МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть k, m, n — натуральные числа такие, что:

$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, $bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$, $ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$, тогда:

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$, значит:

$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3}$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3kmn} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ какое-то из чисел k, m, n содержит в разложении на простые множители тройку в нечётной степени, т.к. нас интересует минимум, то возьмём $3^1 = 3$.

Из произведения abc можно ~~выделить~~ узнать a, b, c по отдельности ведь мы знаем попарные произведения, на ab и bc abc делится и всё хорошо, но при делении на ac:

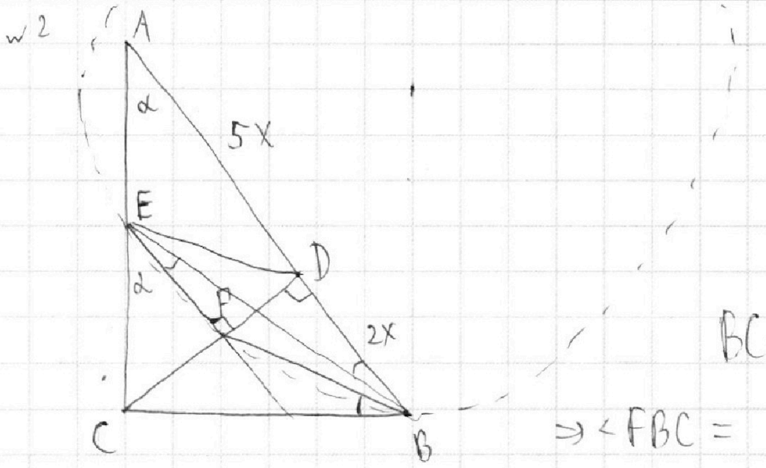
$\frac{abc}{ac} = \frac{\sqrt{3kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3}}{n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = \sqrt{\frac{3km}{n}} \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{-5} \Rightarrow \frac{abc}{ac} \notin \mathbb{N}$, значит

$\sqrt{kmn} \geq 5^5 \Rightarrow kmn \geq 5^{10}$ опять в интересах минимизации возьмём $kmn = 3 \cdot 5^{10}$ (т.к. kmn содержит 3 из ранее написанного).

Тогда, пусть $k = 3$, $m = 5^{10}$, $n = 1$: $abc = 3 \cdot 5^5 \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Отсюда
$$
\left.\begin{aligned}
c &= \frac{abc}{ab} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{3 \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}} = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27} \\
b &= \frac{abc}{ac} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{1 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = 2^3 \cdot 3^7 \\
a &= \frac{abc}{bc} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{5^{10} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}} = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}
\end{aligned}\right\} \text{все числа натуральные.}
$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$



$AD = 5x$, $BD = 2x$

$CD = \sqrt{10}\,x$

BC - касательная $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBC = \frac{\overset{\frown}{BF}}{2} = \angle FEB \Rightarrow \angle EBA =$

$= \angle FEB$ (накрест лежащие $DB \parallel EF$, сек. EB) $\Rightarrow$ дуга, на которую опирается $\angle EBA = \angle FBC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos(-x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

1) $10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$

$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$

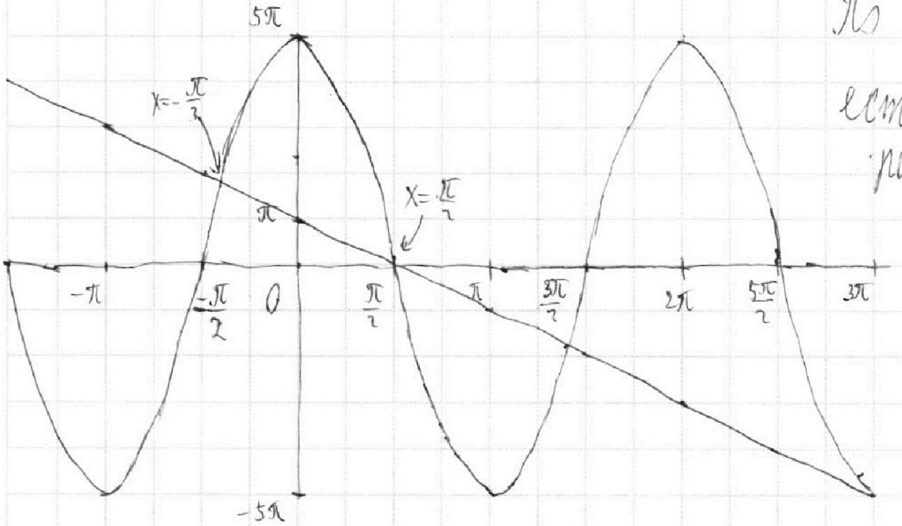
2) $10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$

Мы нашли корни при $x \in [-\pi; \pi]$.



По графику видно, что есть ещё корни, рассмотрим участок:

$x \in [-3\pi; -\pi]$:

1) $10\arcsin\left(\sin\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \pi - 2x$

$-10x - 15\pi = \pi - 2x$

$-8x = 16\pi \Rightarrow x = -2\pi$

2) $10x - 15\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = 16\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi$ ~~не принад.~~ $\cancel{[-3\pi; -\pi]}$.

проверим: $10\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{8}{3}\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow$ корень

$x \in [\pi; 3\pi]$:

1) $-10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow -8x = -24\pi$, $x = 3\pi$

2) $10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = -24\pi$, $x = -2\pi$

Ответ: -2π, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$, 3π.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

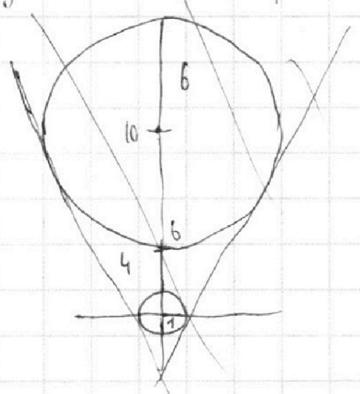
$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2) \end{cases}$$

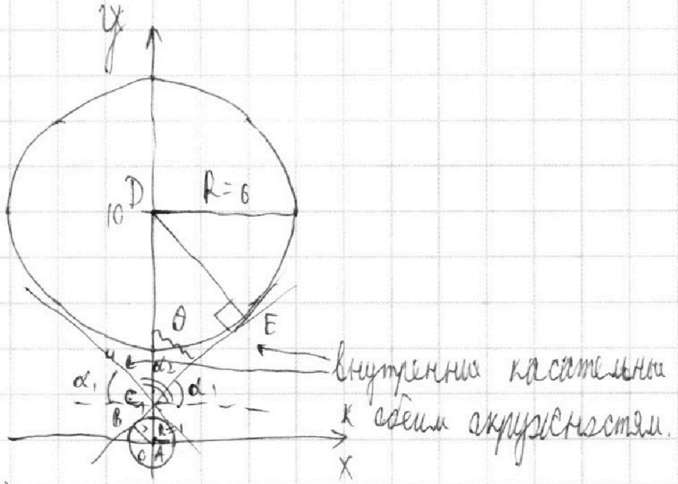
$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow$ окружность с центром $(0;0)$, $R=1$

$x^2+y^2-20y+64 = x^2+(y-10)^2-36=0 \Rightarrow$ окр-ть с центром $(0;10)$, $R=6$.

$ax-3y+4b=0$ − прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

Четыре решения будет если прямая (1) будет секущей для обеих окружностей, то есть:





$\frac{a}{3} > tg\,\alpha_1$, $\frac{a}{3} < tg\,\alpha_2$, $tg\,\alpha_2 = -tg\,\alpha_1$

Пусть A, D − центры окружностей, B, E − ~~их~~ точки касания, C − точка пересечения AD и BE, т.к. $\angle BCA = \angle DCE$ (вертикальные), $\angle DEC = \angle ABC = 90°$ (радиус, проведённый в точку касания), то $\triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{1}{6} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow DC = 6AC$, $AC + DC = 7AC = 10$ (т.к. расстояние между центрами $=10$) $\Rightarrow AC = \frac{10}{7}$, $DC = \frac{60}{7}$

$CE = \sqrt{-DE^2+CD^2} = \sqrt{\frac{3600}{49}-36} = 6\sqrt{\frac{100}{49}-1} = \frac{6}{7}\sqrt{51} \Rightarrow BC = \frac{CE}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow BE = \sqrt{51}$

$DB = \sqrt{36+51} = \sqrt{87}$

$\sin\theta = \frac{DE}{DC} = \frac{7\cdot 6}{60} = \frac{7}{10} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \sin\alpha_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{7}{10} \Rightarrow tg\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, $a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$.

Ответ: $\cancel{a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right.}$ $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{(2x)^3}5^4 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}5^{-1} - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0,\ x\neq\frac{1}{2} \\ y>0,\ y\neq 1 \end{cases} \quad xy - ?$$

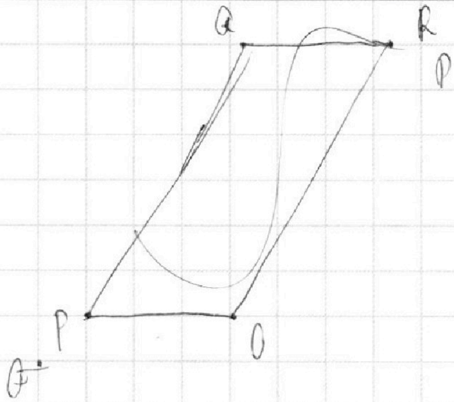
$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

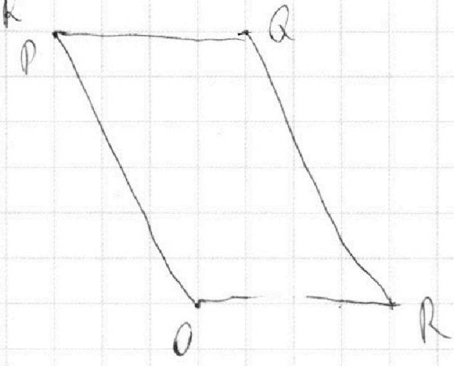
Пусть $a = \log_5 2x$, $b = \log_5 y$, тогда $xy = \frac{5^{a+b}}{2}$

$$\ominus \begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases}$$

$a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0$ если $a = -b$, то верно $\Rightarrow$ $xy = \frac{1}{2}$.

МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^4 - b^4 - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0$ $a^4 = -\frac{13}{3a}$

$\begin{cases} \frac{a}{3}x_1 + \frac{4}{3}b = x_1^2 + y^2 \\ \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \end{cases}$

$\sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) = 0.$ $3a^5 = -13 \Rightarrow a = \sqrt[5]{+\frac{13}{3}}$

$x_1^2 - \frac{a}{3}x_1 - \frac{4}{3}b = y_1^2$

$b = \sqrt[5]{-\frac{13}{3}}$ b^4

$2\gamma + \alpha + \delta =$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta - \delta$ $\frac{1}{5} = (y^3)^{\alpha} = y^{3\alpha}$ $\log_{y^3} a = \frac{1}{3}\log_y a = \log_y a^{\frac{1}{3}}$

$5^{-1} = y^{\alpha} \Rightarrow y = \sqrt[\cdots]{5}$ $3\alpha \log_5 y = -1$

$\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{6} \cdot 10$ $\frac{5\pi}{3}$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{1}{3}\log_{2x} 5$ $y = -\frac{1}{3\alpha}$

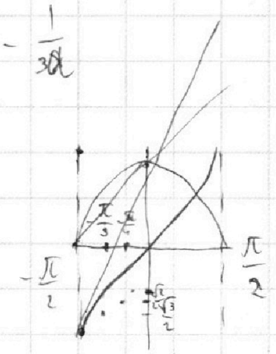
0

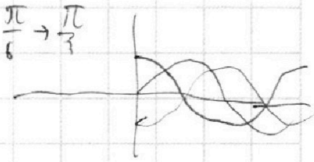
$-3 \Rightarrow \log_5^4(2x) - 4\log_{2x} 5 = -3.$

$\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$a^4 - 4\frac{1}{a} = -3$

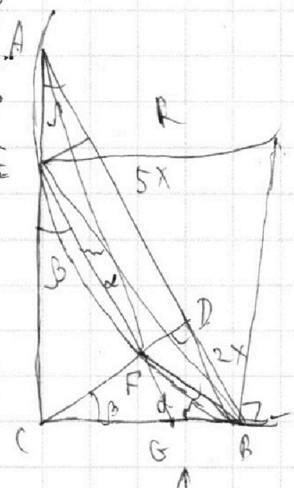


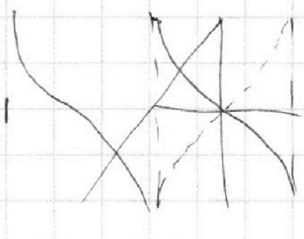


$a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0$

$\arcsin(x) = \cos x) = \frac{\pi}{16} - \frac{x}{5}.$

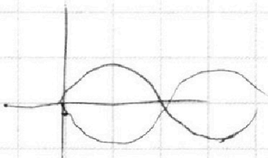
-2π





$\angle FEB = \angle FBC = \angle EBA$

$2\alpha\ \frac{\pi}{2} - \beta - 2\alpha = \angle EBF$



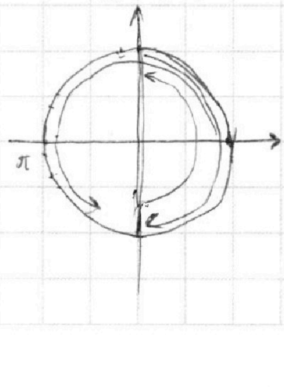
$-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot 10 = \frac{5\pi}{3}$

$10\ 5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $x = -\frac{\pi}{3}$



$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$DC = \frac{DE}{\sin\theta}$ $\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \ldots$ $\alpha_2 = \pi - 2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_{y^3}5 - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$xy - ?$

$\begin{cases} \log_5^4 2x - 3\frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{\log_5 8x^3} - 3 \\ \log_5^4 y + 4\frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{\log_5 y^3} - 3 \end{cases}$

$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} - \log_5^4 y - \frac{4}{\log_5 y} = \frac{4}{3\log_5 2x} + \frac{1}{3\log_5 y}$

$\log_5 2x = a, \quad \log_5 y = b \Rightarrow a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} - b^4 - \frac{4}{b} - \frac{1}{3b} = 0$

$\frac{9}{3a}$ $\frac{12}{3b}$

$a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{13}{3b} = 0$

$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \qquad a \neq 0 \Rightarrow \cancel{a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0}$

$a^4 - b^4 - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0 \qquad a = -b$ решение

$\log_5 2x = -\log_5 y$

$2x = 5^a$

$y = 5^b \qquad \Rightarrow xy = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{1}{2}$

$2x = -y$

$x = -\frac{y}{2}$

$a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3}$ – корень.

$3a = \sqrt[4]{13} \qquad a^4 + 3 = \sqrt[4]{13^3}$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$

$3a^5 + 9a - 13 = 0 \qquad 3a(a^4 + 3) = 13 \qquad a^4 = \frac{13}{3^4} = \sqrt[4]{13^3} - 3$

$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 \,\Big|\, a - \frac{\sqrt[4]{13}}{3}$

$a^3 + a^2\frac{\sqrt[4]{13}}{3} + a\frac{\sqrt[4]{13}}{9} + \frac{\sqrt[4]{13^3}}{27}$

$a^4 - a^3\frac{\sqrt[4]{13}}{3}$

$a^3\frac{\sqrt[4]{13}}{3} - \frac{13}{3a} + 3$

$a^3\frac{\sqrt[4]{13}}{3} - a^2\frac{\sqrt{13}}{9}$

$a^2\frac{\sqrt{13}}{9} - \frac{13}{3a} + 3$

$a^2\frac{\sqrt{13}}{9} - \frac{13}{a} + 3$

$a^2\frac{\sqrt{13}}{9} - a\frac{\sqrt[4]{13^3}}{27}$

$a\frac{\sqrt[4]{13^3}}{27} - \frac{13}{a} + 3$

$a\frac{\sqrt[4]{13^3}}{27} - \frac{13}{81}$

$\frac{228}{81} - \frac{13}{a}$

$3a = \sqrt{13} \qquad a = \frac{\sqrt{13}}{3} \qquad \sqrt[4]{13^3} - 3 - \frac{13}{\sqrt[4]{13}} + 3 = 0$

$a^4 \cancel{+3} = \sqrt{13} \Rightarrow \qquad a^4 = \sqrt{13} - 3$

$3a = \sqrt[3]{13} \qquad a = \frac{\sqrt[3]{13}}{3}, \quad a^4 = \frac{13\sqrt[3]{13}}{3^4}$

$a^4 + 3 = \sqrt[3]{13^2}$

$-\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{6}$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi n = \pi - 2x$

$x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 10\arcsin(0) = 0$

$x = -2\pi \Rightarrow 10\arcsin(1) = 5\pi \Rightarrow \pi + 4\pi = 5\pi$

-5π

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{17}$, $ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$, $k, m, n \in \mathbb{N}$

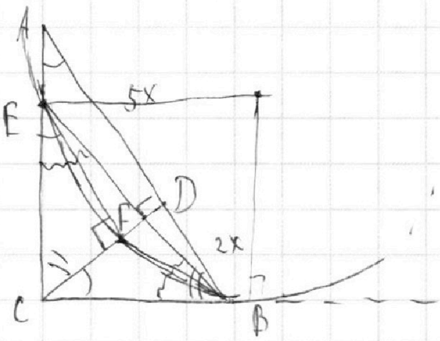
$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$, если $kmn = 3^2 5^{20}$ то $abc =$

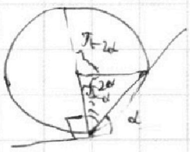
$= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow c = \dfrac{2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}}{k}$, $a = \dfrac{2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22}}{m}$, $b = \dfrac{2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{-10}}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab = \dfrac{2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}}{mn}$, $bc = \dfrac{2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17}}{nk}$, $ac = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5$

$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

№2.





$AB \parallel EF$

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{5}{2}$

$CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\dfrac{CD}{5x} = \dfrac{2x}{CD}$

$\dfrac{CF}{CD} = \dfrac{EF}{AD}$

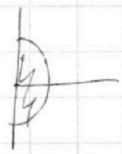
$CD = \sqrt{10}\,x$ $[ABC] = \dfrac{7\sqrt{10}}{2} x^2$

$\angle FEB = \angle FBC$

$BC = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}\,x$, $AC = \sqrt{35x^2} = \sqrt{35}\,x$

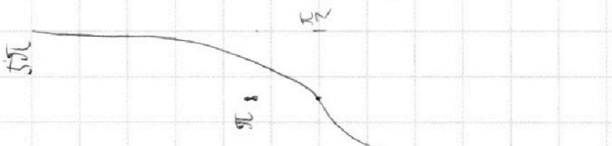
$\cancel{\triangle ECB}$

$\arcsin \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$



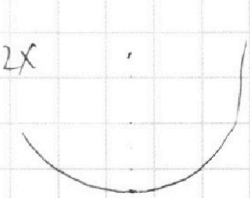
$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10 \arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$ $5\pi - 10x = \pi - 2x$



$8x = +4\pi$

$x = +\dfrac{\pi}{2}$



№4. $\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \dfrac{a}{3}x + \dfrac{4}{3}b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 = 1}{x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36 = 0} \Rightarrow x^2 + (y-10)^2 = 36$