



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

$X = a_2 + b_2 + c_2 + k$, $Y = a_3 + b_3 + c_3 + l$; $Z = a_5 + b_5 + c_5 + m$; $abc = 2^X \cdot 3^Y \cdot 5^Z \Rightarrow$

$\Rightarrow X, Y, Z \rightarrow \min$, в идеальном случае $k, l, m = 0$. Рассмотрим этот случай:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 14 \\ a_5 + b_5 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases} \quad \{a_2; a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5\} \in \mathbb{N}_0$$

$$\{X; Y; Z\} \in \mathbb{N}$$

$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 34 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min X = 17$. При $a_2 = 5$ $b_2 = 3$ $c_2 = 9$ $X = 17$ достигается

$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21 = 34 + 21 = 55$

$a_3 + b_3 + c_3 = 27,5 \Rightarrow \min Y = 28$

При $a_3 = 8$ $b_3 = 6$ $c_3 = 14$ $Y = 28$

$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 12 + 56 = 68$; $a_5 + b_5 + c_5 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_{\min} = 34$. Вводя систему (3), получаем: $c_5 = 22$ $a_5 = 17$ $b_5 = -5$ не уга.

Решение ~~$b_5 + c_5 = 17 + 12 = 29$~~ ~~$a_5 + b_5 = 12 + 17 = 29$~~ ~~$a_5 + c_5 = 39$~~

Минимальное допустимое $b_5 = 0$.

Тогда $a_5 = 12$, $c_5 = 27 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow Z = 39$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$ $b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$ $Z = 39$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

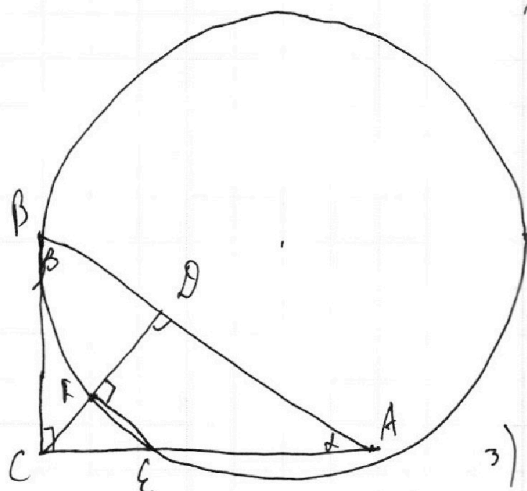
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2



$AB \parallel EF, \frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

1) Пусть $AD = 5x, BD = 2x$.

$CD^2 = BD \cdot AD, CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$

2) Так как $AB \parallel EF$, то $\angle EFD + \angle FDA = \pi$
 $\angle EFD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

3) Из $\triangle BCD$: $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$

4) Из $\triangle CDA$: $AC = \sqrt{DC^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$

5) Пусть $\angle CAB = \alpha, \angle CBA = \beta$. $\beta + \alpha = 90^\circ$; $\angle BCD = \alpha$; $\angle DCA = \beta$; $\angle FEC = \alpha$.
 $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ ($\angle F = \angle D = 90^\circ$ и $\angle C$ - общий); $\triangle CDA \sim \triangle BCA$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & ① \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h & ② \end{cases} \{k, h\} \in \mathbb{Z}$

① $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$

~~$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$~~

$8x = 4\pi - 20\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$

② $\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h$

$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi h$

$12x = -4\pi - 20\pi h$

$x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi h$

по ①: $-5 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \leq 5 + \frac{\pi}{2}$

$-10 \leq -5\pi k \leq 10$

$-2 \leq \pi k \leq 2$

$-\frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{2}{\pi}$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то только $k=0$

уг. $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

по ②: $-5 + \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi h}{3} \leq 5 + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5\pi h}{3} \leq 5 + \frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi h \leq 3 + \frac{\pi}{2}$

$-3 - \frac{\pi}{2} \leq \pi h \leq 3 - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$

$\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < 1$

$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -2$

$\frac{3}{\pi} < \frac{3}{2} \Rightarrow h \neq 1$ не уг.

$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2}$

~~$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -1$~~

$h \neq -2$ не уг. ~~$h = -1$~~ $h = -1$ уг.

$\begin{cases} h = 0 \text{ уг.} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№4. } \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

~~Второе~~ Второе уравнение системы равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \textcircled{1} \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

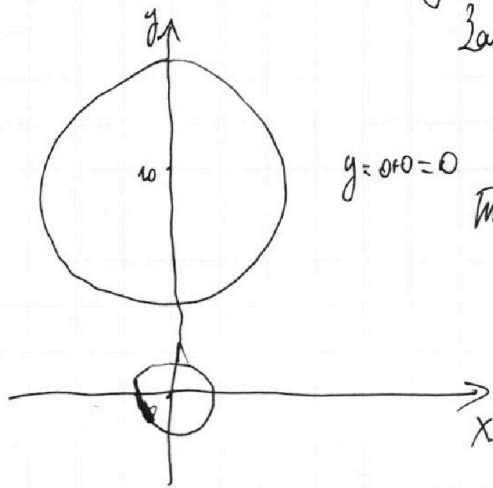
График $\textcircled{1}$ - окружность с ~~центром~~ центром $(0; 0)$ и радиусом 1;
график $\textcircled{2}$ - окр. с центром в точке $(0; 10)$ и радиусом 6.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

Запишем $\frac{a}{3} = t$; $\frac{4}{3}b = v$; $\Rightarrow y = tx + v$

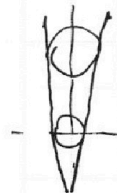


$y = 0 \Rightarrow 0 = 0$ При $a = 0$: ~~невозможно~~, возьмем $b = 0$.
Тогда система имеет 4 реш. $\Rightarrow a = 0$ - уд.

При больших по модулю a , очевидно, найдется b , чтобы система имела 4 реш.

Рассмотрим случай, когда прямая касается одной окружности, а с другой имеет 2 точки пересечения. Тогда ~~при изменении~~ при сдвиге прямой (при изменении v) гарантированно будет случай, когда система имеет 4 реш.

Рассмотрим случай, когда прямая явл. касательной к обеим окр.
Случай 1. касание всегда



- очевидно что при сдвиге прямой вверх будет 4 реш. \Rightarrow не интересует

Случай 2. касание всегда



В таком случае как бы мы ни меняли v , будет максимум 2 реш.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Каждая точка касания вида 2:

$$x^2 + (t x + v)^2 = 1 \quad - \text{кас. к нижней } \omega$$

$$(t^2 + 1)x^2 + 2tx + v^2 - 1 = 0$$

$$D = 0: 4t^2v^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 1) = 0$$

$$t^2 - v^2 = 1$$

$$\begin{cases} t^2 - v^2 = 1 \rightarrow t^2 = v^2 + 1 \\ 36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0 \end{cases}$$

$$36(v^2 + 1) - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$7v^2 + 4v - 20 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 140 = 144$$

касание верхней ω

$$x^2 + (t x + v - 10)^2 = 36$$

$$x^2 + t^2 x^2 + v^2 + 100 + 2tx - 20t x - 20v - 36 = 0$$

$$(t^2 + 1)x^2 - (20t - 2t)v x + v^2 - 20t + 64 = 0$$

$$D = 0: (10t - tv)^2 - (t^2 + 1)(v^2 - 20t + 64) = 0$$

$$100t^2 + t^2 v^2 - 20t^2 v - tv^2 + 20t^2 v - 64t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$v = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{7} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ \frac{10}{7} \end{array} ; \begin{array}{l} \pm \sqrt{3} \\ \pm \frac{\sqrt{51}}{7} \end{array} \right]$$

Кругом заметить, что нас интересует прямая с меньшим по-
длиннее тангенсом ω наклона, то есть меньший по модулю t :

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$7\sqrt{3} > \sqrt{51} \Rightarrow$$

$$t = \pm \sqrt{3} - \text{касание вида 1}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7} - \text{касание вида 2.}$$

$$\frac{a}{3} = t \Rightarrow a = 3t = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Итак, } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right) \in \text{Ответ.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

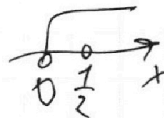
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[5]{\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5} = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \log(2x)^3 \cdot 5^4 = 0$$

⊗ $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$



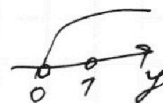
На ⊗: $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \frac{4}{3 \cdot \log_5 2x} = 0; \log_5(2x) = t$

ⓐ $t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 0.2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_5 y} + 3 = 0$$

⊗ $y > 0, y \neq 1$



$\log_5 y = b$

ⓑ $b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0$

ⓐ+ⓑ: $t^5 + b^5 + 3t + 3b + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} = 0$

$t^5 + b^5 + 3(t+b) = 0$

$t^5 + b^5 = -(b+t)(b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4)$

$(b+t)(b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4 + 3) = 0$

~~$b+t=0$~~ $\Rightarrow b+t=0: \log_5(2x) + \log_5(y) = 0; \log_5(2xy) = 0$

$2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

$b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4 + 3 = 0$

$(b^2 + t^2)^2 - bt(b^2 + t^2 + bt) + 3 = 0$

~~$b+t=0$~~

~~$b^2 + t^2 + 3 = 0$~~ Посмотрим на ⓐ: очевидно что при отрицательных t нет решений (и при $t=0$) $\Rightarrow t > 0$.

Посмотрим на б: очевидно, что ~~корни~~ нет неотрицательных корней $\Rightarrow b < 0$

$(b^2 + t^2)^2 - bt \left((b + \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4} \right) + 3 = 0$

$\underbrace{0 \oplus}_{\oplus > 0} \underbrace{\oplus}_{(т.к. bt < 0)}$

ⓐ + ⓑ + 3 = 0 - невозможно \Rightarrow единственный ответ $xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

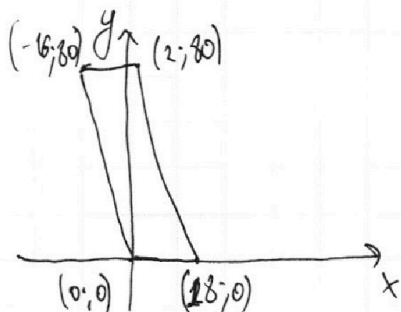
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

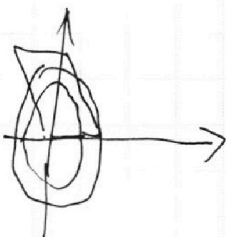


$$y_2 + 5x_2 - (y_1 + 5x_1) = 45$$
$$y_2 - y_1 + 5(x_2 - x_1) = 45$$

Дадим каждой точке номер,
который численно равен сумме

абсциссы, умноженной на 5, и ординате. Точки, у которых
номер отличается на 45, будут удовлетворять.

Точки с одинаковым номером будут образовывать эллипс на
каждой координатной плоскости



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

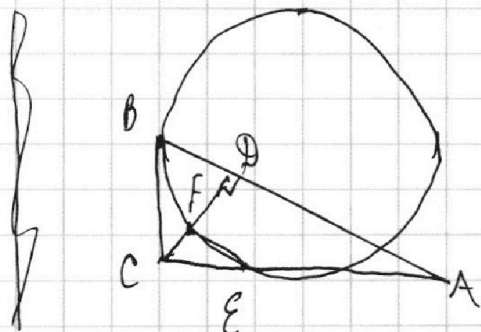
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB и EF

$$\frac{AD}{BS} = \frac{5x}{2x}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$



$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$$

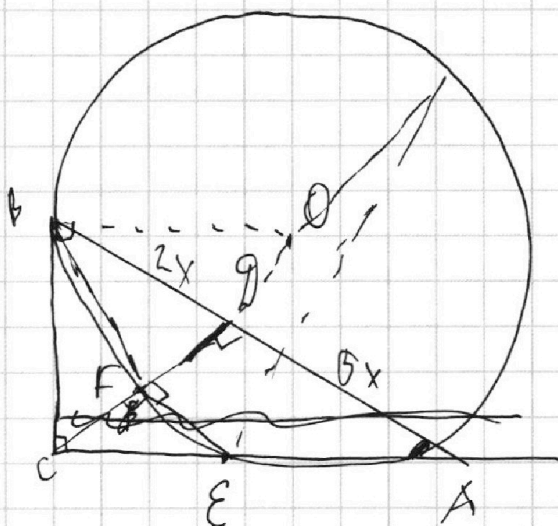
$$\triangle CFE \sim \triangle CBA$$

$$\triangle CFE \sim \triangle CBA$$

$$BC = \sqrt{4x^2 + 16x^2} = \sqrt{20}x$$

$$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$$

~~$$CF = y, EF = \sqrt{10}x - y$$~~



$$(b+t)(b^2 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4) = b^5 + t^5$$

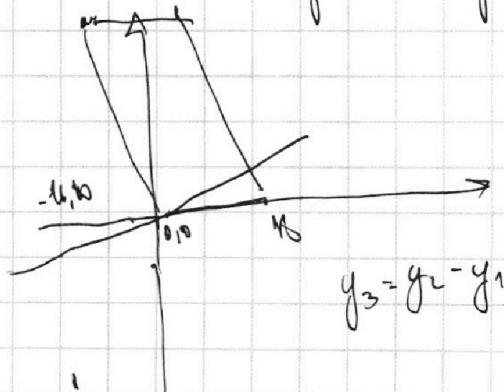
$$\begin{array}{r} t^5 - t^4 \\ - (5bt^4) \\ \hline -bt^4 - t^4 \\ -bt^3 - b^2t^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +b^2t^3 - t^4 \\ -b^2t^3 + b^3t^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -b^3t^2 + t^4 \\ -b^3t^2 + b^4t \\ \hline -b^4t - t^4 \end{array}$$

$$CF = y, EF = \sqrt{10}x - y$$

$$y_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} - (y_1 + 5x_1) = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

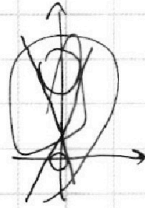
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

случай 2: касание всегда



Пусть прямая касается одной окр., а с другой имеет 2 т. пер.
Тогда очевидно, что, изменив b , можно так, чтобы с первой окр. было 2 т. пер., а с второй остав. 2 т.

случай 3: касание всегда



или изменив b , ~~для~~ если с какой-то b будет 2 т. пер., то с другой будет 0 т. пер. Найдем эти крит. точки

касание в x с ~~вершиной~~ ω :

Заметим $\frac{a}{3} = t, \frac{4b}{3} = v$

$$x^2 + (tx + v)^2 = 1$$
$$(t^2 + 1)x^2 + 2tvx + v^2 - 1 = 0$$

$$D = 0: 4t^2v^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 1) = 0$$

$$t^2v^2 - t^2v^2 - v^2 + 1 = 0$$

$$t^2v^2 - t^2v^2 + t^2v^2 - v^2 + 1 = 0$$

$$t^2 - v^2 + 1 = 0$$

$$t^2v^2 - t^2v^2 - v^2 + 1 = 0$$

касание ω = вершиной ω : $x^2 + (tx + v - 10)^2 = 36$

$$x^2 + t^2x^2 + v^2 + 100 + 2tvx - 20tx - 20v - 36 = 0$$

$$(t^2 + 1)x^2 + (2t - 20t)v + v^2 - 20v + 64 = 0$$

$$D = 0: (2t - 20t)^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 20v + 64) = 0$$

$$100t^2 + t^2v^2 - 20t^2v - t^2v^2 + 20t^2v - 64t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

~~решение~~

$\frac{\pi - 2x}{10} \in [-1, 1]$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \quad \{k; n\} \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n$

$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$

$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi n$

$8x = 4\pi - 20\pi k$

$12x = 9\pi - 20\pi n$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$

$x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n$

$\odot -1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$

$\uparrow \frac{\pi}{2} - 5 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{\pi}{2} + 5$

$-10 \leq \pi - 2x \leq 10$

$-9 \leq -\frac{5}{2}\pi k \leq 9$

$\pi - 10 \leq 2x \leq \pi + 10$

$-2 \leq \pi k \leq 2$

$-\frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{2}{\pi}$

$\frac{\pi}{2} - 5 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 5$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\pi}{2} - 5 \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 5$

$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5}{3}\pi n \leq \frac{5\pi}{6} + 5$

$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 3$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 1 \text{ не уга}$

$-\frac{\pi}{2} + 3 \leq \pi n \leq 3 - \frac{\pi}{2}$

$\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \leq n \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} < -1$

$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2} \Rightarrow -1 \text{ не уга}$

$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$

$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{2\pi}{3}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - \text{верно}$

$0 \neq 0 - \text{верно}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

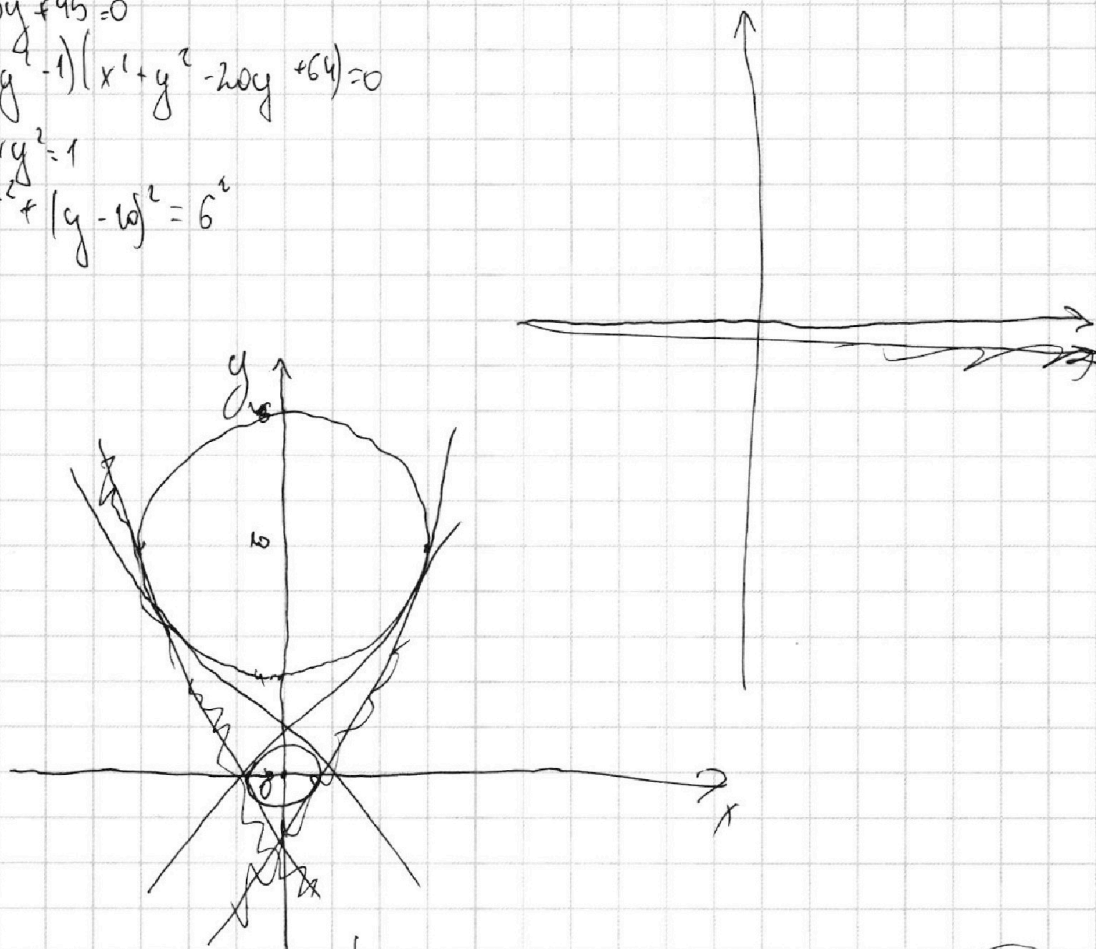
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 6y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 6^2 \end{cases}$$

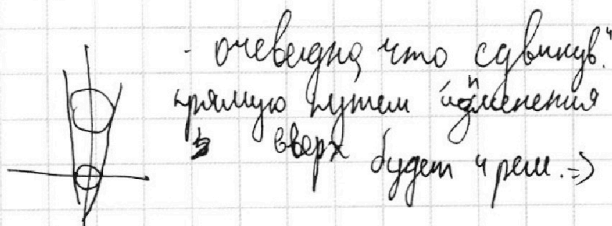


$a=0$: при, например, $b=0$, система имеет 4 реши \Rightarrow $a=0$ $y=0$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

при $(a \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow -\infty)$ очевидно, найдется b , чтобы все больших по модулю a , система имела 4 реши.

Необходимо высчитать критические точки - точки касания
случай 1: касание в вершине



\Rightarrow не пересекает

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$\begin{cases} 36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0 \\ t^2 - v^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad v^2 = t^2 + 1$$

~~$t^2 = v^2 - 1$~~ (По рисунку $v > 0 \Rightarrow v = \sqrt{t^2 + 1}$)

~~из~~

меняем лишь знак перед a) (Рассмотрим случаи $t > 0$. При $t < 0$ аналогично.)

$$36(v^2 - 1) - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$35v^2 + 20v - 70 = 0$$

$$7v^2 + 4v - 14 = 0$$

$$D = 4 + 140 = 144; \quad v = \frac{-2 \pm 12}{7} = \begin{cases} -2 \\ \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$t^2 = v^2 - 1$$

$$v = -2: \quad t^2 = 4 - 1 = 3$$

$$t = \pm \sqrt{3}$$

$$v = \frac{10}{7}: \quad t^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

из пол.

нас интересует только t , при ком. ^{модуль} тангенса максимума касательной кривой меньше $\Rightarrow \frac{a}{3} = t$;

$$\Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$7\sqrt{3} > \sqrt{51}$$

$$-7\sqrt{3} < -\sqrt{51}$$

$$a = 3t = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7};$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н1 $a = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5}$ $b = 2^{b_2} 3^{b_3} 5^{b_5}$ $c = 2^{c_2} 3^{c_3} 5^{c_5}$

~~$X = a_2 + b_2 + c_2$~~ $\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 14 \\ a_5 + b_5 = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$

~~$Z = a_3 + b_3 + c_3$~~ $(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 20 + 14 = 34$
 $a_2 + b_2 + c_2 = 17$

$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21$

$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 17 + 17 + 39 = 12 + 56 = 68$

$a_5 + b_5 + c_5 = 34$ $a_3 + b_3 + c_3 = \frac{55}{2} \notin \mathbb{N}$

И.к. $X = a_2 + b_2 + c_2 = 17 \in \mathbb{N}$ и $Z = a_5 + b_5 + c_5 = 39 \in \mathbb{N}$ то \min

$X = 17$, $\min Z = 39$. Заметим, что $a_3 + b_3 + c_3 = \frac{55}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$

\Rightarrow , так как $X \in \mathbb{N}$, то $\min Y = 18$. Осталось только проверить

Пример. $a_2 = 5$ $b_2 = 3$ $c_2 = 9$ $(X = 17)$
 $a_5 = 14$ $c_5 = 22$ $a = 14$ $b = 5$ по уп.

~~$a_3 = 15$ $b_3 = 13$ $a_5 + c_5 = 22$ $a_3 + b_3 = 2$ $a_3 = 8$ $b_3 = 0$ $c_5 = 14$~~
 $(Y = 28)$

Z : $a_5 - a_3 = 5$ $a_5 + c_5 = 39$ $\text{Всегда взять } \min b_5 \Rightarrow b_5 = 0$; тогда $Z = 39$

$a_5 = 14$, $c_5 = 27$ $a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$ $b = 2^3 \cdot 3^8 \cdot 5^0$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{20} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(b+f)(y(b^3-b^2f+b^2f^2-bf^3+f^4)+3) = 0$$

$$b = -f: \log_5 y = -\log_5(2x) \Rightarrow y = \frac{1}{2x} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$(b^3+f^3)^2 - bf(b^2+f^2) + 3 = 0$$

$$z^2 - bfz - 3 = 0 \quad D = b^2f^2 + 12$$

$$z = \frac{bf \pm \sqrt{b^2f^2 + 12}}{2}$$

$$\oplus: b^3+f^3 = \frac{bf + \sqrt{b^2f^2 + 12}}{2}$$

$$2b^3+2f^3 - bf = \sqrt{b^2f^2 + 12}$$

$$16b^4+16f^4 + b^2f^2 + 8b^2f^2 - 4b^3f - 4bf^3 = b^2f^2 + 12$$

$$b^4+f^4 + 2b^2f^2 - bf(b^2+f^2)$$

$$\sqrt{(b^2+f^2)^2 - (b^2+f^2)(b^2+f^2)} - 6 = 0$$

$$b^2+f^2 = n$$

$$2n^2 - n^3 + n^2 - 6 = 0 \quad n^3 - 3n^2 + 6 = 0$$

$$(b^2+f^2)^2 - b^2f^2 - bf(b^2+f^2) - 3 = 0$$

$$(b^2+f^2)^2 - bf(b^2+f^2) - 3 = 0$$

$$b^2f^2 = (b^2+f^2) - b^2$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - x}{2}}$$

$$x^2 - x - 2y^2 = 0$$

$$(b^2+f^2)^2 - bf(b^2+f^2+bf) + 3 = 0$$

$$b^4f^4 = bf = n$$

$$x^2 - y^2 - xy - 3 = 0$$

$$D = y^2 + 4y^2 + n = 5y^2 + n$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2 + n}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 \quad 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \log_{(2x)^3} 5^4 = 0$$

пусть $t = \log_5(2x)$:

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3} \log_{(2x)^3} 5 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3 \log_5(2x)} = 0 \quad \log_5(2x) = t$$

$$t^5 - 3 + 3t - \frac{4}{3} = 0 \quad 3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$3 \log_{2x} 5 + \log_{2x} 625 = \frac{3}{\log_5 2x} + \frac{4}{3 \log_5 2x} = \frac{13}{3 \log_5 2x}$$

$$\log_{2x}^4 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 \log_{2x} 5 - 3 \quad \frac{1}{\log_{2x}^4 5} = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$13 \sqrt[4]{5} - 3 \sqrt[4]{5} - 1 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5 0,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 5 - 3 \quad \log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + 3 = 0 \quad \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_5 y} = \frac{13}{3 \log_5 y}$$

$$3b^5 + 13 \quad 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$3(b^5 + t^5) + 9(b + t) = 0$$

$$-t^5 + bt$$

$$\begin{array}{r}
 3b^5 + 13 \\
 - (b^5 + t^5) \\
 \hline
 -b^5 + 13 \\
 - (b^4 + bt^4) \\
 \hline
 -b^5 + 13 - b^4 - bt^4 \\
 - (b^3 + t^3) \\
 \hline
 -b^5 + 13 - b^4 - bt^4 - b^3 - t^3 \\
 - (b^2 + t^2) \\
 \hline
 -b^5 + 13 - b^4 - bt^4 - b^3 - t^3 - b^2 - t^2 \\
 - (b + t) \\
 \hline
 -b^5 + 13 - b^4 - bt^4 - b^3 - t^3 - b^2 - t^2 - b - t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -b^5 + t^5 \quad | \quad b + t \\
 - (b^5 + t^5) \quad | \quad b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1 \\
 \hline
 -b^5 + t^5 \quad | \quad 2b^4 - 2b^3 + 2b^2 - 2b + 2 \\
 - (b^4 + t^4) \quad | \quad 2b^4 - 2b^3 + 2b^2 - 2b + 2 - b^4 - t^4 \\
 \hline
 -b^5 + t^5 \quad | \quad b^4 - 2b^3 + 2b^2 - 2b + 2 - t^4 \\
 - (b^3 + t^3) \quad | \quad b^4 - 2b^3 + 2b^2 - 2b + 2 - t^4 - b^3 - t^3 \\
 \hline
 -b^5 + t^5 \quad | \quad b^4 - 3b^3 + 2b^2 - 2b + 2 - t^4 - t^3 \\
 - (b^2 + t^2) \quad | \quad b^4 - 3b^3 + 2b^2 - 2b + 2 - t^4 - t^3 - b^2 - t^2 \\
 \hline
 -b^5 + t^5 \quad | \quad b^4 - 3b^3 + b^2 - 2b + 2 - t^4 - t^3 - t^2 \\
 - (b + t) \quad | \quad b^4 - 3b^3 + b^2 - 2b + 2 - t^4 - t^3 - t^2 - b - t \\
 \hline
 -b^5 + t^5 \quad | \quad b^4 - 3b^3 + b^2 - 3b + 2 - t^4 - t^3 - t^2 - t
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N 4. } \begin{aligned} \arcsin(\cos x) &= \pi - 2x \\ \arcsin(\cos x) &= \frac{\pi - 2x}{10} \end{aligned}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$x = \frac{20}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & \text{①} \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n & \text{②} \end{cases} \quad \{k, n\} \in \mathbb{Z} \quad \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{① } \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$$

$$8x = 4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$$

$$\text{② } -1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$$

$$-10 \leq \pi - 2x \leq 10$$

$$-10 \leq 2x - \pi \leq 10$$

$$-5 + \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 5$$

$$-\frac{6\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2}$$