



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Если $a:b$ и $c:d$, то $a^2c^2 : b^2d^2$, значит:

$$a^2b^2c^2 : a^2c^2 = 2^{42} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$
$$= 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$a^2b^2c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \text{ значит}$$

степень в каждой из них 2 в $a^2b^2c^2$

потому что 21, как и тройки тоже

было 21, иначе степени в $a^2b^2c^2$ были

не более 40, при этом $a^2c^2 : 5^{30}$,

значит $a^2b^2c^2 : 5^{30}$, итого:

$$a^2b^2c^2 : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}, \text{ значит сами}$$

исходные $a^2b^2c^2$ это и есть $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$,

пример:

$$a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}, \text{ несложно убедиться}$$

верится, что это подходит и

$$a^2b^2c^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

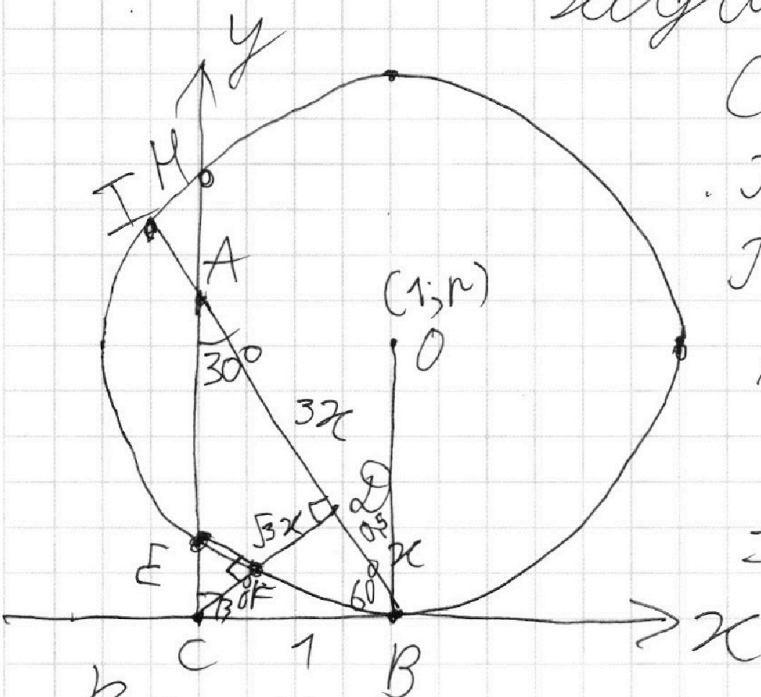
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3}x$$

По теореме

Пифагора для $\triangle CAD$,

$$AC = 2\sqrt{3}x \Rightarrow$$

$$\sin \angle CAD = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAD = 30^\circ,$$

Введем координаты: $C(0; 0)$,
и сошьем картинку у олове-
литы $CB = 1$, т. к. можно
оттолкнуться — это ничего не
изменит $\Rightarrow x = 0,5$ из $\triangle CPB$;
 $A(\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$; $B(1; 0)$, если
 O — центр окружности, то
из касания, $\angle CBO = 90^\circ$ и из
касания и пусть $OB = r$,
радиус окружности, тогда

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А вторая точка пересечения:

$(0; \sqrt{n^2-1} + n)$, пусть это точка
 H , тогда $CE \cdot CH = CB^2$, строим
точки B , расписывая двумя
способами.

Тогда, т.к. EF -параллельно
 AB , то имеет одинаковый угол
наклона: $AB = -2x + 2$. Пересечем
 AB и окружность в точке
 I ; I E F B - вписанная трапеция,
значит $IE = IF$ и $IE = IF$,
 $IE = IF$, вернемся к углу наклона;
 $EF = -2x + 6$; l проходит через E
 $(0; n - \sqrt{n^2-1})$; $b = 2n - 2\sqrt{n^2-1}$
 $EF \Rightarrow y = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$, пересекая
с CD , уравнение
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, т.к. $\angle DCB = 30^\circ$;
 $\frac{\sqrt{3}}{3}x = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$; пусть

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение окружности имеет вид $(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$, найдем пересечение с AC; $x=0$ тогда есть прямой $x=0$:

$$1 + (y-r)^2 = r^2 \Rightarrow (y-r)^2 = (r^2 - 1)$$

$y = \pm \sqrt{r^2 - 1} + r$, но по картинке, так как точки E ниже другой точки пересечения $\Rightarrow E(0; r - \sqrt{r^2 - 1})$.

~~$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ$, прямая CD проходит через $(0,0)$ и имеет вид $y = kx$, где k — тангенс угла наклона; $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, найдем пересечение с~~

~~уравнением окружности:~~

~~$$(x-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - r\right)^2 = r^2$$~~

~~$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}xr + r^2 = r^2$$~~

~~$$\frac{4}{3}x^2 + x\left(-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r\right) + 1 = 0 \quad | \cdot 3$$~~

~~$$4x^2 + x(-6 - 2\sqrt{3}r) + 3 = 0$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$r - \sqrt{r^2 - 1} = t; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} x = -2x + 2t$$

$$x = \frac{2t}{2 + \frac{\sqrt{3}}{3}}; \quad y = \frac{2\sqrt{3}t}{6 + \sqrt{3}}; \quad x = \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1}, \text{ пог-}$$

ставим в уравнение окружности,

т.к. это координаты точки E:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} - 1\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}t}{6 + \sqrt{3}} - r\right)^2 = r^2$$

$$\frac{r^2 t^2}{(2\sqrt{3} + 1)^2} + \frac{12t^2}{(6 + \sqrt{3})^2} \quad \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = a; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$(a - 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a - r\right)^2 = r^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{3} a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} a r + r^2 + r^2 = 0$$

$$D = 12r^2 + 24\sqrt{3}r + 36 - 48$$

$$a = \frac{6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)}}{8}$$

$$\frac{16\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = 6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)},$$

Которая задача у нас можно интер-
претировать по окружности,

мы проводим параллельные

прямые EF, и они севали

окружность около $\triangle EFB$, и получим

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

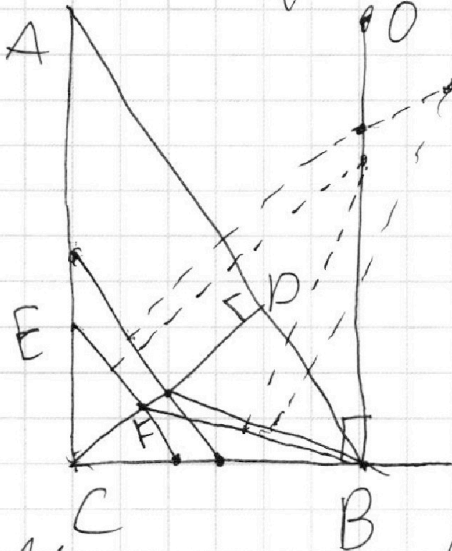
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Как мы помним треугольник у нас у нас углом 30° , то есть рассмотрим



смотрим радиус BO, перпендикулярно к СВ, как и вы должны выписать центр окружности и зная мы тем,

что если будем двигать точку F, по CP, то пересечение центров будет сдвигаться вправо, а значит у нас только одна точка F подходит и несложно узнать радиус окружности:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \sin \sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~Запишем $\arcsin(\cos x)$~~

$$\cos = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$\arcsin \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sin^{-1}(\frac{\pi}{2} - x) \text{ при}$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ тогда } (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi, \text{ что не подходит}$$

Вторым вариантом ~~подходим~~

$$2) x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} + x$$

$$(\frac{\pi}{2} + x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 3\pi; x = \frac{3\pi}{4},$$

что подходит

$$3) x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$(\frac{5\pi}{2} - x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2}$$

$$12\pi = 6x; x = 2\pi, \text{ что не подходит}$$

$$4) x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}], \text{ тогда}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\arcsin t)$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi + \frac{3\pi}{2} - x$$

$$5(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{35\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 6x = 17\pi; x = 3,5\pi,$$

что вводим

$$5) x \in [\frac{4\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 4\pi - x + \frac{\pi}{2}$$

$$4,5\pi - x(\frac{9\pi}{2} - x) \cdot 5 = \frac{\pi}{2} + x$$

$$22\pi = 6x; x = \frac{22\pi}{6}, \text{ что вводим}$$

в интервал; т.к. $x \in [-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi]$,

то мы рассмотрим все

лучше

$$\text{ответ: } \frac{3\pi}{4}; x = 2\pi; x = 3,5\pi;$$

$$x = \frac{22\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

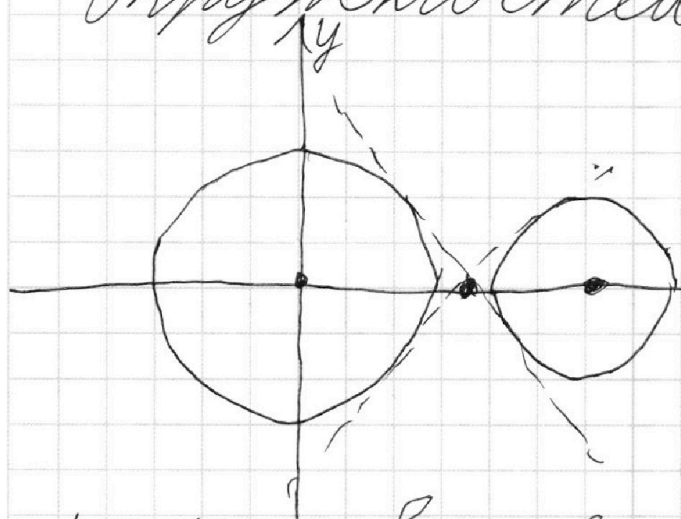
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4
Из второго уравнения
либо $x^2 + y^2 = 9$; либо $(x-6)^2 + y^2 = 4$;
что является уравнениями
окружностей:



проведем
общие касатель-
ные, они симмет-

ричны отно-
сительно
линии центров,

и имеют урав-

нения видов $y = kx + b$ и $y = -kx + b$,

т.к. углы наклона симметричны
и их пересечение лежит на

линии $x = 0$; подставим $kx + b$,

в уравнения, тогда y уравнений

только одно решение:

$$x^2 + (kx + b)^2 = x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2 + 1) + 2kb \cdot x + b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Известное, что эта точка лежит
на радикальной оси этих окружностей
то есть: $b^2(b-3)(b+3) = b^2(4-b)(b-b)$

$$\cancel{b^2} - 9 = \cancel{b^2} - 10b + 24$$

$$b = 3,4 \quad b^2 - 3b = b^2 - 10b + 24$$

$$7b = 24; b = \frac{24}{7}; 9k^2 - b^2 = 9;$$

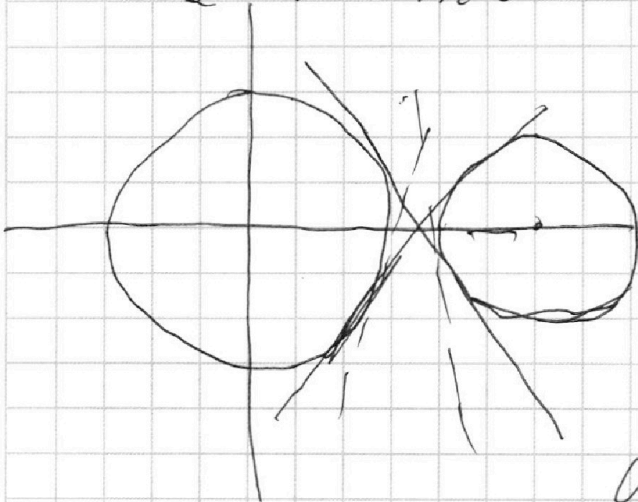
$$9k^2 - 9 = b^2 = \frac{576}{49} \text{ или } \left(\frac{24}{7}\right)^2 : 9$$

$$k^2 = \frac{24^2}{49} + 1$$

$$k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}, \text{ а теперь заметим,}$$

$$\text{что } 0 < ax + 2y - 3b \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + 1,5b,$$

и $\frac{a}{2}$ лежит в интервале $[-k; k]$, т.к.



если угол наклона

больше k , то

даже проведем

касательную с

таким наклоном,

она не будет пересекать

вторую окружность:

Ответ: $[-2k; 2k]$, где $k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0$$

$$16k^2 - 4b^2 + 16 = 0; 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$(x-b)^2 + kx + b$$

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 36k^2 - 4b^2 + 36 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$(x-b)^2 + (kx+b)^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2+1) + x(2kb-12) + b^2+32 = 0$$

$$D = (2kb-12)^2 - 4(k^2+1)(b^2+32) =$$

$$= 4k^2b^2 - 48kb + 144 - 4k^2b - 128k^2 -$$

$$- 4b^2 - 128 = 0$$

$$128k^2 + 4b^2 + 48kb - 16 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$32k^2 + b^2 + 12kb - 4 = 0$$

$$b^2 = 9k^2 + 9, \text{ применим}$$

в левую часть, можно найти, на графике

этих окружностей x пересечения

этих касательных:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

$$\log_3^4 x + 6 \log x 3 = \log x^2 \cdot 243 - 8$$

$$\log_3 x = a \Rightarrow \log x 3 = \frac{1}{a}, \log x^2 \cdot 243 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{2,5}{a} - 8 \quad | \cdot a$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$5y = t \Rightarrow \log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_t^2 (3^{11}) - 8$$

$$\log_3 t = b \Rightarrow b^5 - 3,5 + 8b = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5 + 8a = -3,5 \\ b^5 + 8b = 3,5 \end{cases}$$

$f(x) = x^5 + 8x$ — нечётная

функция, $f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$ и

возрастающая, значит:

$a^5 + 8a = -3,5$, то при $b = -a$; $b^5 + 8b = 3,5$,

причём из возрастания такое b только одно, значит $a = -b$.

$$a = \log_3 x; b = \log_3 t$$

$$\log_3 x = -\log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0 \Rightarrow \log(xt) = 0 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow xt=1 \Rightarrow 5xy=1, xy=0,2$, что
достигается максимумом
на ОДЗ, пример тому $x=3$;
 $t=\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{15}$.
Ответ: 0,2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

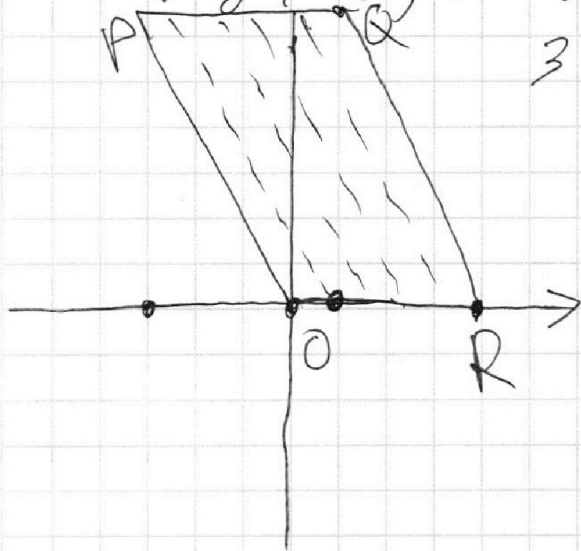
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Попробуем найти сколько клеток
в параллелограмме удовлетворяет

$3x_1 + y_1 = 0; \Rightarrow 3x_1 + y_1 = 1 \dots$



$3x_1 + y_1 = a; y_1 = 3x_1 - a,$

это прямые

PO имеет вид

$y = -3x_1,$ значит

внутри есть прямые

$y = -3x_1; y = -3x_1 + 1;$

$y = -3x_1 + 2 \dots y = -3x_1 + 20; \dots -3x_1 + 60$

PO $\rightarrow y = -3x_1; a$ QR $= -3x_1 + 20.$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33;$

$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1,$ то есть

значения $3x_2 + y_2$ принимаем

значения от 0 до 60; так же

как $x_1 + y_1,$ примем: $y = -3x_1 + a,$

если $a = 0,$ то решения y нас будет

4 решения

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, из этого следует, что
решения $y \in [0; 42]$, что очевидно
из графика: $y = -3x_1 + a$; если
 $a \in [0; 3]$, то решений 15, т.к. $a = 3k$ и
 $x_1 = k \Rightarrow y = 0$ и так x_1 может
повышаться как минимум до 42
и будет 15 решений, а по формул-
ным методам; если $a \in 1$, то
 y это $1; 4 \dots 40$ - их 14 и если
 $a \in 2$, то их 14, значит
 $a = 0 \Rightarrow 15$; $a = 1 \Rightarrow 14$; $a = 2 \Rightarrow 14 \dots$
 $a = 60 \Rightarrow 15$ и у нас образуются
пары $(a = 0; a = 33)$; $(a = 1; 34) \dots (27; 60)$
это пары при которых
 $3x_2 + y_2 = 3(-3x_1 + y_1)$, всего пар
28; 10, при которых a кратно
3 и 18 при которых не кратно,
тогда если $a = 0$ и $a = 33$, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это $15 \cdot 15 = 225$ пар, если $a=1$ и
 $a=34$, то это $14 \cdot 14 = 196$ пар и всего
пар $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$, всего
пар с обоими на крайних
трех, и по 10 и в каждой по 225
решений, а в не крайних 3
и будет 18 пар a и $a+33$, и в каж-
дой 196 способов выбрать
Ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

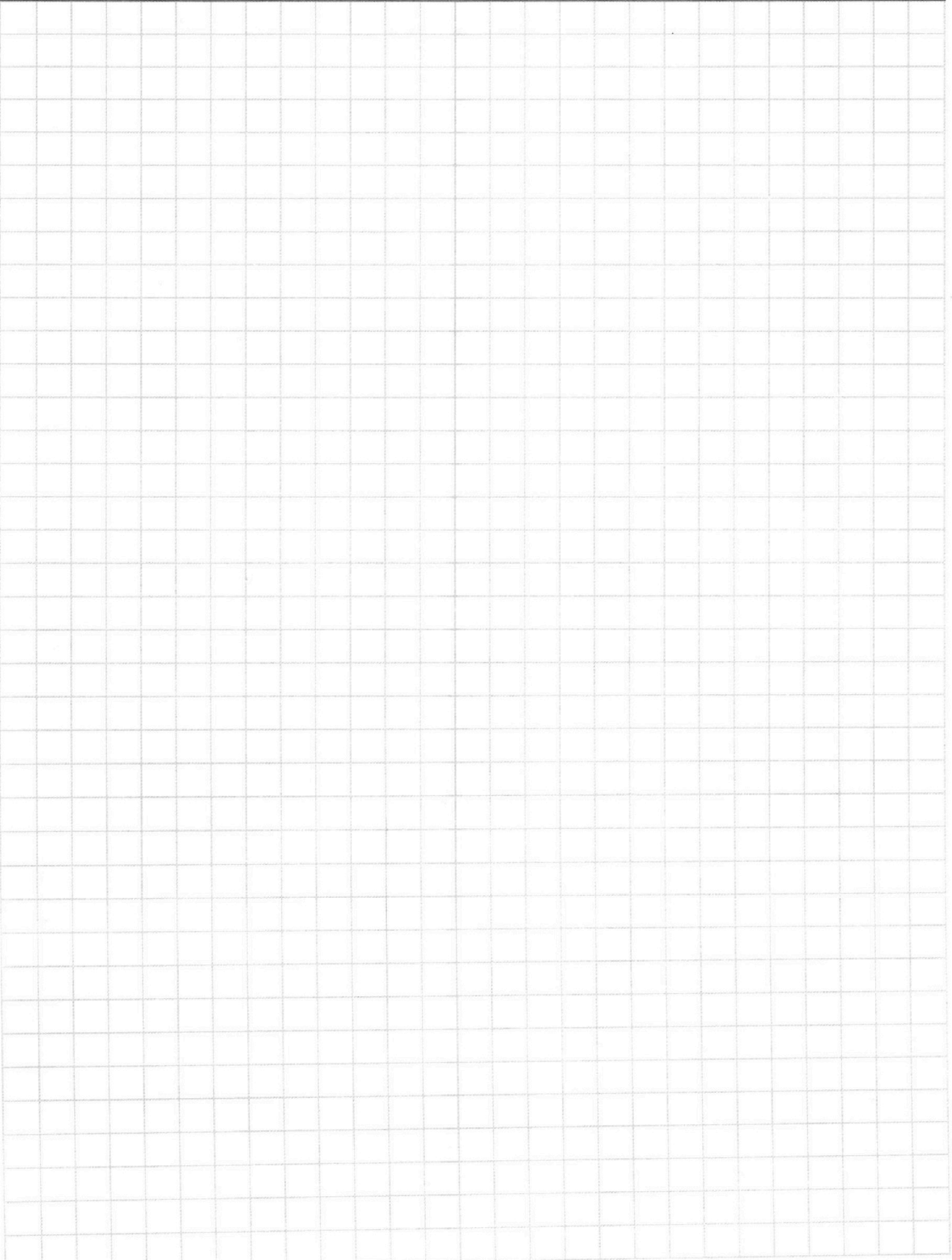
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





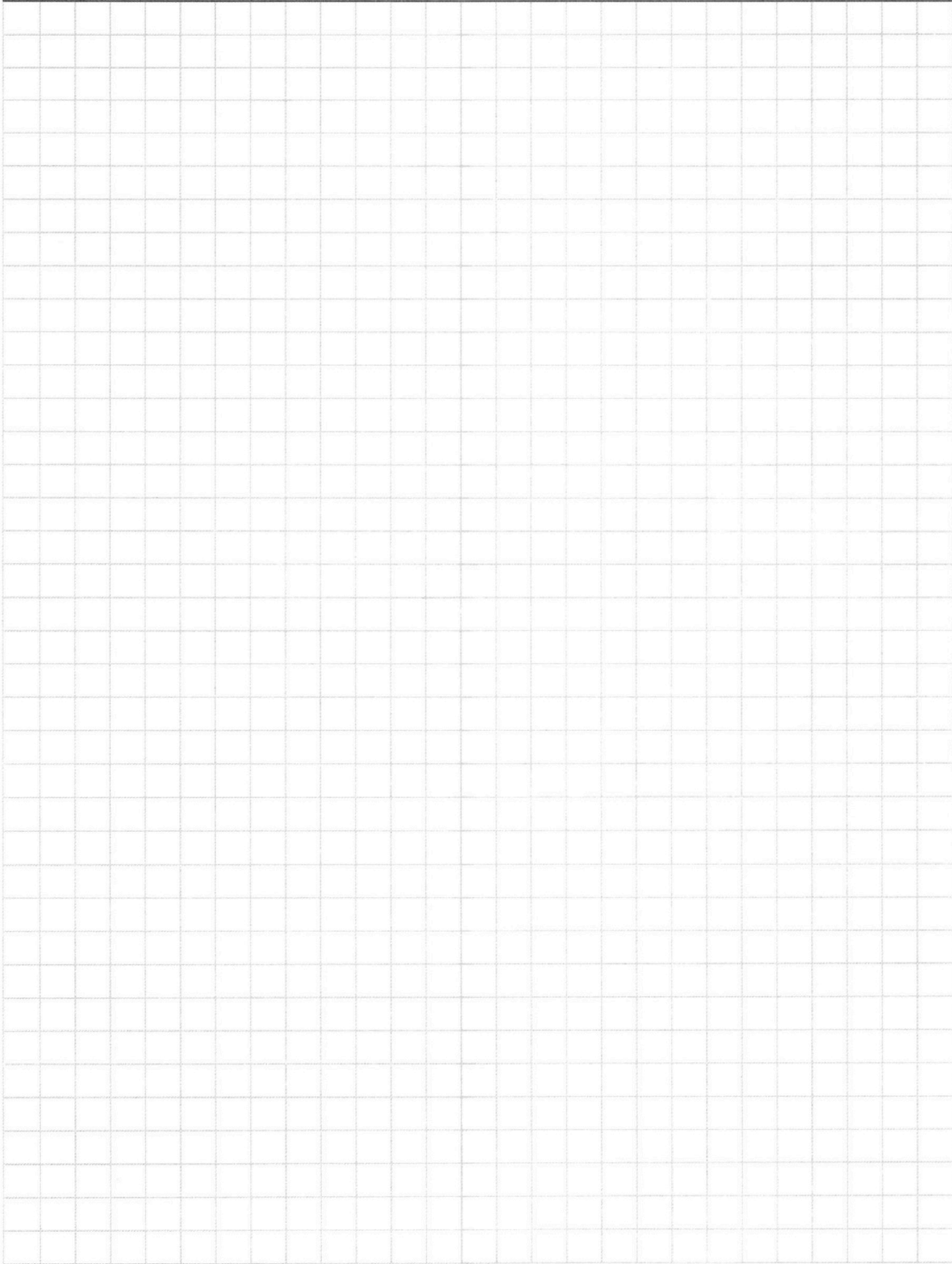
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



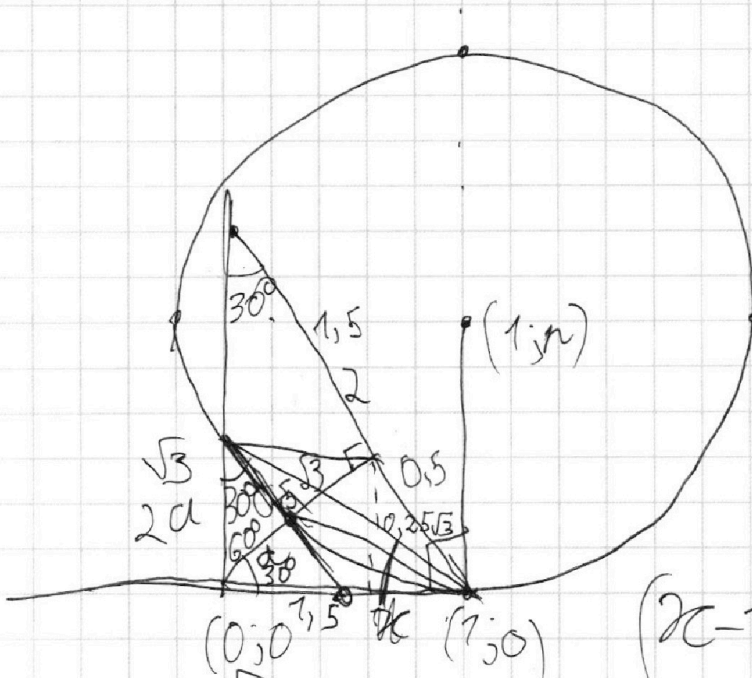
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad x = 0$$

$$\frac{a}{0,5\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$(x-1)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$1 + y^2 - 2ny + n^2 = r^2$$

$$y^2 - 2ny + 1 = 0$$

$$(y-n)^2$$

$$5y = t$$

$$a^5 - 8at + 3,5 \dots = 0$$

$$\frac{6}{a} - 2,5a$$

$$\log_3^4 t + 2 \log t + 3 = \log t^{3,5}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} t = a$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \cdot 2 \cdot 3 + 18$$

$$28 + 14$$

W

$$a^2 b^2 c^2 : 2^4 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 5^3$$

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$a + b = 9$$

$$a + b + c = 24$$

$$a + c = 14$$

$$a + b + c = 48 - 24 = 24$$

$$c = 15 \quad b = -1$$

$$b + c = 14$$

$$a = 10$$

$$a + c = 19$$

$$b - a \quad a - b = 5$$

$$a + b \geq 9$$

$$b = 2$$

$$a = 2^7 \cdot 3^7$$

$$a + b = 10$$

$$a = 4 \quad c = 12$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$b + c = 14$$

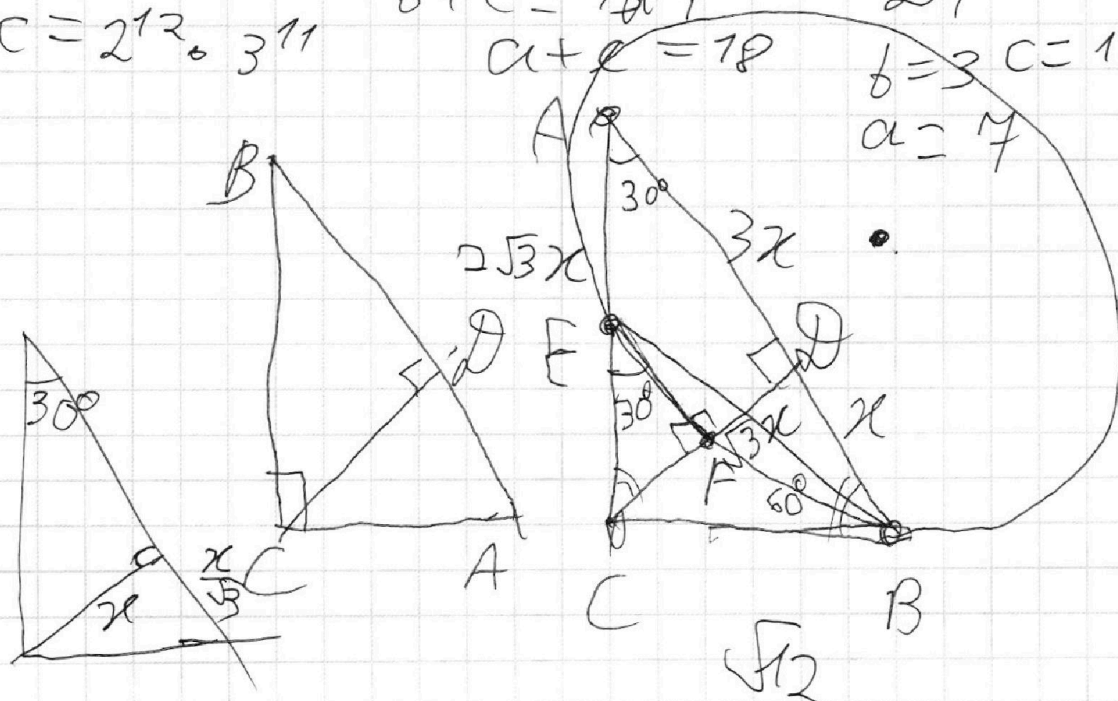
$$24$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11}$$

$$a + c = 18$$

$$b = 3 \quad c = 11$$

$$a = 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$$D = 12n^2 + 24\sqrt{3}n + 36 - 48 =$$

$$= 12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1)$$~~

~~$$x = \frac{6 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1)}}{2} \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{-6 \pm \sqrt{12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1)} + 6\sqrt{3} + 46}{24} =$$~~

~~$$= \sqrt{n^2 + 2\sqrt{3}n} + \sqrt{3} + 1$$~~

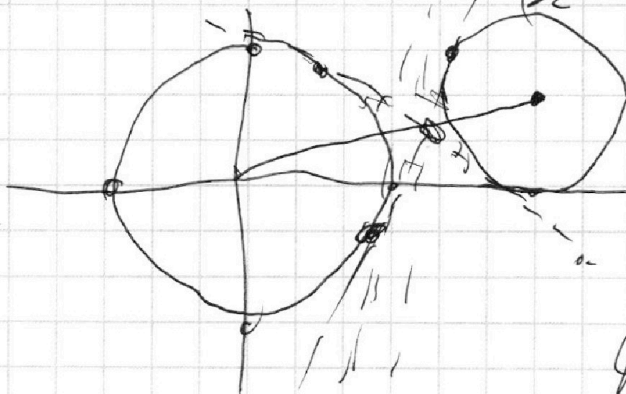
$$\sin x = \sqrt{\cos}$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 3x$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$



$$5 \arcsin(\cos x) = x \frac{11\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$y = \frac{a}{2}x + \frac{36}{2}$$

$$(-11, 12) \quad 20 \quad (6, 42)$$

$$x_1 y_1$$

$$3x_1 - y_1 = 33 + 3x_2 - y_2$$

$$1 -$$

$$\sin x = t$$

$$\textcircled{2}$$

$$t = \arcsin x$$

$$\arcsin t = x$$

$$(0, 0) \quad (20, 0)$$

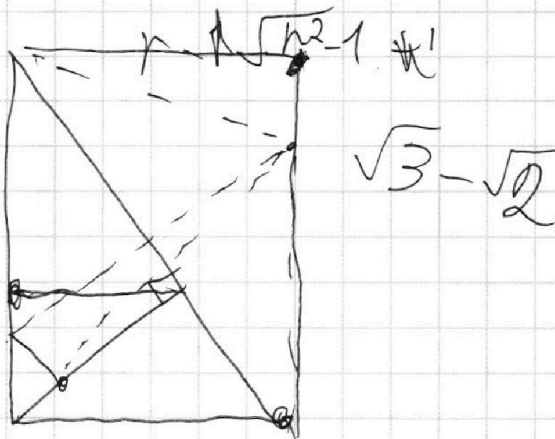
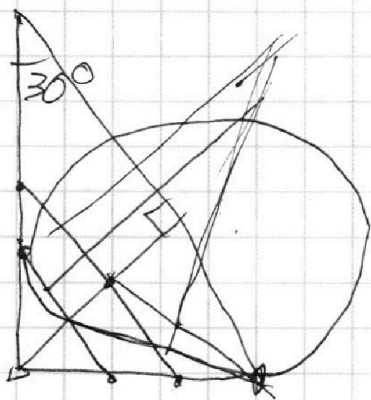
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

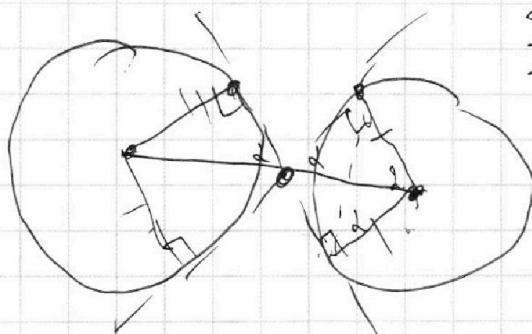


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_1 - y_1 = 0$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$3\pi = 4x$$

$$424$$

$$14$$

$$\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{x}{4}$$