МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot k_1$, $\quad k_1 \not\vdots\ 2,3,5$, $\quad k_1 \in \mathbb{N}, (k_1 \geq 1)$

$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, y_1, z_1 \geq 0)$

$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \cdot k_2$, $\quad k_2 \not\vdots\ 2,3,5$, $\quad k_2 \in \mathbb{N}$

$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$ $(x_2, y_2, z_2 \geq 0)$

$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3} \cdot k_3$, $\quad k_3 \not\vdots\ 2,3,5$, $\quad k_3 \in \mathbb{N}$

$x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{Z}$ $(x_3, y_3, z_3 \geq 0)$

$ab \ \vdots\ 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$k_1 k_2 \cdot 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $\quad (a, b, c \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ y_1 + y_2 \geq 14 \\ z_1 + z_2 \geq 12 \end{cases} \quad (k_1 \text{ и } k_2 \not\vdots\ 2,3,5)$$

$bc \ \vdots\ 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \Rightarrow 2^{x_2+x_3} \cdot 3^{y_2+y_3} \cdot 5^{z_2+z_3} \cdot k_2 k_3 \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 12 \\ y_2 + y_3 \geq 20 \\ z_2 + z_3 \geq 17 \end{cases}$$

Аналогично $ca \ \vdots\ 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow 2^{x_1+x_3} \cdot 3^{y_1+y_3} \cdot 5^{z_1+z_3} \cdot k_3 k_1 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \geq 14 \\ y_1 + y_3 \geq 21 \\ z_1 + z_3 \geq 39 \end{cases}$$

Сложим $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 \geq 14 + 12 + 8 \\ y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_1 \geq 21 + 20 + 14 \\ z_1 + z_2 + z_2 + z_3 + z_3 + z_1 \geq 39 + 17 + 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{55}{2} \\ z_1 + z_2 + z_3 \geq 34 \end{cases} \quad \left(y_1, y_2, y_3 \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z} \Rightarrow (y_1 + y_2 + y_3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{56}{2} = 28 \right)$$

Спрашивается $\min(abc)$.

$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3} \cdot k_1 k_2 k_3 \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{56}{2}} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Минимум достигается при $x_1 = 5$; $x_2 = 3$; $x_3 = 9$; $k_1 = 1$; $k_3 = 1$
по 2^{17} и 3^{28} $\quad y_1 = 8$; $y_2 = 6$; $y_3 = 14$; $k_2 = 1$;

$z_1 =$

Но т.к. $z_1, z_2, z_3 \geq 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 39 \Rightarrow$ степень вхождения 5 в abc хотя бы 39. ~~Дост~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Минимум $z_1+z_2+z_3 \geq 39$ достигается при $z_1=12$, $z_2=0$, $z_3=27$

Тогда $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

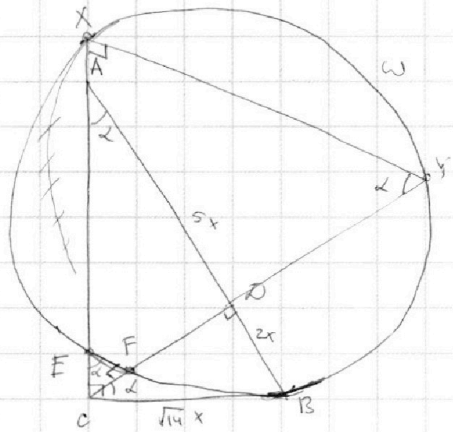
Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$, $EF \parallel AB$

Найти: $\frac{[ABC]}{[CEF]}$ – ?

Решение: Обозначим окр-ть – ω.
$\angle CAB=\alpha$

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF=\angle CAD=\alpha$; $\angle EFC=\angle ADC=90^\circ$

$\angle ECF=90^\circ-\angle CAD=90^\circ-\alpha$

$\Rightarrow \angle DCB=\cancel{90}\ \angle C-(\angle ECF)=90^\circ-90^\circ+\alpha=\alpha$

1). $\triangle CDB \sim \triangle ADC$ ($\triangle ADC$ и $\triangle CDB$ – прямоуг. $\triangle$, $\angle DAC=\angle DCB=\alpha$)

$\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow CD=\sqrt{AD\cdot DB}$

Обозначим $AD=5x \Rightarrow DB=\frac{2}{5}AD=2x \Rightarrow CD=\sqrt{5x\cdot 2x}=\sqrt{10}\,x$

2). по Th. Пифагора для $\triangle CDB$: $CB^2=CD^2+DB^2=10x^2+4x^2=14x^2$

$CB=\sqrt{14}\,x$

По Th. Пифагора для $\triangle ACD$: $AC^2=AD^2+DC^2=25x^2+10x^2=35x^2 \Rightarrow AC=\sqrt{35}\,x$

~~3). по Th. о секущей и кас-й: $CB^2=CE\cdot CA$~~

3). По Th. о секущей и кас-й: $CB^2=CE\cdot CX$, где т. $X=AC\cap\omega$

$CB^2=CF\cdot CY$, где т. $Y=CD\cap\omega$

$\Rightarrow \frac{CE}{CF}\cdot\frac{CX}{CY}=1 \Rightarrow \frac{CE}{CY}=\frac{CF}{CX}$; $\angle XCY$ – общий $\Rightarrow \triangle XCY \sim \cancel{\triangle ECF}$ $\triangle FCE$

$\Rightarrow \angle EFC=\angle YXC=90^\circ$; $\angle XYC=\angle FEC=\alpha$

4). ~~Ес~~ $\triangle ABC \sim \triangle ECF$ ~~$\Rightarrow k$~~ (т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ECF$ – прямоуг $\triangle$ и $\angle CEF=\angle CAB=\alpha$)

$\Rightarrow \frac{[ABC]}{[CEF]}=\frac{CB\cdot AC}{CF\cdot EF}=k^2$ (где $[ABC]$ – площадь $\triangle ABC$, $[CEF]$ – площадь $\triangle CEF$)

где $k=\frac{CB}{CF}=\frac{\cancel{FE}}{\cancel{AB}}=\frac{AB}{EC}=\frac{CA}{EF}$

5).

$\cancel{10}$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2x \ge -5\pi \\ \pi - 2x \le 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3\pi \\ x \ge -2\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3\pi \\ x \ge -2\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \end{array}\right. \end{cases}$$

1). $x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $x \in [-2\pi; 3\pi]$

$-2\pi \le \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le 3\pi$

$-5\pi \le 5\pi k \le 5\pi$

$-1 \le k \le 1$; $k \in \mathbb{Z}$

$k \in \{-1; 0; 1\}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{2}$

$x_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 3\pi$

2). $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x \in [-2\pi; 3\pi]$

$-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \le 3\pi$

$-5\pi \le 5\pi n \le 10\pi$

$-1 \le n \le 2$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \in \{-1; 0; 1; 2\}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = -2\pi$

$x_2 = -\frac{\pi}{3}$

$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$x_4 = -\frac{\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = 3\pi$

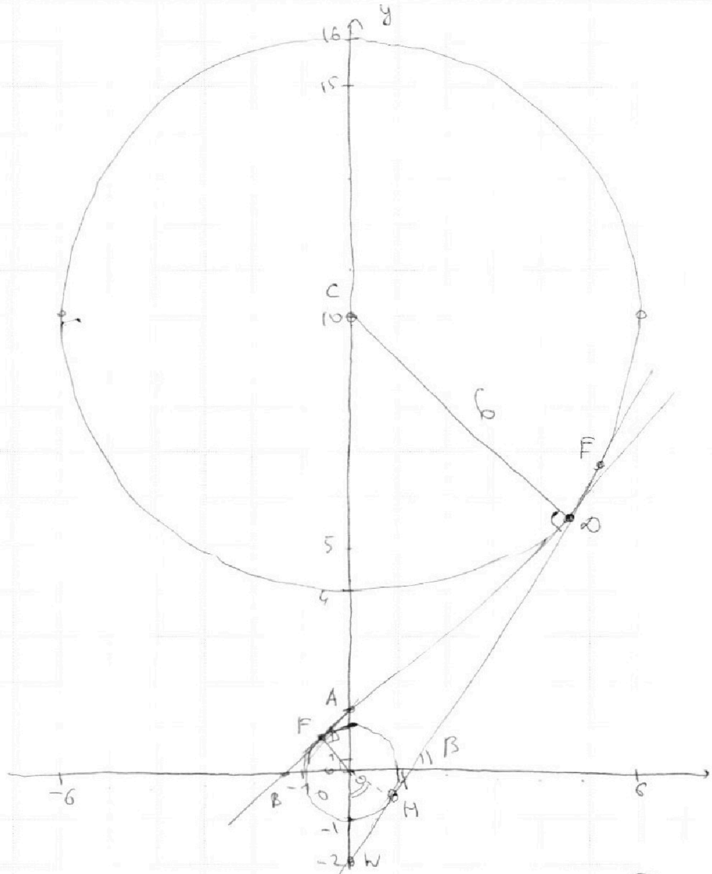
Ответ $x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax+4b}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \end{cases}$$



$\triangle OAF \sim \triangle CAD$

$\frac{OF}{CD} = \frac{OA}{CA}$

$\frac{1}{6} = \frac{\cancel{10}\,OA}{10-OA}$

$OA = \frac{10}{7}$

$\triangle BAO \sim \triangle OAF$

$\frac{OB}{OF} = \frac{OA}{AF}$

$\frac{OB}{1} = \frac{\frac{10}{7}}{AF}$

$OB = \frac{10}{7AF}$

по Th. Пифагора для $\triangle OAF$: $AF^2 = AO^2 - OF^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$ $\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\Rightarrow OB = \frac{10}{7 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$

$tg\,ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

~~1). $\left|\frac{a}{3}\right| \le \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\Rightarrow$ прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ти max 2 раза~~

~~2). $\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\Rightarrow$ $\exists b$: прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ти 4 раза (осуществится $\parallel$ перенос прямой так, что она пересечет 4 раза)~~

Расс-м вторую кас-ю HE : $\triangle OWH \sim \triangle CWE$ $\Rightarrow \frac{OW}{CW} = \frac{OH}{CD} = \frac{1}{6}$ $\quad \frac{OW}{10+OW} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \underline{OW = 2}$

$tg\,\beta = \frac{HW}{OH} = \frac{HW}{1}$. По Th. Пиф-ра для $\triangle OWH$: $HW^2 = OW^2 - OH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow HW = \sqrt{3}$

$\Rightarrow tg\,\beta = \sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Сравним $\cancel{tg}\ \frac{\sqrt{51}}{7}$ и $\cancel{tg}\ \sqrt{3}$

$51 < 49 \cdot 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{51}}{7} < \sqrt{3}$

Значит, уже для $\left|\frac{a}{3}\right| \geq \frac{\sqrt{51}}{7}$ будет возможен $\parallel$ перенос

прямой $y = \frac{a}{3}x + \cancel{\frac{4b}{3}}$ на $\frac{4b}{3}$ так, что она пересечёт окр-ти 4 раза

1). $\left|\frac{a}{3}\right| \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ – max 2 решения (одну из окр-ей прямая не пересечёт)

2). $\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7}$ – $\exists b$: что $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ти 4 раза

тогда $\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right. \qquad a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

1). $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$ ОДЗ: $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ 8x^3>0 \\ 8x^3\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} = \log_{(2x)^3}5^4 - 3$

$\log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} = \dfrac{4}{3\log_5(2x)} - 3$

Замена: $a = \log_5 2x$, $a \neq 0$

$a^4 - \dfrac{3}{a} = \dfrac{4}{3a} - 3$

$a^4 - \left(\dfrac{3}{a} + \dfrac{4}{3a}\right) + 3 = 0$

$a^4 - \dfrac{13}{3a} + 3 = 0$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

Расс-м $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$, $f'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(a)$ - монотонно возрастающая ф-ция $\Rightarrow$ решение $f(a_1) = 0$ единственно и существует

Возвр-е к замене: $\log_5 2x = a_1$

$x = \dfrac{5^{a_1}}{2} > 0$, $\left(\begin{array}{l} x \neq \frac{1}{2} = \frac{5^{a_1}}{2} \Rightarrow a_1 \neq 0 \\ \text{при } a_1 = 0: f(a) = \cancel{3\cdot 0} - 13 = -13 < 0 \\ \text{не решение} \Rightarrow a_1 \neq 0 \end{array} \right)$

2). $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0,2 - 3$ ОДЗ: $\begin{cases} y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4 y + \dfrac{4}{\log_5 y} = \dfrac{-1}{3\log_5 y} - 3$

Замена: $b = \log_5 y$, $b \neq 0$

$b^4 + \dfrac{4}{b} + \dfrac{1}{3b} + 3 = 0$

$b^4 + \dfrac{13}{3b} + 3 = 0$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Расс-м $g(b) = 3b^5 + 9b + 13$, $g'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow$
$g(b)$ - монотонно возраст. ф-ция $\Rightarrow$ решение $g(b_1) = 0$ единственно и существует.

Понятно, что $b_1 \neq 0$, т.к. $g(0) = 13 \neq 0$

Тогда возвращение к замене: $b_1 = \log_5 y$

$$y = 5^{b_1}$$

Понятно, что если $\begin{cases} 3a_1^5 + 9a_1 - 13 = 0 \\ 3b_1^5 + 9b_1 + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -b_1$

(т.к. $F_1(a) = 3a^5 + 9a$, $F_1'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow F_1(a)$ монотонно возрастает)
и $\exists! \, a_1 : F_1(a_1) = 13$; $F_1(b_1) = -13$ и это при $a_1 = -b_1$

Тогда $xy = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{b_1} = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{-a_1} = \frac{1}{2}$

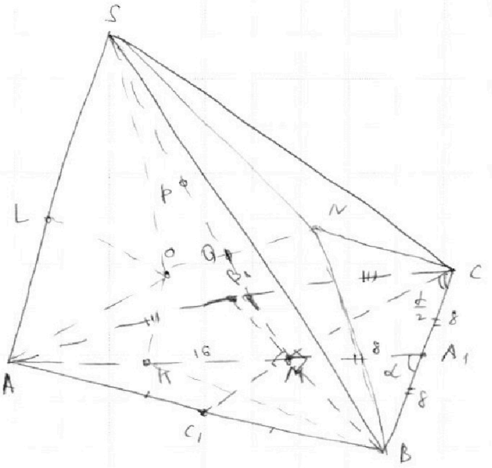
Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

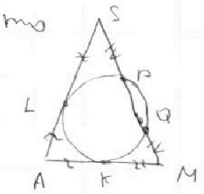
МФТИ



Дано: $SP = MQ$, $S(ABC) = 100$,
$SA = BC = 16$

а). т.к. т. L и т. K – т. касания сферы
$\Rightarrow AL = AK$

т.к., $L, K, P, Q \in$ сфере, ~~то~~ и (SAM), то



по Th. о секущей и кас-й:
$SL^2 = SP \cdot SQ$
$KM^2 = MQ \cdot MP =$
$= SP \cdot MP = SP(MQ + QP) =$
$= SP(PQ + SP) = SP \cdot SQ = SL^2$

$\Rightarrow KM = SL \Rightarrow SA = SL + LA = AK + KM = AM = 16$

1). т.к. AA_1 – медиана, то $\dfrac{AM}{AA_1} = \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow AA_1 = \dfrac{3}{2} AM = \dfrac{3}{2} \cdot 16 = 24$

$MA_1 = AA_1 - AM = 24 - 16 = 8$

2). $S(ABC) = \dfrac{CB}{2} \cdot AA_1 \sin\alpha$ где $\alpha = \angle AA_1B$

$100 = \dfrac{16}{2} \cdot 24 \cdot \sin\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{25}{48}$

3). в $\triangle CMB$: $\angle A_1BM = \angle A_1MB$ ($\triangle MA_1B$ – р/б $\triangle$) $\Rightarrow \angle A_1BM = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$

$\angle CA_1M = \angle CMA_1$ ~~и~~ ($\triangle MA_1C$ – р/б $\triangle$) $\Rightarrow \angle CMA_1 = \dfrac{\angle MA_1B}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle MCA_1 + \angle A_1BM = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \angle CMB = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow CM \perp MB$

4). $CM = CB \cos\dfrac{\alpha}{2} = 16 \cos\dfrac{\alpha}{2} = 16\sqrt{\dfrac{48 + \sqrt{1679}}{96}}$

$\left(\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{625}{48^2}} = \dfrac{\sqrt{1679}}{48} \right.$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$, т.к. $0 < \dfrac{\alpha}{2} < 90°$

$\Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{48 + \sqrt{1679}}{96}}$

$BM = CB \sin\dfrac{\alpha}{2} = 16 \sin\dfrac{\alpha}{2}$

5). $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot \dfrac{3}{2} CM \cdot \dfrac{3}{2} BM = 6 \cdot 9 \cdot 16^2 \sin\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\alpha}{2} = 27 \cdot 16^2 \sin\alpha =$

$= 27 \cdot 16^2 \cdot \dfrac{25}{48} = \dfrac{27 \cdot 16 \cdot 25}{3} = 9 \cdot 16 \cdot 25 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2 = 3600$

Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б). SN и SL - кас-е к сфере $\Rightarrow SL = SN = 4$

$\Rightarrow AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AK$

пусть т. O - ц. сферы $\Rightarrow AO^2 = AL^2 + LO^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AO = 13$

$SO^2 = LO^2 + SL^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow SO = \sqrt{41}$

$OA_1^2 = OK^2 + KA_1^2 = 5^2 + (AA_1 - AK)^2 = 5^2 + (24 - 12)^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

$\Rightarrow OA_1 = 13$

$A_1N^2 = OA_1^2 - ON^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow A_1N = 12$

$CN^2 = OC^2 - ON^2 = OC^2 - 5^2 = KC^2 \Rightarrow CN = KC$

$KB^2 = OB^2 - OK^2 = OB^2 - ON^2 = NB^2 \Rightarrow KB = NB$

$CN = KC$
$KB = NB$ $\Rightarrow \triangle BNC = \triangle BKC$
BC - общая

SA, AA_1 - кас-е к сфере, SN и NA_1 - кас-е к сфере. $\Rightarrow ON \perp (BSC)$
(сфера зажата между плоскостями (SBC) и (ABC))

~~OK кас-я~~ $OK \perp (ABC)$ т.к. т. K - т. касания сферы и плоскост

$\Rightarrow$ т. K, L, N $\in$ 1 сечению $\Rightarrow$ S, N, A_1 $\in$ 1 прямой

$\Rightarrow \triangle ASA_1$ - р/б $\triangle$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{CF}{FC} = \frac{CX}{CK} = \sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{10}$

$\frac{CF}{C}$

$CF \cdot CX = 14x^2$

$\cancel{CF\sqrt{\frac{14}{10}} \cdot CX = 14x^2}$ $CF \cdot \frac{10}{\sqrt{14}} \cdot CX = 14x^2$

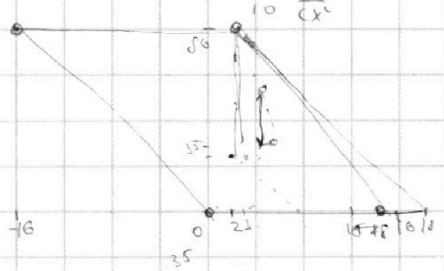
$\frac{CF}{CX} = k_1$

$CF \cdot CX = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$

$k_1 CX^2 = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$

$k_1 = \frac{14\sqrt{10}}{10} \frac{x^2}{CX^2}$

$\Delta x^2 + \Delta y^2 = d^2$



$5\Delta x + \Delta y = 45$

0	45	$\to$ 56
1	40	$\to$
2	35	
3	30	
4	25	
5	20	
6	15	
7	10	
8	5	
9	0	

$\Delta x^2 + (45 - 5\Delta x)^2 = d^2$

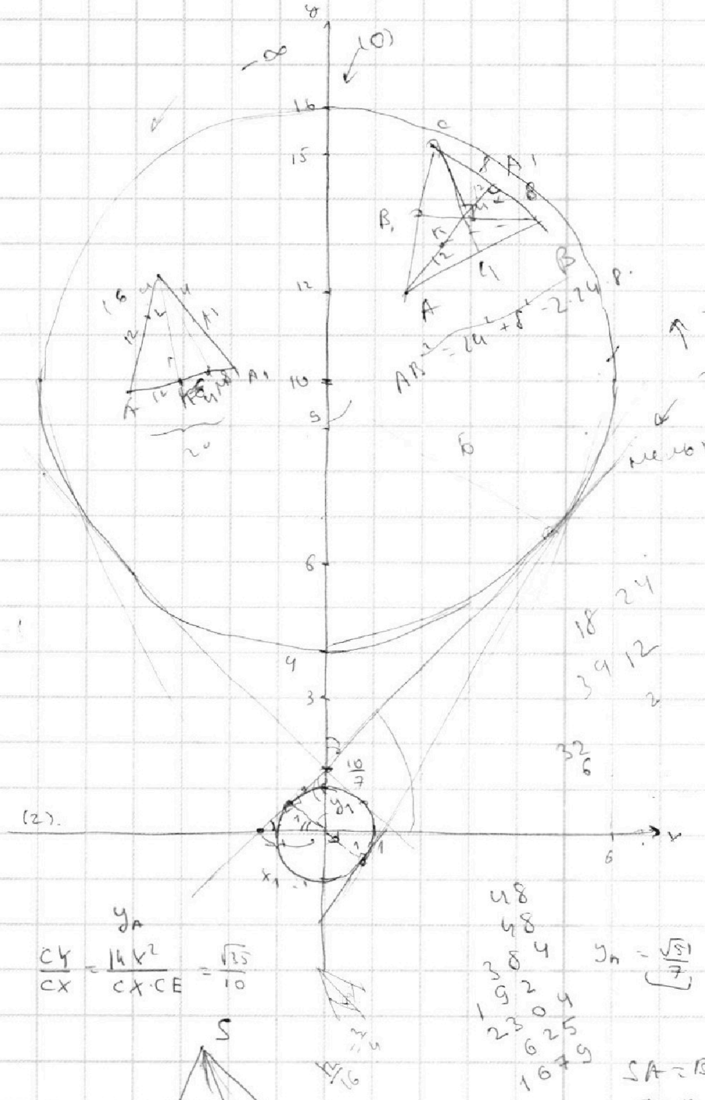
$45^2 + 26\Delta x^2 - 450\Delta x = d^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{ax+4b}{3}=y$

$a=0 \Rightarrow 0 - 2$ реш.

$\frac{a}{3}$ $a>0$

b - вариативен

$CE \cdot \frac{10\,CY}{\sqrt{35}} = 14x^2$

$CF \cdot CE = \frac{14\sqrt{35}}{10}x^2$

$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

$\frac{10-y_1}{y_1} = \frac{a}{6}$

$10 = 7y$

$y = \frac{10}{7}$

$6y = 7y_1$

$y_1 = \frac{60}{7}$

$\frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$ $\frac{\sqrt{51}}{7}$

$\frac{1}{x_1} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$x_1 = \frac{10}{\sqrt{51}}$

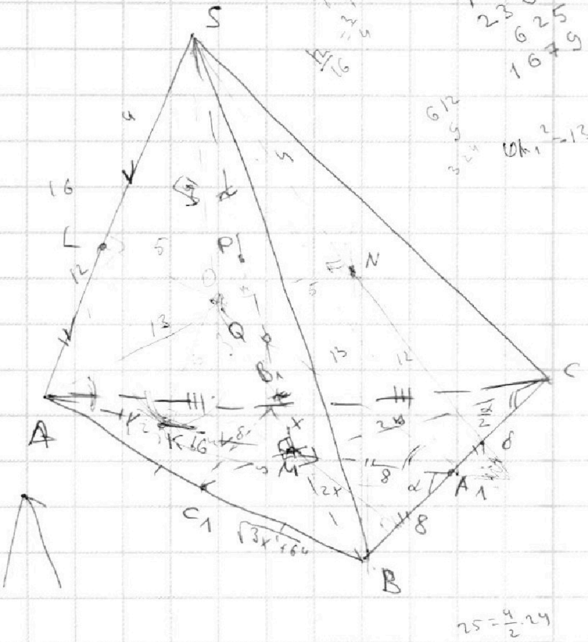
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10\sqrt{51}}{7 \cdot 10} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$y_n = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

$\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\left[\begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < 3\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$??

$\frac{CY}{CX} = \frac{14x^2}{CX \cdot CE} = \frac{\sqrt{35}}{10}$



$SA = BC = 16$

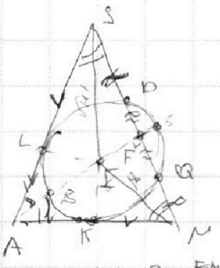
$[ABC]$

$SL = SP \cdot SQ$?

$KM = MQ \cdot MP = SL$

$\rightarrow KM = SL$

$\triangle SAM$ - р/б $\triangle$



$AA_1 \sin\alpha = \frac{25}{2}$

$3x = 3\sqrt{64 - x^2} - 8$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{14}}{16}$

$4y^2 + 4x^2 = 16^2$

$y^2 + x^2 = 64$

$C_1B^2 = 4x^2 + 64 - x^2 = 3x^2 + 64$

$25 = \frac{4}{2} \cdot 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\arcsin a = b$

$a = \sin b \quad a \in [-1;1]$

$b \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \end{cases}$

$\begin{cases} -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi \\ \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2x-\pi}{10}) \end{cases}$

$\pi - 2x \le 5\pi$, $2x \ge -4\pi$, $x \ge -2\pi$

$\pi - 2x \ge -5\pi$, $2x \le 6\pi$, $x \le 3\pi$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2x-\pi}{10} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \end{array}\right. \\ x \in [-2\pi; 3\pi] \end{array}\right.$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$

$3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{array}\right. \\ \ldots \end{array}\right.$

$\frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k$

$\frac{6x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \end{array}\right.$

$-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 3\pi$

$-\frac{5\pi}{3} \le \frac{5}{3}\pi k \le \frac{10}{3}\pi$

$-1 \le k \le 2$

$k \in \{-1; 0; 1; 2\}$

$-2\pi \le \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le 3\pi$

$-\frac{5\pi}{2} \le \frac{5}{2}\pi k \le \frac{5\pi}{2}$

$-1 \le k \le 1 \quad k \in \{-1; 0; 1\}$

$k = -1:$

$\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi$

1). Check 1: $\arcsin(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k)) = \frac{\pi - (\pi + 5\pi k)}{10} = -\frac{\pi}{2} k$

1). $k = -1$: $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(-1)$ ✓

2). $k = 0$: $0 = 0$

3). $k = 1$ $\cancel{\frac{5\pi}{2}} =$ ✓

2). $\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k)) = \frac{\pi - \frac{2}{3}(-\pi + 5\pi k)}{10} = \frac{\frac{5}{3}\pi - \frac{10}{3}\pi k}{10} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{3}$

1). $k = -1$: $-\frac{6}{3} = -2$ $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6}$ ✓

$\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 3\pi$

2). $k = 0$: $\frac{\pi}{6}$ = ✓

3). $k = 1$: $-\frac{\pi}{6}$ ✓

4). $k = 2$: ~~$-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6}$~~

$-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6}$ ✓

~~0 5) k = 3:~~

34 5
17 0
17

$5^{34} \cdot 3^{28} \cdot 2^{17}$

$\frac{39+29}{2} = \frac{70-2}{2} = 34$

1. $2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$

$x_1, \ldots \ge 0$

$\min(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$

$x_1 + x_2 \ge 8$ $\quad x_2 + x_3 \ge 12$ $\quad x_3 + x_1 \ge 14$

~~$y_2 + y_3 \ge 14$~~ $y_1 + y_2 \ge 14$ $\quad y_2 + y_3 \ge 20$ $\quad y_3 + y_1 \ge 21$

~~$x_3 + y_3 \ge 12$~~ $\quad z_2 + z_3 \ge 17$ $\quad z_3 + z_1 \ge 39$

$z_1 + z_2 \ge 12$

17 16
35 40
56
12
68

34+5

$x_1 + x_2 + x_3 \ge \frac{34}{2} = 17$

21
14
35

55

56 | 2
4 | 28
16

$y_1 + y_2 + y_3 \ge \frac{55}{2} > 27$

28 2

$z_1 + z_2 + z_3 \ge 34$

12 0 17

$\boxed{13 \quad 4 \quad 26}$

~~1 7 5~~ ~~7 1 11~~ 9

6 2 10

$\boxed{5 \quad 3 \quad 9}$

5 9 11
6 8 12
7 7 13

$\boxed{8 \quad 6 \quad 14}$ 28 ✓

~~6 6 11 11~~ 1 16
10 2 15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x>0$

$2x\neq 1$

$8x^3>0$

$(2x)^3>0$

$\underline{x>0}$

$\frac{1}{5}=0{,}2$

$a^4-\frac{3}{a}=\frac{4}{3a}-3$

$\left(\frac{4}{3}+3\right)\frac{1}{a}=\frac{13}{3a}$

$a^4-\frac{13}{3a}+3=0$

$a^5+3a-\frac{13}{3}=0$

$3a^5+9a-13=0$

$\log_5^4(2x)-\frac{3}{\log_5 2x}=\log_{8x^3}5^4-3$

$\log_5^4(2x)-\frac{3}{\log_5 2x}=\frac{4}{3\log_5 2x}-3$

$a^4=\frac{4}{3a}+\frac{3}{a}-3$

$a^4=\frac{13}{3a}-3$

$3=\frac{3^5}{2^5}+9\cdot\frac{3}{2}-13=0$

$3^6+2^4\cdot 3^3-13\cdot 2^5$

$2^4(27-26)$

$\to$ если корень есть $\to$ один

$F(a)=3a^5+9a-13=0$

$F'(a)=15a^4+9>0\to$ $\boxed{\nearrow}$

$\log_2 8 1=\log_8 5^3=\log_8 64=2$

$\log_2 4=2\quad \log_8 4=\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 2}{3}$

$0: a^4=-\frac{9}{15}$ нет т. max(min)

$1\to\frac{3}{2}$

$\frac{4}{3}$

$\frac{4^5}{3^4}+\frac{12-13}{-1}$

$b^4+\frac{4}{b}=-\frac{1}{3b}-3$

$b^4+\frac{4}{b}+\frac{1}{3b}+3=0$

$b^4+\frac{13}{3b}+3=0$

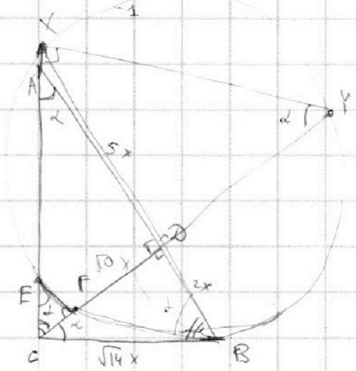
$3b^5+9b+13=0$

$a=\log_5 y\qquad -a=\log_5 2x\qquad \underline{+ОДЗ}$

$y=5^a\qquad 2x=5^{-a}\qquad x>0\quad y>0$

$x=\frac{5^{-a}}{2}\qquad x\neq\frac{1}{2}\quad y\neq 1$

$\frac{5^{-a}}{2}=\frac{1}{2}\qquad \boxed{a\neq 0}$ ✓



$\boxed{xy=\frac{1}{2}}$

$\frac{[ABC]}{[CEF]}$?

$CE\cdot CA=CB^2=CF\cdot CD=14x^2$

$CF=\frac{14x^2}{\sqrt{10}x}=\frac{14}{\sqrt{10}}x$

$\frac{CF}{CD}=\frac{CE}{CA}=\frac{EF}{5x}$

$CD=\sqrt{10}x$

$CB=\sqrt{10x^2+4x^2}=x\sqrt{14}$

$AC=\sqrt{10x^2+25x^2}=x\sqrt{35}$

$\frac{[ABC]}{[CEF]}=\left(\frac{EF}{AC}\right)^2=\frac{35}{14}\left(\frac{CF}{CB}\right)^2=\left(\frac{CE}{AB}\right)^2=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$

$CB^2=CE\cdot AC\;CF$

$\frac{CF}{CB}=\frac{14x}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}x}=\sqrt{\frac{14}{10}}$

EC

$\frac{CY}{AB}=\frac{CY}{7x}$

$\frac{CY}{EC}\qquad CY=\frac{14x^2}{CF}$

3. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+(y-10)^2=36\end{cases}$

$\frac{CE}{CF}=\sqrt{\frac{35}{10}}$

$\frac{CE}{AC}=\frac{CF}{CD}=\frac{EF}{AD}$

$100=\frac{16}{2}\cdot h_a\qquad h_a=\frac{100}{8}$

$\sin\alpha=\frac{25}{2\cdot 24}=\frac{25}{48}\to\cos\alpha$

$\to\sin\frac{\alpha}{2}\to\to x\to$?

$\frac{CE}{\sqrt{35}}=\frac{CF}{\sqrt{10}}=\frac{EF}{5}$

$CE\cdot CX=14x^2$

$CF\cdot CY=14x^2$

$=\frac{CE}{CY}=\frac{CF}{CX}$

$14x^2=C$

$\frac{\sqrt{35}}{10}=\frac{CE}{CF}=\frac{CY}{CX}$

$\frac{CY}{AC}=\frac{CX}{CD}$

$CY=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}CX$

$\frac{CY}{CX}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$

$\frac{\sqrt{14}x\cdot\sqrt{35}x}{CF\cdot CE}$

$14x^2=CF\cdot\cancel{CX}\,CY$

$CX^2+XY^2=CY^2$

$\frac{CY}{\sqrt{35}x}=\frac{CX}{\sqrt{14}x}$

$CY=CX\sqrt{\frac{35}{14}}$

$CX\cdot CY$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!