



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть~~ Пусть a_2 ^{или} ^{показатель} макс. элемент факты, на кот. делится a .

Аналогично определим $a_3, a_5, b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$.

По основной теореме арифметики:

$$\begin{array}{lll} a_2 + b_2 \geq 8 & b_2 + c_2 \geq 12 & a_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + b_3 \geq 14 & b_3 + c_3 \geq 20 & a_3 + c_3 \geq 21 \\ a_5 + b_5 \geq 12 & b_5 + c_5 \geq 17 & a_5 + c_5 \geq 39 \end{array}$$

Отсюда ~~а~~ $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{14+20+21}{2} = 27,5, \text{ откуда } a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq \frac{12+17+39}{2} = 34, \text{ откуда } a_5 + b_5 + c_5 \geq 39$$

По основной теореме арифметики, тогда $abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$,

то есть $abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Пример:

$$a = 2^5 3^8 5^{12}$$

$$b = 2^3 3^6$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} : 2^9 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{27} : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} 3^{22} 5^{39} : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

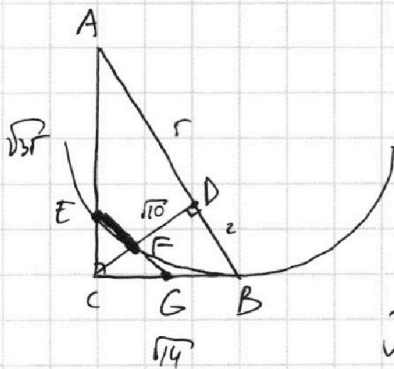
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Пусть $AB = 7$.~~

Обозначим $\frac{AB}{7}$ за 1.

Тогда по усл. $AD = 5, BD = 2$.

$$CD = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$$

По т. Пифагора $AC = \sqrt{35}, BC = \sqrt{14}$.

~~Пусть G - т. пер. прямой EF с BC . Треугольники~~

ABC и EGC подобны, т.к. $AB \parallel EF$. Д и F в тех же отв.

тогда, т.к. они еще лежат на тех же отв. Δ и $\angle ECF = \angle ACD$
(они прямо отв.). Пусть α коэффициент подобия Δ . Тогда

$$BG = BC(1-\alpha) = \sqrt{14}(1-\alpha), GF = BD \cdot \alpha = 2\alpha, EG =$$
$$= AB \cdot \alpha = 7\alpha. \text{ Также } GF \cdot GE = GB^2, \text{ т.к. } GB - \text{кас. По евр 6}$$

$$\sqrt{14}(1-\alpha)^2 = 2\alpha \cdot 7\alpha \Rightarrow (1-\alpha)^2 = \alpha^2, \text{ откуда}$$

$\alpha = 1-\alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Также как треуг. ACD и ECF подобны

с коэфф. $\alpha = \frac{1}{2}$, т. ΔCEF равна стороне т. ΔACD , то

равно $\frac{5}{7}$ т. ΔABC (т.к. $AD:AB = 5:7$). Значит, т. ΔCEF

равна $\frac{5}{28}$ т. ΔABC .

Ответ: 28:5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$2\pi - 5 \arccos(\cos x) = -x$$

$$x = 5 \arccos(\cos x) - 2\pi$$

В то же время из усл. равенства косинусов

~~В первом случае~~
В первом случае
 $x = 10\pi k + 5x - 2\pi$

$$\begin{cases} \arccos(\cos x) = 2\pi k + x, k \in \mathbb{Z} \\ \arccos(\cos x) = 2\pi k - x \end{cases}$$

$$-4x = 2\pi(5k - 1)$$

~~$$x = \frac{\pi(5k-1)}{2}$$~~

$$x = \frac{\pi(5k-1)}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x = 1 & (2) \\ \cos x = -1 & (3) \end{cases}$$

$$1) \quad x = 5 \arccos 0 - 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad x = 5 \arccos 1 - 2\pi$$

$$x = -2\pi$$

$$3) \quad x = 5 \arccos(-1) - 2\pi$$

$$x = 3\pi$$

$$4) \quad x = 5 \arccos \frac{1}{2} - 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$5) \quad x = 5 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{3}$$

Во втором случае

$$x = 10\pi k - 5x - 2\pi$$

$$x = \frac{\pi(5k-1)}{3}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (4) \\ \cos x = -\frac{1}{2} & (5) \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \leftarrow \text{уже рассмотрено}$$

Проверка.

$$10 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = 10 \arcsin 0 = 0 = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$10 \arcsin\left(\cos(-2\pi)\right) = 10 \arcsin 1 = 5\pi = \pi - 2 \cdot (-2\pi)$$

$$10 \arcsin(\cos(3\pi)) = 10 \arcsin(-1) = -5\pi = \pi - 2 \cdot 3\pi$$

$$10 \arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 10 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3} = \pi - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$10 \arcsin\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 10 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - 2 \cdot \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



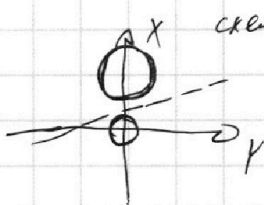
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 9x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Посмотрим, какими кривыми на коорд.пл. соотв. наши ур-е.
Первое ур-е, очев., соотв. прямой $y = \frac{9}{3}x + \frac{4b}{3}$.

Второе ур-е соотв. объединению двух окружностей:

$x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y-10)^2 = 36$. Первая окр. имеет центр $(0; 0)$ и радиус 1, вторая - центр ~~$(0; 10)$~~ $(0; 10)$ и радиус 6.



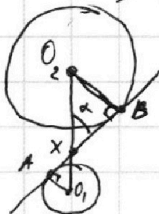
~~Требуется найти значения a, при кот. линия будет пересекать окр. в двух точках.~~

Требуется найти знач. a , при кот. линия будет пересекать окр. в двух точках. Так как угл. коэфф. прямой равен $\frac{9}{3}$,

а "высота" прямой равна $\frac{4b}{3}$ или, таким образом, можем сделать её любой, нужно найти знач. a , при кот. из всего семейства паралл. прямой $y = \frac{9}{3}x$, ни одна не пер. каждую окр. в 2 точках.

Очевидно, это значения ~~a~~ , лежащие между угловыми

коэффициентами двух внутр. касательных к окружностям (т.е. $\frac{9}{3}$ ~~лежит не между угл. коэфф. двух внутр. кас.~~).



т.е. $\frac{9}{3}$ ~~лежит не между угл. коэфф. двух внутр. кас.~~

здесь $O_2 B \perp O_1 A$ по теореме, $O_2 B = 6, O_1 A = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 X : X O_2 = 1 : 6, O_1 O_2 = 10 \Rightarrow O_1 X = \frac{10}{7}, A O_1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{A O_1}{O_1 X} = 0,7$. Очев., угл. коэфф. равен $\cos(90^\circ - \alpha) =$

$= \sin \alpha = 0,7$. Тогда угл. коэфф. второй внутр. кас. равен $-0,7$. Значит, угл. вып. $\Rightarrow a \in [2, 1; -2, 1]$.

Ответ: $a > 2, 1$ и $a < -2, 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

Замена: $a = \log_5 2x$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4 y - 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

Замена: $b = \log_5 y$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

В каждом ур-и (на a и на b) левая часть возрастает (т.к.

есть увеличивающ. возр. функции $3a^5$, $9a$ и убывающ. аналогично b ,
т.к. убывающ. возр. $-\frac{3}{a}$ и $-\frac{4}{b}$ (или $a = -2, b = -2$ отр., или $a = 2, b = 2$ отр.)

поэтому у каждого ур-я ровно 1 решение. Также очевидно, что

если a - реш. первого ур-я, то $b = -a$ - реш. второго, т.к. $3(-a)^5 + 9(-a) + 13 = -(3a^5 + 9a - 13) = 0$. Значит, $b = -a$, то есть ~~$\log_5 y = -\log_5 2x$~~

~~$\log_5 y = -\log_5 2x$~~ , откуда $y = \frac{1}{2x}$. Значит, $xy = x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$.

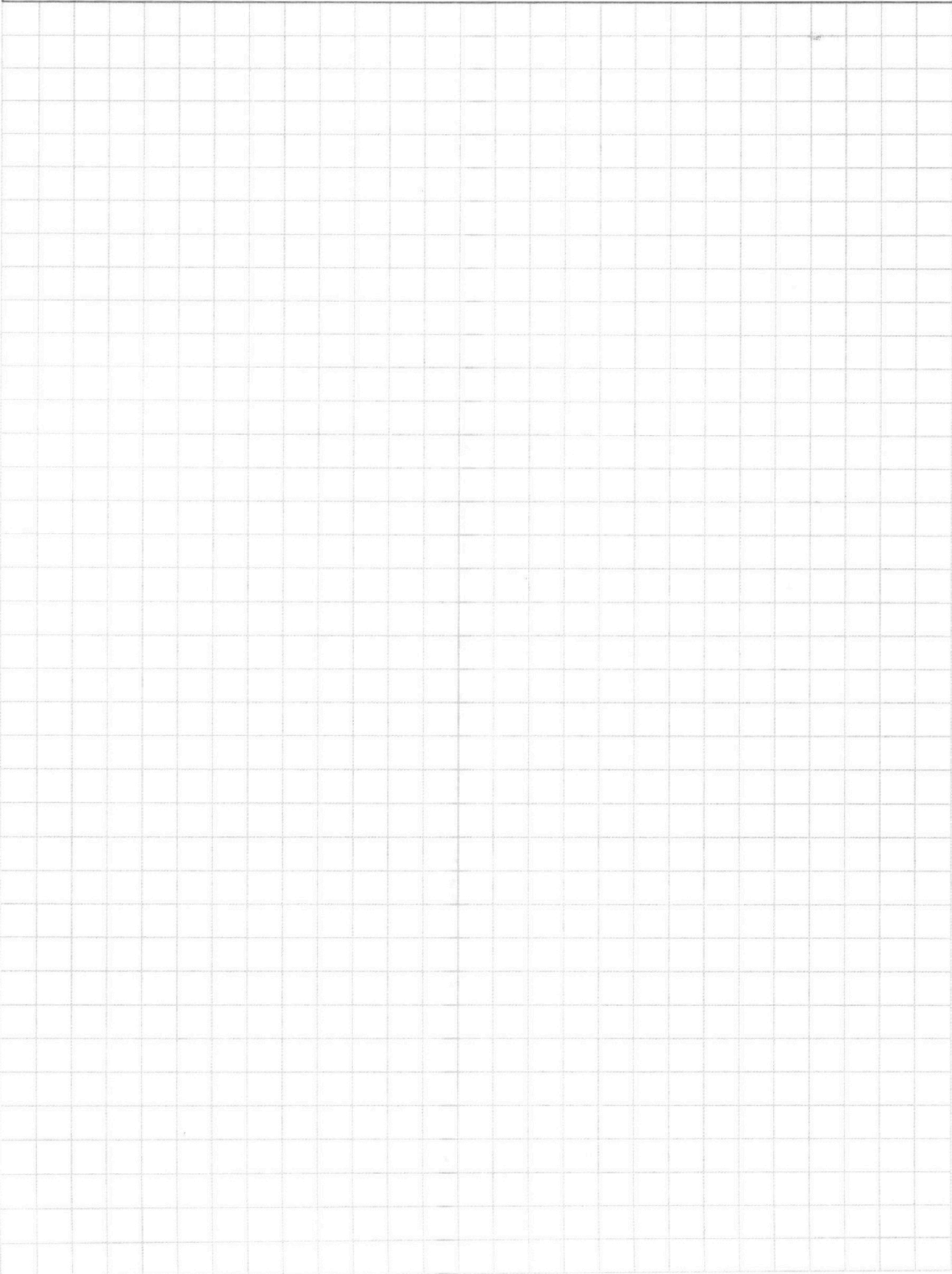
Ответ: $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_r^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

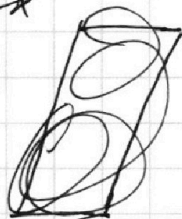
$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$a = \log_r 2x$$



$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out equations:~~

$$b^4 \cdot \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out equations:~~

$$b = \log_r y$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ -5x \leq y \leq 90 - 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x \leq y \leq 90 - 5x \end{cases}$$

$$-16 \times 25$$

$$-80 \times 25$$

~~Handwritten scribbles:~~

~~Handwritten scribbles:~~

~~Handwritten scribbles:~~

~~Handwritten scribbles:~~

$$\frac{y_2 - y_1}{5}$$

$$\text{or } -16 \cdot 90 / 16$$

$$x_2 - x_1$$

$$\text{or } -7 \cdot 90 / 25$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

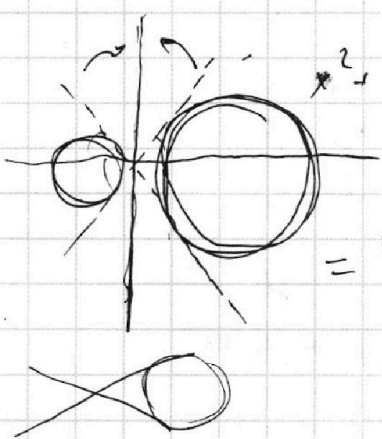
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{ax+4b}{3}$$

$$y^2 = \frac{a^2x^2 + 8abx + 16b^2}{9}$$

$$(a^2+9)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$



$$x^2 + \frac{a^2x^2 + 8abx + 16b^2}{9} - \frac{20ax + 80b}{9} + 64 = 0$$

$$(a^2+9)x^2 + 4a(ab-5)x + (16b^2-40b) + 576 = 0$$

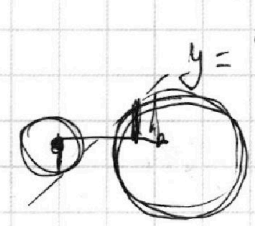
$$D = 4a^2(ab-5)^2 - 4(a^2+9)(16b^2-40b+576)$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

центр 0, 10

$$y = 10$$

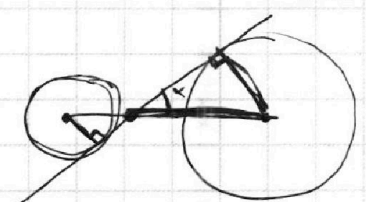
$$x = \pm 6$$



$$y = \frac{ax+4b}{3}$$

$$\frac{a}{3}$$

решение этой системы ± вещ. кор.
 а также ± 9 не решение $\frac{1}{2}$ 3 вещ. кор.



$$\frac{1}{64} + ab = \frac{1}{3} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\log_7^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 0,2 - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 3a = a - 3$$

$$\frac{1}{b^4} + 4b = -b - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 4a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + 5b + 3 = 0$$

$$4a^5 - 3a^4 - 1 = 0$$

$$13b^5 + 9b^4 + 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$3 + 13b^5 + 9b^4$$

$$(a-1) \cdot a^4$$

$$13b^5 + 9b^4$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{13}{3b} - 3$$

$$b^5 + 3b + 0 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + 4b = -\frac{b}{3} - 3 \Rightarrow 3b^5 + 9b^4 + b = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{4}{b} = -\frac{b}{3} - 3 \Rightarrow 4\frac{1}{3}b + 3$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$$