МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Пусть~~ Пусть a_2 — макс. показатель степени двойки, на кот. делится a.

Аналогично определим $a_3, a_5, b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$.

По основной теореме арифметики:

$$a_2+b_2 \geq 8 \qquad b_2+c_2 \geq 12 \qquad a_2+c_2 \geq 14$$
$$a_3+b_3 \geq 14 \qquad b_3+c_3 \geq 20 \qquad a_3+c_3 \geq 21$$
$$a_5+b_5 \geq 12 \qquad b_5+c_5 \geq 17 \qquad a_5+c_5 \geq 39$$

Отсюда $a_2+b_2+c_2 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$a_3+b_3+c_3 \geq \frac{14+20+21}{2} = 27{,}5$, откуда $a_3+b_3+c_3 \geq 28$

$a_5+b_5+c_5 \geq a_5+c_5 = 39$

По основной теореме арифметики, тогда $abc \,\vdots\, 2^{17}3^{28}5^{39}$,

то есть $abc \geq 2^{17}3^{28}5^{39}$

Пример:

$$a = 2^5 3^8 5^{12}$$
$$b = 2^3 3^6$$
$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$
$$abc = 2^{17}3^{28}5^{39}$$
$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \,\vdots\, 2^8 3^{14} 5^{12}$$
$$bc = 2^{12}3^{20}5^{27} \,\vdots\, 2^{12}3^{20}5^{17}$$
$$ac = 2^{14}3^{22}5^{39} \,\vdots\, 2^{14}3^{21}2^{39}$$

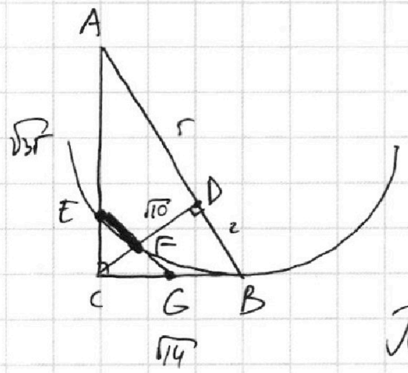
Ответ: $2^{17}3^{28}5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Обозначим $\frac{AB}{7}$ за 1.

Тогда по усл. $AD=5$, $BD=2$.

$CD=\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{10}$

По т. Пифагора $AC=\sqrt{35}$, $BC=\sqrt{14}$.

Пусть G – т. пер. прямой EF с BC. Треугольники ABC и EGC подобны, т.к. $AB \parallel EF$. D и F в них яв. соотв. точками, т.к. они обе лежат на гип. соотв. Δ и $\angle ECF = \angle ACD$ (они просто совп.). Пусть коэфф. подобия α. Тогда $BG = BC(1-\alpha)=\sqrt{14}(1-\alpha)$, $GF = BD\cdot\alpha = 2\alpha$, $EG = AB\cdot\alpha = 7\alpha$. Также $GF\cdot GE = GB^2$, т.к. GB – кас.. Поэтому ~~$14(1-\alpha)^2 = 2\alpha$~~ $(\sqrt{14}(1-\alpha))^2 = 2\alpha\cdot 7\alpha \Rightarrow (1-\alpha)^2=\alpha^2$, откуда $\alpha = 1-\alpha$ и $\alpha=\frac{1}{2}$. Так как треуг. ACD и ECF подобны с коэфф. $\alpha=\frac{1}{2}$, пл. ΔCEF равна четверти пл. ΔACD, что равно $\frac{5}{7}$ пл. ΔABC (т.к. $AD:AB=5:7$). Значит, пл. ΔCEF равна $\frac{5}{28}$ пл. ΔABC.

Ответ: 28:5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$2\pi - 5\arccos(\cos x) = -x$

$x = 5\arccos(\cos x) - 2\pi$

В то же время из усл. равенства косинусов
$\left[\begin{array}{l}\arccos(\cos x) = 2\pi k + x, k\in R\\ \arccos(\cos x) = 2\pi k - x\end{array}\right.$

~~Откуда~~ В первом случае

$x = 10\pi k + 5x - 2\pi$

$-4x = 2\pi(5k-1)$

$x = -\frac{\pi(5k-1)}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \ (1)\\ \cos x = 1 \ (2)\\ \cos x = -1 \ (3)\end{array}\right.$

1) $x = 5\arccos 0 - 2\pi$
$x = \frac{\pi}{2}$

2) $x = 5\arccos 1 - 2\pi$
$x = -2\pi$

3) $x = 5\arccos(-1) - 2\pi$
$x = 3\pi$

Во втором случае

$x = 10\pi k - 5x - 2\pi$

$x = \frac{\pi(5k-1)}{3}$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2} \ (4)\\ \cos x = -\frac{1}{2} \ (5)\\ \cos x = 1 \leftarrow \text{уже разобран}\end{array}\right.$

4) $x = 5\arccos\frac{1}{2} - 2\pi$
$x = -\frac{\pi}{3}$

5) $x = 5\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi$
$x = \frac{4\pi}{3}$

Проверка.

$10\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = 10\arcsin 0 = 0 = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2}$

$10\arcsin(\cos(-2\pi)) = 10\arcsin 1 = 5\pi = \pi - 2\cdot(-2\pi)$

$10\arcsin(\cos(3\pi)) = 10\arcsin(-1) = -5\pi = \pi - 2\cdot 3\pi$

$10\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 10\arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3} = \pi - 2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$10\arcsin\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 10\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - 2\cdot\frac{4\pi}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

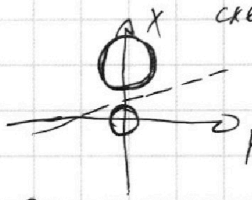
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

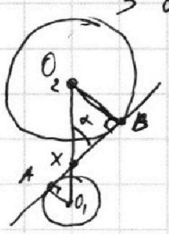
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

Посмотрим, каким кривым на коорд. пл. соотв. наши ур-я.. Первое ур-е, очев., соотв. прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$.
Второе ур-е соотв. объединению двух окружностей:
$x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-10)^2=36$. Первая окр. имеет центр $(0;0)$ и радиус 1, вторая - центр $(0;10)$ и радиус 6.

схематично



Требуется найти знач. a, при кот. сущ. знач. b, при кот. наша прямая будет пересек. обе окр. в двух точках. Так как угл. коэфф. прямой равен $\frac{a}{3}$, а „высота" прямой равна $\frac{4b}{3}$ и мы, таким образом, можем сделать её любой, нужно искл. знач. a, при кот. из всего семейства прямых паралл. прямой $y = \frac{a}{3}x$, ни одна не пер. каждую окр. в 2 точках. Очевидно, это значения a, лежащие между угловыми угл. коэффициентами общих внутр. касательных к окружностям (т.е. $\Leftrightarrow \frac{a}{3}$ лежит не между угл. коэфф. общих внутр. кас.).



← обозн. приведены здесь

треуг. O_2BX и O_1AX подобны по 2 углам, $O_2B=6$, $O_1A=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1X : XO_2 = 1:6$, $O_1O_2 = 10 \Rightarrow O_1X = \frac{10}{7}$, $AO_1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{AO_1}{O_1X} = 0{,}7$. Очев., угл. коэфф. равен $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha = 0{,}7$. Тогда угл. коэфф. второй внутр. кас. равен $-0{,}7$. Значит, усл. вып. $\Leftrightarrow a \notin [-2{,}1; 2{,}1]$.

Ответ: $a > 2{,}1$ и $a < -2{,}1$.

Задача: 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

Замена: $a = \log_5 2x$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}\frac{1}{5} - 3$

Замена: $b = \log_5 y$

$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

В каждом ур-и (на a и на b) левая часть возрастает (т.к. яв-ся суммой возр. функций $3a^5$, $9a$ и константы, аналогично с b), поэтому у каждого ур-я ровно 1 решение (т.к. очевидно, что при $a=-2$ и $b=-2$ отр., при $a=2$ и $b=2$ …). Также очевидно, что если a – реш. первого ур-я, то $b=-a$ – реш. второго, т.к. $3(-a)^5+9(-a)+13 = -(3b^5+9b-13) = 0$. Значит, $b=-a$, то есть $\log_5 y = -\log_5 2x$, откуда $y = \frac{1}{2x}$. Значит, $xy = x\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$3a^5 - 9 = 4 - 9a$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

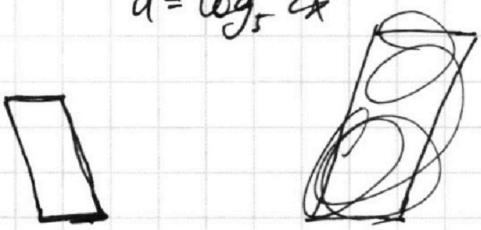
$a = \log_5 2x$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}\frac{1}{5} - 3$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

$b = \log_5 y$



$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$

$\begin{cases} 0 \le y \le 80 \\ -5x \le y \le 90 - 5x \end{cases}$

-16×25

-80×25

$\frac{y_2 - y_1}{5}$

от -16 до 16

$x_2 - x_1$

от -7 до 25

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

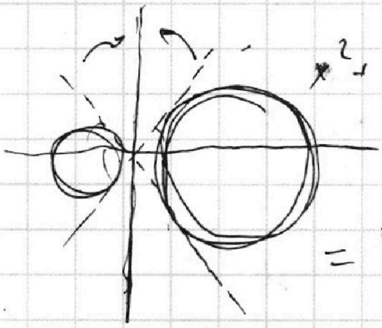
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = \frac{ax+4b}{3}$ $y^2 = \frac{a^2x^2+8abx+16b^2}{9}$ $\begin{array}{r} \times\, 64 \\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$

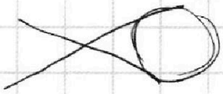
$(a^2+9)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$



$x^2 + \frac{a^2x^2+8abx+16b^2}{9} - \frac{20ax+80b}{3} + 64 =$

$= (a^2+9)x^2 + 4a(2b-15)x + (16b-240)b + 576 = 0$

$\frac{D}{64} = a^2b^2 - (a^2+9)b^2$



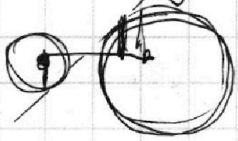
центр

$x^2 + (y-10)^2 = 36$ 0, 10

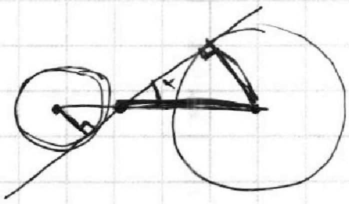
$y = 10$
$x = \pm 6$

$y = \frac{ax+4b}{3}$

$\frac{a}{3}$ должно быть между ± накл. кас



a не между $\pm\frac{4}{3}$ накл. кас.



$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$ $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

$\frac{1}{a^4} - 3a = a - 3$

$\frac{1}{a^4} - 4a + 3 = 0$

$4a^5 - 3a^4 - 1 = 0$

$a = 1$

$13b^5 + 9b^4 + 3 = 0$

$b^5 + 3b + 4 = 0$

$\frac{1}{b^4} + 4b = -\frac{b}{3} - 3$ $3b^5 + 9b + 12 = 0$

$\frac{1}{b^4} + 4\frac{1}{3}b + 3$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$

$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$