text{ODЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y 0,2 - 3 & \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

~~$$\frac{1}{\log_{2x}^4 5} - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$$~~

~~$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$$~~

Пусть  $a = \log_{2x} 5$  Тогда  $\begin{cases} a^4 - 3a = \frac{4}{3}a - 3 \quad | \cdot 3 \\ b^4 + 4b = -\frac{1}{3}b - 3 \quad | \cdot 3 \end{cases}$   
 $b = \log_y 5$

~~$$\begin{cases} \frac{3}{a^4} - 9a = 4a - 9 \quad | \cdot a^4 \\ 3b^4 + 12b = -b - 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - 9a^5 = 4a^5 - 9a^4 \\ 3b^4 + 13b + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^5 - 9a^4 - 3 = 0 \\ 3b^4 + 13b + 9 = 0 \end{cases}$$~~

~~$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$$~~

~~$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3$$~~

Пусть  $a = \log_5(2x)$  Тогда  $\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad | \cdot 3a \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b \end{cases}$   
 $b = \log_5 y$

~~$$\begin{cases} 3a^5 - 9 = 4 - 9a \\ 3b^5 + 12 = -1 - 9b \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^5 + 9a + 3b^5 + 9b = 0 \\ a^5 + 3a = -b^5 - 3b \end{cases}$$~~

Ур-е  $3a^5 + 9a - 13 = 0$  имеет корень 1, т.е.  $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$  монотонна. Аналогично со 2-ым ур-ем.

Тогда  $a + b = 0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = \frac{1}{2}}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$



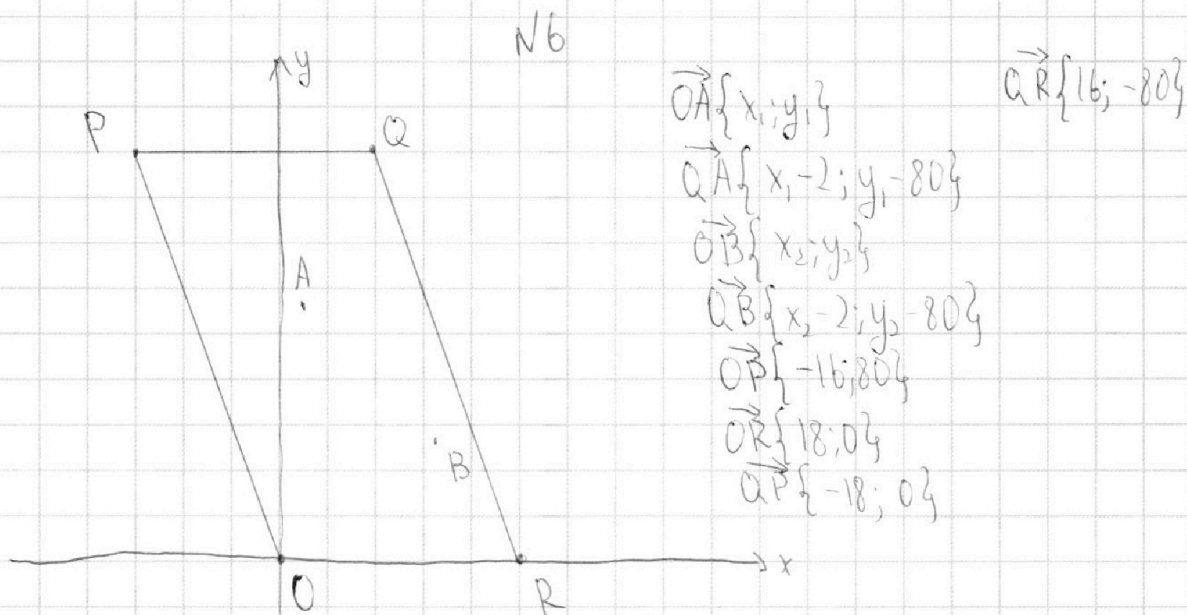
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Запишем условие того, что точки A и B не лежат внутри параллелограмма:

для т. А:

$$|\vec{OA} \times \vec{OP}| \geq 0$$

$$|\vec{OA} \times \vec{OR}| \leq 0$$

$$|\vec{QA} \times \vec{QP}| \leq 0$$

$$|\vec{QA} \times \vec{QR}| \geq 0$$

$$80x_1 + 16y_1 \geq 0$$

$$-18y_1 \leq 0$$

$$18(y_1 - 80) \leq 0$$

$$-18(y_1 - 80) \geq 0 \quad -80x_1 - 16y_1 \geq 0 \quad -80(x_1 - 2) - 16(y_1 - 80) \geq 0$$

$$x_1 \geq -\frac{16}{80}y_1 = -\frac{y_1}{5}$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_1 \leq 80$$

$$x_1 \leq \frac{16}{80}y_1 \quad 5x_1 - 10 + y_1 - 80 \leq 0$$

$$0 \leq y_1 \leq 80$$

$$-\frac{y_1}{5} \leq x_1 \leq 18 - \frac{y_1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Аналогично для т. В:

$$\begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 80 \\ -\frac{y_2}{5} \leq x_2 \leq 18 - \frac{y_2}{5} \end{cases}$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$y_2 - y_1 = 45 + 5x_1 - 5x_2 = 5(9 + x_1 - x_2) = 5(y_2 - y_1) : 5$$

$$\text{Значит, } y_2 - y_1 = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; \dots; 80\}$$

Также

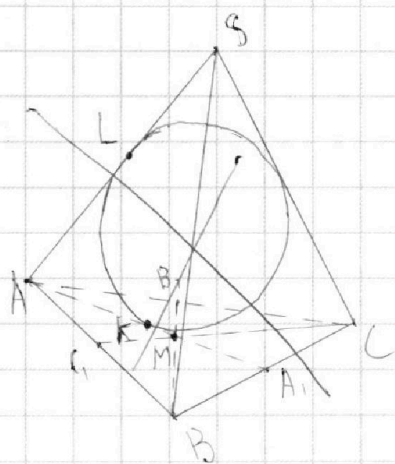
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

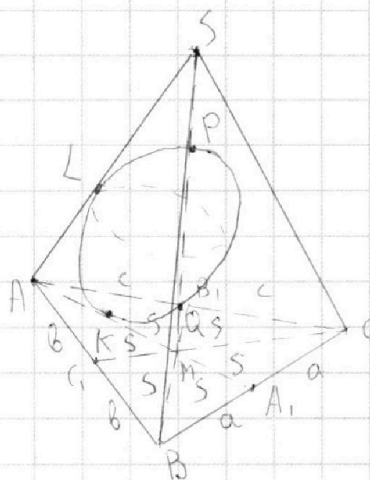
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



$$AA_1^2 = 4b^2 + a^2 - 4ab \cos \angle ABC = 4c^2 + a^2 - 4ac \cos \angle ACB$$

$$b^2 - ab \cos \angle ABC = c^2 - ac \cos \angle ACB$$

$$ac \cos \angle ACB - ab \cos \angle ABC = c^2 - b^2$$

$$\frac{2b}{\sin \angle A_1} = \frac{AA_1}{\sin \angle B}$$
$$\frac{2c}{\sin \angle A_1} = \frac{AA_1}{\sin \angle C}$$

$$S = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$$