МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4 (2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

1. Пусть i_j — степень числа j в разложении на простые множители числа i. Должны соблюдаться условия:

$$\begin{cases} a_2+b_2\geq 8 \\ b_2+c_2\geq 12 \\ a_2+c_2\geq 14 \\ a_3+b_3\geq 14 \\ b_3+c_3\geq 20 \\ a_3+c_3\geq 21 \\ a_5+b_5\geq 12 \\ b_5+c_5\geq 17 \\ a_5+c_5\geq 39 \end{cases}$$

При этом все показатели степеней должны быть минимальны, чтобы была ~~ее~~ минимальна их сумма в ~~на~~результирующем показателе. Если x — искомое число, то $x=2^{a_2+b_2+c_2}\cdot 3^{a_3+b_3+c_3}\cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$ (очевидно, что у минимального числа других простых множителей в разложении нет). Для степеней 2 и 3 выполняются равенства, т.е. значения минимальны: $a_2=5$, $b_2=3$, $c_2=9$, $a_3=7$, $b_3=6$, $c_3=14$. Для 5 миним. значение $a_5+b_5+c_5=39$ ~~(при b_5)=0~~ (при $b_5=0$), тогда существуют a_5 и c_5 такие, что $a_5\geq 12$, $b_5\geq 17$ (пример: $a_5=19$, $b_5=0$, $c_5=20$). ~~Ко~~ Подставим ~~вправо~~ значения миним. сумм $a_j+b_j+c_j$ ($j\in\{2;3;5\}$) в выражение для x:

$x=2^{5+3+9}\cdot 3^{7+6+14}\cdot 5^{39}=2^{17}\cdot 3^{27}\cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{27}\cdot 5^{39}$

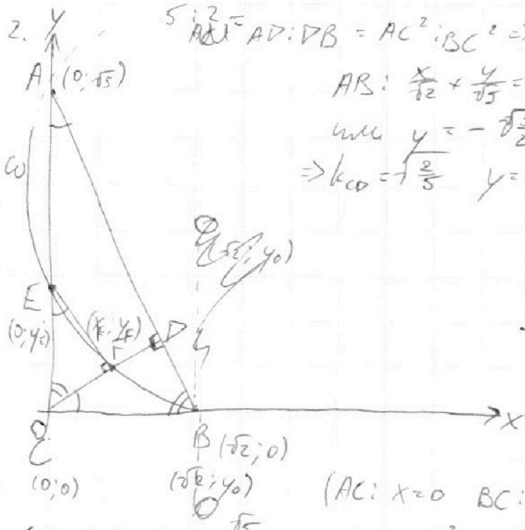
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2. $\overset{5:2}{\cancel{AD}} = AD:DB = AC^2:BC^2 \Rightarrow AC:BC = \sqrt5:\sqrt2$ Введём ДСК



$AB: \frac{x}{\sqrt2} + \frac{y}{\sqrt5} = 1 \quad \sqrt5 x + \sqrt2 y - \sqrt{10} = 0$

или $y = -\sqrt{\frac52} + \sqrt{10} \quad k_{AB} = -\sqrt{\frac52} \quad AB \perp CD \Rightarrow k_{AB} k_{CD} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_{CD} = \sqrt{\frac25} \quad y = \frac{\sqrt2}{\sqrt5}x$ (т.к. $C \in CD$) $CD: \sqrt2 x - \sqrt5 y = 0$

$$\begin{cases} EF \parallel AB \\ B, E, F \subset \omega \\ E \in AC \\ F \in CD \end{cases} \quad \begin{cases} \{x_F; y_F - y_E\} = k\{-\sqrt5; \sqrt2\} & (1) \\ y_0 = \sqrt{(x_F-\sqrt2)^2 + (y_F - y_0)^2} & (2) \\ y_0 = \sqrt{2 + (y_E - y_0)^2} & (3) \\ \sqrt2 x_F + \sqrt5 y_F = 0 & (4) \end{cases}$$

$(AC: x = 0 \quad BC: y = 0)$ $\cancel{(2) \text{ и } (3): (x_F - \sqrt2)^2 + (y_F - y_0)^2 = 2 + (y_E - y_0)^2}$

$\cancel{(4): x_F = \frac{\sqrt5}{\sqrt2} y_F \quad (2): y_0^2 = (\frac{\sqrt5}{\sqrt2} y_F - \sqrt2)^2 + (y_F - y_0)^2}$

$\cancel{y_0^2 = \frac52 y_F^2 - 2\sqrt5 y_F + 2 + y_F^2 - 2y_F y_0 + y_0^2} \quad \cancel{2y_F y_0 = \frac72 y_F^2 - 2\sqrt5 y_F + 2}$

$\cancel{y_0 = \frac{\frac74 y_F^2 - \sqrt5 y_F + 1}{y_F}} \quad \cancel{(3): \left(\frac{\frac74 y_F^2 - \sqrt5 y_F + 1}{y_F}\right)^2 = 2 + y_E^2 - 2y_E \cdot \left(\frac{\frac74 y_E^2 - \sqrt5 y_E + 1}{y_F}\right) +}$

$\cancel{+ \left(\frac{\frac74 y_F^2 - \sqrt5 y_F + 1}{y_F}\right)^2} \quad y_E^2 \quad (3): \cancel{y_0^2} = 2 + y_E^2 - 2y_E y_0 + \cancel{y_0^2} \quad y_E^2 - 2y_0 y_E + 2 = 0$

$\frac{D}{4} = y_0^2 - 2 \quad y_E = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 2}$

$(4): x_F = -\sqrt{\frac52} y_F \quad (2): \cancel{y_0^2} = \frac52 y_F^2 + 2\sqrt5 y_F + 2 + y_F^2 - 2y_0 y_F + \cancel{y_0^2}$

$\frac72 y_F^2 + 2(\sqrt5 - y_0) y_F + 2 = 0 \quad \cancel{y_F^2 + \frac47(\sqrt5 - y_0) + \frac47 = 0 \quad D}$

$7y_F^2 + 4(\sqrt5 - y_0) y_F + 4 = 0 \quad \frac{D}{4} = (2\sqrt5 - 2y_0)^2 - 28 = 50 - 8\sqrt5 y_0 + 4y_0^2 - 28 = 4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + 22$

$y_F = \frac{2(y_0 - \sqrt5) + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + 22}}{7} \quad (1): -\sqrt5 x_F + \sqrt2(y_F - y_E) = 0$

$\frac{5}{\sqrt2} y_F + \sqrt2 y_F - \sqrt2 y_E = 0 \quad 5y_F + 2y_F - 2y_E = 0 \quad 7y_F = 2y_E$

$\cancel{2}(y_0 - \sqrt5) + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + 22} = \cancel{2y_0} + 2\sqrt{y_0^2 - 2} \quad -2\sqrt5 + \sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + 22} = 2\sqrt{y_0^2 - 2}$

$\sqrt{4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + 22} = 2\sqrt{y_0^2 - 2} + 2\sqrt5 \;\|^2 \quad 4y_0^2 - 8\sqrt5 y_0 + \cancel{22} = 4(y_0^2 - 2) + \overset{+28}{\cancel{50}} + 8\sqrt{5y_0^2 - 10}$

$\cancel{4y_0^2} - 8\sqrt5 y_0 = \cancel{4y_0^2} + 20 + 8\sqrt{5y_0^2 - 10} \quad 8\sqrt{5y_0^2 - 10} = -8\sqrt5 y_0 - 20 \;\|^2$

$64(5y_0^2 - 10) =$

3. $10\arcsin(\cos x)=\pi-2x \qquad \arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}$ $\begin{cases} \cos x\in[-1;1] \text{ — всегда верно } (\forall x) \\ \frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ \cos x=\sin(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ \cos x=\sin(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}) \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{2}-x\in[-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}] \\ \cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{5}) \end{cases} \begin{cases} -x\in[-3\pi;2\pi] \\ \cos x=\cos(\frac{2\pi}{5}+\frac{x}{5}) \end{cases}$

$\begin{cases} x\in[-2\pi;3\pi] \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{5}+\frac{x}{5}+2\pi k \\ x=\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{5}+2\pi l \end{array}\right. \end{cases} k,l\in\mathbb{Z} \begin{cases} x\in[-2\pi;3\pi] \\ \left[\begin{array}{l} \frac{4x}{5}=\frac{2\pi}{5}+2\pi k \\ \frac{6x}{5}=-\frac{2\pi}{5}+2\pi l \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x\in[-2\pi;3\pi] \\ \left[\begin{array}{l} 4x=2\pi+10\pi k \\ 6x=-2\pi+10\pi l \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x\in[-2\pi;3\pi] \\ \left[\begin{array}{l} 2x=\pi+5\pi k \\ 3x=-\pi+5\pi l \end{array}\right. \end{cases}$

Отбор корней: серия 1: $-4\pi\le\pi+5\pi k\le 6\pi \quad -4\le 1+5k\le 6$
$-5\le 5k\le 5 \quad k\in\{-1;0;1\} \quad x\in\{-2\pi;\frac{\pi}{2};3\pi\}$
серия 2: $-6\pi\le-\pi+5\pi l\le 9\pi \quad -6\le-1+5l\le 9 \quad -5\le 5l\le 10 \quad l\in\{-1;0;1;2\}$
$x\in\{-2\pi;-\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3};3\pi\}$ в совокупности: $x\in\{-2\pi;-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};3\pi\}$
Ответ: $-2\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

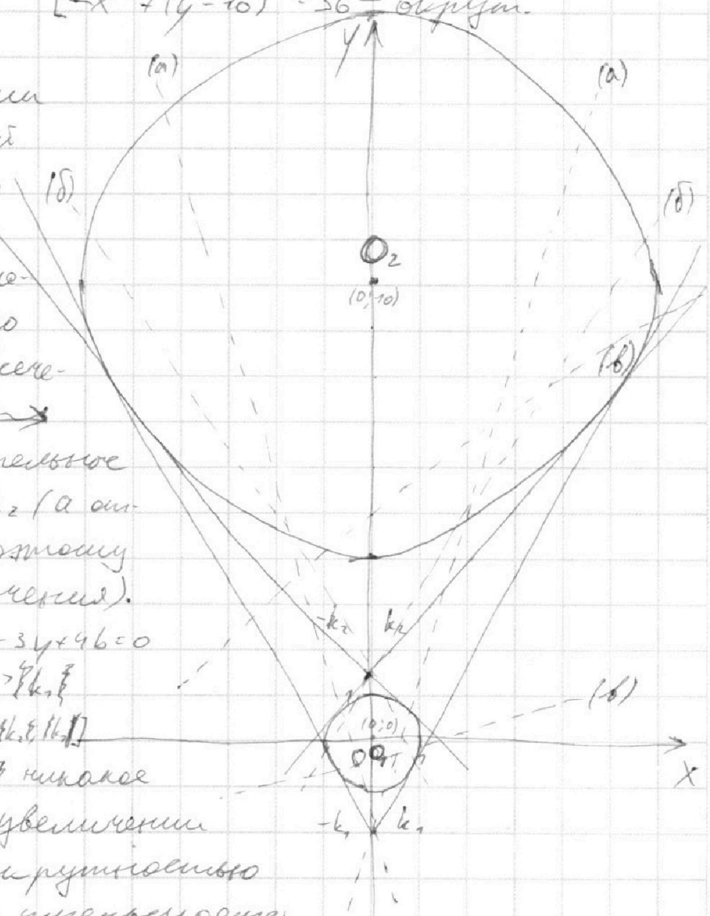
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \ (1) \text{ — ур-е прямой} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \ (2) \end{cases}$

(2): $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+100-36)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \text{ — окруж.} \\ x^2+(y-10)^2=36 \text{ — окруж.} \end{array}\right.$

Надо, чтобы прямая (1) пересекла обе окружности. Если при каком-то положении прямой она касается одной и пересекает другую окр., то её можно сдвинуть (b отвечает за сдвиг прямой) и условия будут выполнены. ~~Надо исключить случаи, когда пересечений с окружностями ≤ 2.~~



У окр. есть 4 общие касательные с коэф. наклона $k_1, -k_1, k_2, -k_2$ (a отвечает за коэф. наклона, поэтому ищем его допустимые значения). Очевидно $|k_1|>|k_2|$. ~~Пусть~~ $ax-3y+4b=0$
$3y=ax+4b \quad y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$. При $\left|\frac{a}{3}\right|>|k_1|$ $\exists$ искомое b (рис. (а)), при $\left|\frac{a}{3}\right|\in[|k_2|;|k_1|]$ $\exists$ искомое b (рис. (б)), при $\left|\frac{a}{3}\right|\leq|k_2|$ никакое b не удовл. условиям, т.к. при увеличении кол-ва пересечений с одной окружностью кол-во пересечений с другой уменьшается, т.к. $k_2, -k_2$ — коэф. наклона общих касательных, у которых окружности лежат по разные стороны от них. (рис. (в)). Найдём ур-я ~~касат~~ общ. касательных: $kx+ly+m=0$ — прямая s

$\begin{cases} \rho(O_1; s)=1 \\ \rho(O_2; s)=6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{|m|}{\sqrt{k^2+l^2}}=1 \\ \frac{|10l+m|}{\sqrt{k^2+l^2}}=6 \end{cases}$

решения: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x+y+1=0 \\ -\sqrt{3}x+y+1=0 \\ \sqrt{51}x+7y-10=0 \\ -\sqrt{51}x+7y-10=0 \end{array}\right.$

(как найти: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=1 \\ 10l=5 \\ k^2+l^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-1 \\ 10l=7 \\ k^2+l^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$, домножить на желаемые коэф.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l} y=\sqrt{3}x-1 \\ y=-\sqrt{3}x-1 \\ y=\frac{\sqrt{51}}{7}x+\frac{10}{7} \\ y=-\frac{\sqrt{51}}{7}x+\frac{10}{7} \end{array}\right.$$

$\sqrt{3} \overset{>}{\vee} \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\quad 3 \overset{>}{\vee} \frac{51}{49} \Rightarrow k_1=3,\ k_2=\frac{\sqrt{51}}{7}$

$\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\quad |a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ $\quad a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. ур-е относительно x: $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

ограничения на x: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$ $\left(\log_{2x^3} 625 = \frac{1}{3}\cdot 4 \log_{2x} 5\right)$

$\log_5(2x) = a$ $\quad a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad \| \cdot a$ $(a \neq 0,$ т.к. $x \neq \frac{1}{2})$

$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a \quad a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0$ $\quad a=0$ не является решением, лишних корней не приобрели

ур-е относительно y: $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$ $\quad$ ограничения: $\begin{cases} y>0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3 \quad \log_5 y = b \quad b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad \| \cdot b$

$(b \neq 0$ т.к. $y \neq 1)$ $\quad b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b \quad b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \quad b=0$ не является решением, лишних корней не приобрели

$\begin{cases} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \quad (1) \\ b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \quad (2) \end{cases}$ ~~(1)+(2): $a^5+b^5+3(a+b)=0=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+3)$~~

~~$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+3=0 \end{array}\right.$~~ ~~(3): Заметим, что если $a^5+3a=\frac{13}{3}$,~~ но

$f_1(a) = a^5 + 3a - \frac{13}{3}$ $\quad f_1'(a) = a^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ монотонно возр. $\Rightarrow$ у ур-я (1) один корень, ан-но $f_2(b) = b^5 + 3b + \frac{13}{3}$ $\quad f_2'(b) = b^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ монотонно возр. $\Rightarrow$ у ур-я (2) один корень. Заметим, что если c – корень (1), то $c^5 + 3c - \frac{13}{3} = 0 \Rightarrow c^5 + 3c = \frac{13}{3} \Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) = -(c^5 + 3c) = -\frac{13}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) + \frac{13}{3} = 0 \Rightarrow -c$ – корень (2) $\Rightarrow$ единственно возможные значения a и b таковы, что $a + b = 0$.

$0 = a + b = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) \quad 0 = \log_5 1 \Rightarrow \log_5(2xy) = \log_5 1$

$2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

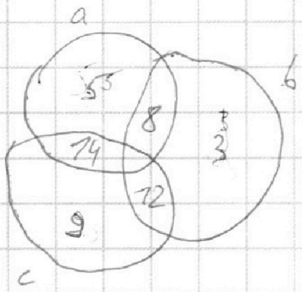
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

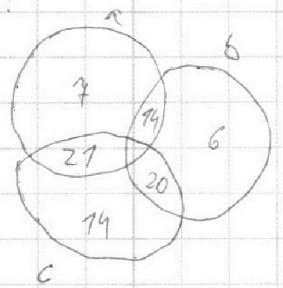
МФТИ

1. $2^{14}3^{27}5^{39}$ ~~b=1 a: 2^8 3^14 5^... c: 2^12 3 5^...~~

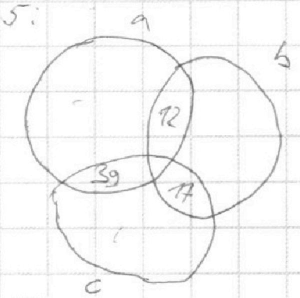
2:



3:



5:



~~$2^{17}3^{27}5^{39}$~~

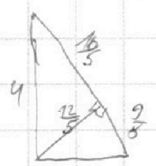
$a=2^5 3^4 5^-$

$b=2^3 3^6 5^-$

$c=2^9 3^{14} 5^-$

$2^{17}\cdot 3^{27}\cdot 5^{39}$

В общем наверное $2^{17}\cdot 3^{27}\cdot 5^{39}$

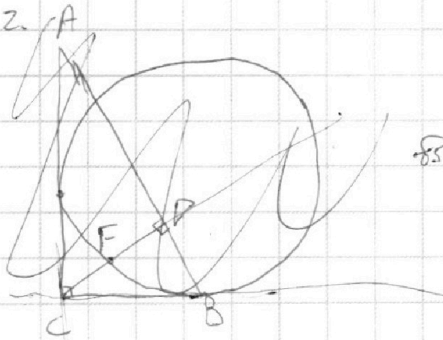


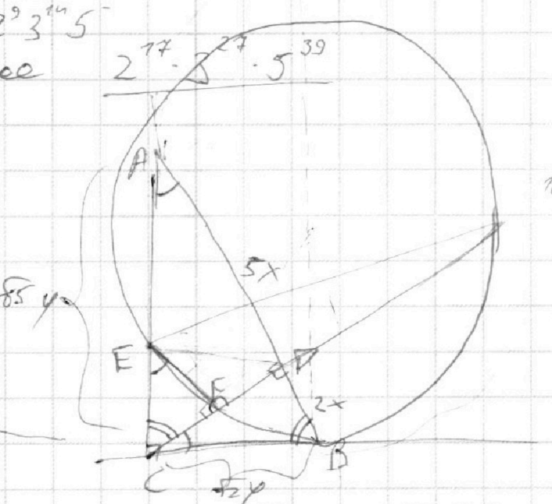
$16-\frac{144}{25}$

$9-\frac{144}{25}=$

$=\frac{225-144}{25}=\frac{81}{25}$

2.





$S_{APC}=\frac{5}{7}S_{ABC}$ надо $EF:AD$, $CF:FD$, $CE:EA$

$\arcsin$

$\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$a=\sin\alpha$

$a\in[-1;1]$

3. $10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$$\begin{cases}\arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10}\\ \frac{\pi-2x}{10}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \quad (1)\\ \cos x=\sin(\frac{\pi-2x}{10}) \quad (2)\end{cases}$$

(1): $\pi-2x\in[-5\pi;5\pi]$

$-2x\in[-6\pi;4\pi]$

$2x\in[-4\pi;6\pi]$

$x\in[-2\pi;3\pi]$

$\frac{5\pi}{10}$

$\cos x=\sin(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5})$ $\quad\cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{5})$ $\quad\cos x=\cos(\frac{2\pi}{5}+\frac{x}{5})$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{4x}{5}=\frac{2\pi}{5}+2\pi k\\ \frac{6x}{5}=-\frac{2\pi}{5}+2\pi k\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}4x=2\pi+10\pi k\\ 6x=-2\pi+10\pi k\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}k\\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}k\end{array} \quad \begin{cases}x=\frac{2\pi}{5}+\frac{x}{5}+2\pi k\\ x=-\frac{2\pi}{5}-\frac{x}{5}+2\pi k\end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $-2 \le \frac{1}{2} + \frac{5}{2}k \le 3$ $\quad -4 \le 1+5k \le 6$ $\quad -5 \le 5k \le 5$ $\quad -1 \le k \le 1$

$k = -1, 0, 1$

$x = -2\pi, \frac{\pi}{2}, 3\pi$

2) $-2 \le -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}k \le 3$ $\quad -6 \le -1+5k \le 9$ $\quad -5 \le 5k \le 10$ $\quad -1 \le k \le 2$

$k = -1, 0, 1, 2$

$x = -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi$

$x = -2\pi, -\frac{\pi}{3}, 2\pi, 3\pi$

-2π ✓ $\quad -\frac{\pi}{3}$ ✓ $\quad \frac{\pi}{2}$ ✓ $\quad \frac{4\pi}{3}$ ✓ $\quad 3\pi$ ✓

$5\pi \quad -\frac{5\pi}{3}$

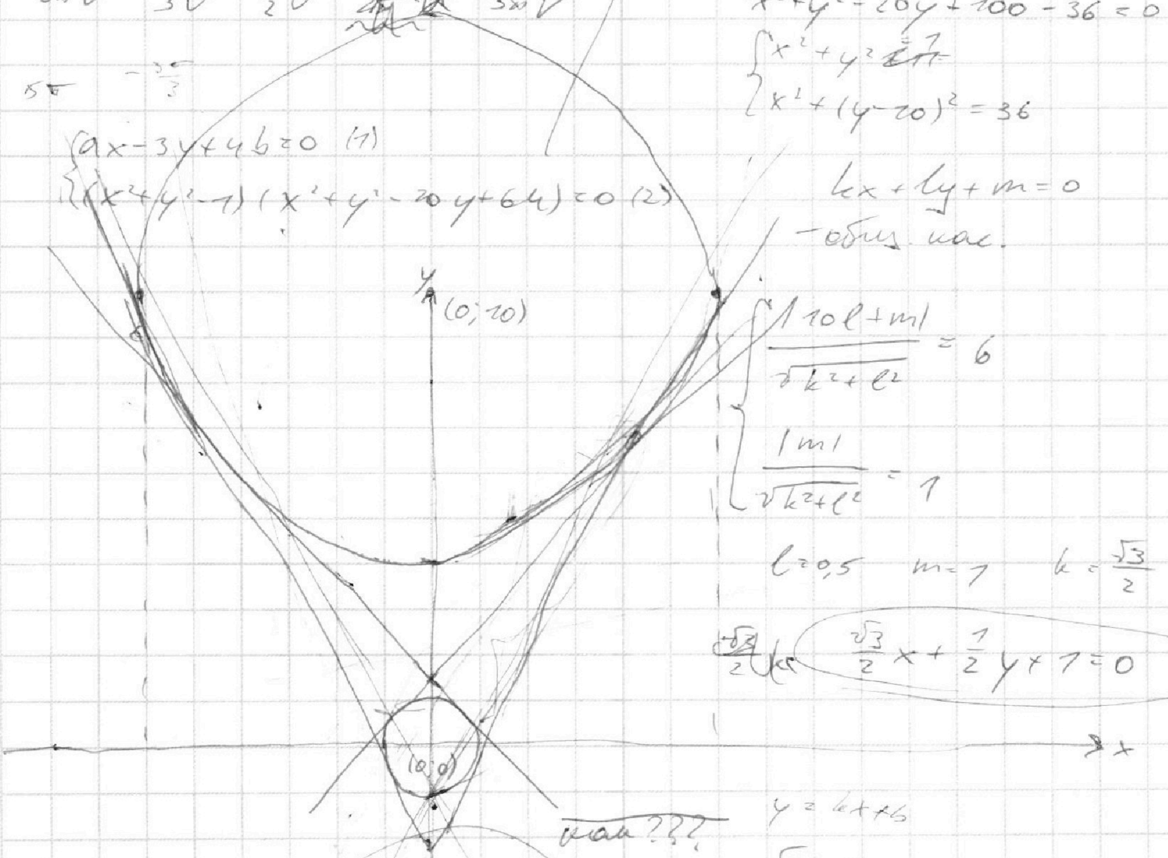
(2): $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+100-36=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{cases}$

$\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2) \end{cases}$

$kx+ly+m=0$

— общ. кас.



$\begin{cases} \frac{|10l+m|}{\sqrt{k^2+l^2}} = 6 \\ \frac{|m|}{\sqrt{k^2+l^2}} = 1 \end{cases}$

$l=0{,}5 \quad m=1 \quad k=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$

кас???

$y = kx+b$

$\sqrt{3}x+y+1=0$ $\quad y=-\sqrt{3}x-2$

$-\sqrt{3}x+y+1=0$ $\quad y=\sqrt{3}x-2$

$\sqrt{3}x-y-1=0$

$-\sqrt{3}x-y-1=0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+1=0$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+1=0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-1=0$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-1=0$

$\frac{\sqrt{51}}{10}x+\frac{7}{10}y-1=0$

$-\frac{\sqrt{51}}{10}x+\frac{7}{10}y-1=0$

$|m|=1 \quad l=\frac{7}{10}$

$m=-1 \quad l=\frac{7}{10}$

$k=\frac{\sqrt{51}}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{51}x + 7y - 10 = 0$ $\quad y = -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

$-\sqrt{51}x + 7y - 10 = 0$ $\quad y = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

$|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$

№1 $\quad 3y = -\frac{3\sqrt{51}}{7}x + \frac{30}{7}$

$3y = \frac{3\sqrt{51}}{7}x + \frac{30}{7}$

а может ли быть
1 решение? нормально

$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

5 (1) $\log_5^4 2x - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$ $\quad \log_{8x^3} 625 = \frac{1}{3}\log_{2x} 5^4 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 =$

$t = \log_5 2x \quad t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$

$t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \quad t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \quad t^5 + 9t - 13 = 0$

$\frac{1}{625 \cdot 5} + \frac{9}{5} = \frac{625 \cdot 9 \cdot 1}{625 \cdot 5}$

$f' = t^4 + 9 > 0$ нет экст. $\Rightarrow$

$\log_5^4 2x - \Rightarrow$ 1 корень между 1 и 2

$\log_5 2x \in [1; 2] \quad 2x \in [5; 25] \quad x \in [2,5; 12,5]$

$\frac{243}{32} + \frac{27}{2} = \frac{243 + 27 \cdot 16}{32}$

$27 \times 16 = 162 + 27 = 432$ $\quad 625 \times 5 = 3125$

$432 : 32 = 13,5$; 32; 112; 96; 16

$1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \qquad 1 \qquad \frac{5}{4}$

$256 \times 45 = 1280 + 1024 = 11520$

$\frac{5}{4} \quad \frac{625 \cdot 5}{1024} + \frac{45}{4} = \frac{625 \cdot 5 + 45 \cdot 256}{1024}$

$11520 + 3125 = 14645$

$\frac{9}{8} \quad 130 \quad 260 \quad 13000 + 260 + 52 = 13312$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$ $\quad \log_5^4 y + 4\frac{4}{\log_5 y} =$ $\quad \begin{cases} y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} =$ $\quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log \quad -\frac{1}{3}$ $\quad \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3$

$f' = t^4 + 9 > 0$

$t^4 + \frac{4}{t} = -\frac{1}{3t} - 3$

$t^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t \qquad t^5 + 3t + \frac{13}{3} = 0 \qquad t^5 + 9t + 13 = 0$

$\begin{cases} t_x^5 + 9t_x - 13 = 0 \\ t_y^5 + 9t_y + 13 = 0 \end{cases} \Big| +$ $\quad t_x \to a \quad a \in [1;2]$ $\quad t_y \to b \quad b\in[-2;-1]$ $\quad \log_5 (2xy)$ $\quad$ возм. $2xy$

~~не x и y~~ $\quad a^5 + 9a + b^5 + 9b = 0$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + (a+b)9 = 0$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 9) = 0$

если $a+b=0$, то $\log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

если $a+b\neq 0$ $\quad a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2+b^2) + 9 =$

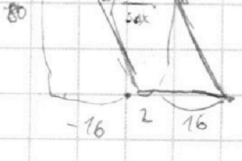
$= (a^2+b^2)^2 - ab(a^2+b^2+ab) + 9 = (a^2+b^2)^2 - ab(a+b)^2 + a^2b^2 + 9$

$+ab$ $\quad 9 \rightarrow ab(a+b)^2$

$xy = \frac{1}{2}$ $\quad [-7;-4] \quad \in[-7;7]$

$-a^2b^2$

6.

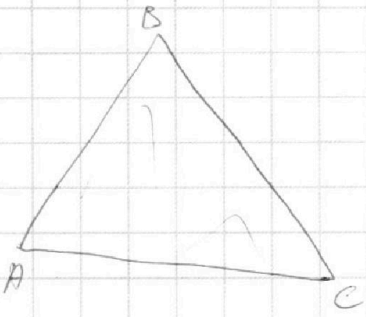


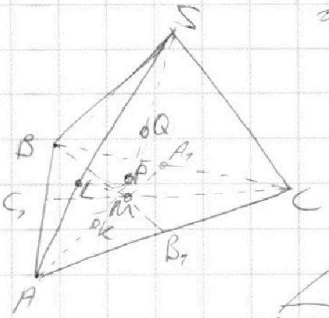
$5ax + 4y = 45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

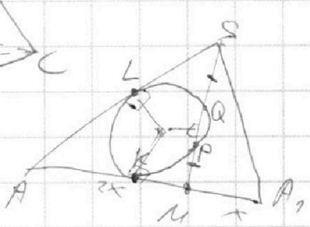
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

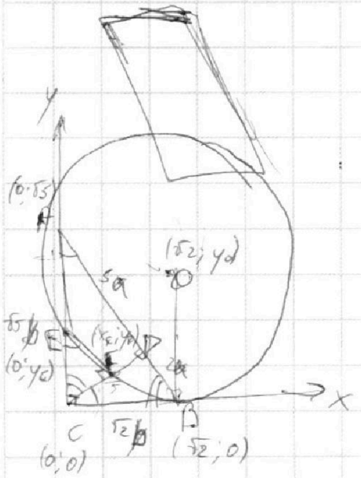




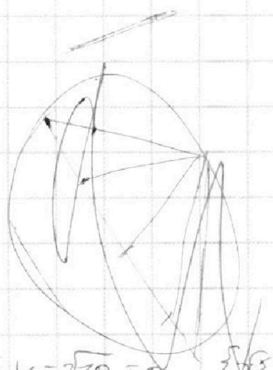
$200 = \frac{2}{3}\cdot 16 \cdot h_A$

$h_A = 2{,}5$





$\frac{25}{2}$



$AB: \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{10}} = 1 \quad \sqrt{5}x + \sqrt{2}y - \sqrt{10} = 0 \quad \{\sqrt{5}; \sqrt{2}; -\sqrt{10}\}$

$CP: \{k; l; m\} \quad \sqrt{5}k + \sqrt{2}l - \sqrt{10}m = 0 \quad k = \sqrt{2},\ l = -\sqrt{5}$

$m = 0 \quad -\sqrt{2}x + \sqrt{5}y = 0$

EF

$x_F \quad y_F \quad y_E \quad y_0$

$\cancel{y_0^2} = 2 + y_E^2 - 2y_E y_0 + \cancel{y_0^2}$

$\sqrt{y_0^2 - 2y_0 y_E + y_E^2 + 2}$