



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} & (1) \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} & (2) \\ ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} & (3) \end{cases}$  Сначала найдем min-степень 2, которая может входить в  $a \cdot b \cdot c$ . Докажем, что это ~~21~~ 21. Пусть возможно получить меньшую

степень 2. Тогда max-степень вхождения двойки в "b" равна 7 (т.к.  $ac : 2^{19}$ ). Тогда min-степень вхождения 2-ки в "c" равна 13 (из (2)), а min-степень вхождения 2-ки в "a" равна 8. Но  $13+8 \geq 21 \Rightarrow$  степень 2-ки, меньшая 21, в произведении  $abc$  получить нельзя.

Теперь найдем min-степень 3, которая может входить в  $a \cdot b \cdot c$ . Док., что это тоже 21. Пусть возможно получить меньшую степень 3. Тогда max-степень вхождения 3-ки в "b" равна 2 (т.к.  $ac : 3^{18}$ ). Тогда min-степень вхождения 3-ки в "c" равна 11 (из (2)), а min-степень вхождения 3-ки в "a" равна 8.  $11+8+2$  уже равно 21, а если степень вхождения 3-ки в "b" уменьшать, то на столько же будет увелич. как степень вхождения 3-ки в "a", так и в "c", т.е. оставш. вхождение 3-ки в произведение  $a \cdot b \cdot c$  будет расти. Значит степень 3-ки, меньшая 21, в произведении  $abc$  получить нельзя.

Теперь найдем min-степень 5, которая может входить в  $a \cdot b \cdot c$ . Док., что это 30.  $ac : 5^{30} \Rightarrow$  min-степень вхождения 5-ти в  $a \cdot b \cdot c$  равна 30.

Пример, когда степень вхождения 2-ки и 3-ки = 21, а степень вхождения 5-ки = 30:  $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$ ;  $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$ . Тогда  $ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$ ;  $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 5^{13} \cdot 5^{13}, \quad ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Ответ: ~~abc~~ min.  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

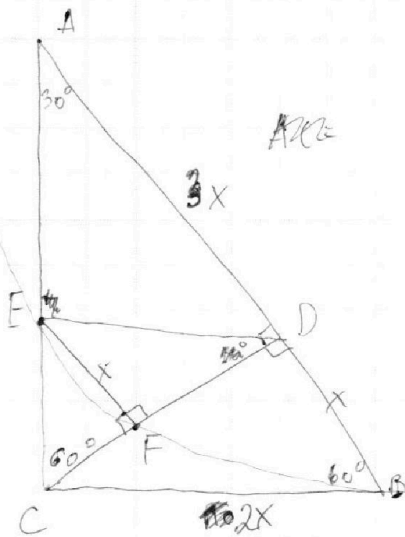
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow BD = x$ . Тогда  $AD = 3x \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3}x$

$BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$

$AC = \sqrt{3}x$

Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{3}x = \sqrt{3}x^2$

Тогда  $AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$

$\cos \angle CBD = \frac{DB}{CB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CBD = 60^\circ$ . CB - касательная

окр-ми  $\Rightarrow \angle EDF = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ$  (отсюда  $\angle EDF = 30^\circ$ )

Тогда  $\angle AED = 90^\circ$  по сумме углов  $\triangle$ .

$ED = 3x \sin 30^\circ = \frac{3}{2}x$ .  $\tan 30^\circ = \frac{EC}{ED} \Rightarrow EC = \frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$CF = EC \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$ .  $EF = EC \sin 60^\circ = \frac{3}{4}x$

$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$ . Тогда:

$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{32}{3}$

$\Rightarrow EDBF$  - паралл.  $\Rightarrow EF = DB = x$ . Тогда  $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{9}$  (они

подобны с  $k=3$ ).  $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$~~   
 $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow \arcsin(\cos x)$  определен при  
 $\forall z$ -им  $\cos x$ . Возьмем сумму от обеих частей (в конце  
точно будет проверено, что найденные корни удовлетворяют  
исходному уравнению, отсюда нет корня):

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad (\text{по св-ву } \arcsin u + \arccos u = \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x + 5 \arccos(\cos x)$$

$$x \in [2\pi n; 3\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi = x + 5x = 6x \Leftrightarrow$$

$$2\pi = x - 5x = -4x$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ . Данный корень  
принадлежит рассматриваемому  
промежутку и удовлетворяет  
исходному уравнению.

$x = -\frac{\pi}{2}$ . Данный корень  
принадлежит рассматривае-  
мому промежутку и удов-  
летворяет исходному уравнению.

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

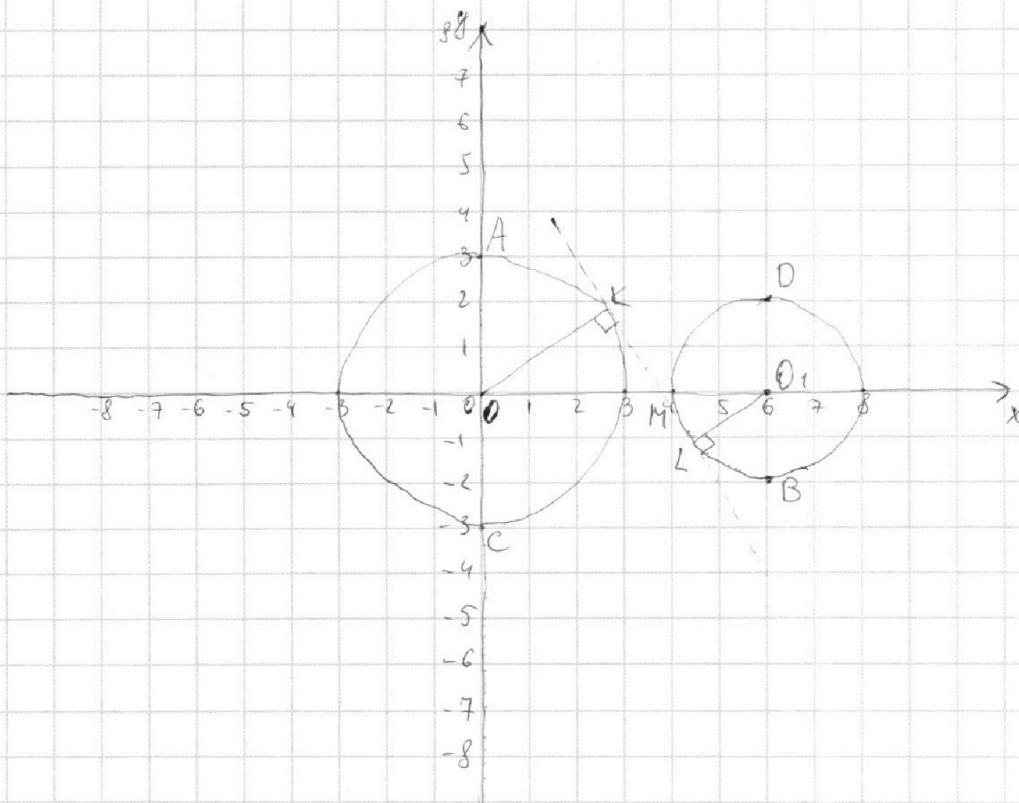
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (2)$$

(2) ур-е представлено в виде объединения 2-х окр-тей:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{и} \quad (x-6)^2 + y^2 = 4$$



$2y = -ax + 3b$ ,  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$  - это прямая. Система имеет 4 реш-я  $\Rightarrow$  она должна пересекать каждую из окр-тей в 2-х точках. Коэффициент "b" и.б.  $\forall \Rightarrow$  нужно все возможные коэффициенты перед x, при которых прямая имеет хотя бы при 1 "b" пересекать каждую окр-ть в 2-х точках.

Т.е. нужно найти коэффициент наклона <sup>одной из</sup> внутренних касательных

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Этих двух окр-тей (у  $\pi$  <sup>подсчитывается</sup> внутренней касательной из-за симметричного расположения окр-тей относительно  $Ox$  коэффициент перед  $x$  будет таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Обозначим некоторые точки, как на рис. (K и L - т. касания),

T - т. пересек.  $Ox$  и  $KL$ .  $\triangle OKM \sim \triangle OLM$  ( $O, L \parallel OK$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OK}{OL} = \frac{OM}{MO_1} \quad \frac{3}{2} = \frac{OM}{MO_1} \quad MO_1 = 6 - OM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{OM}{6 - OM} \quad \text{Тогда } 18 - 3OM = 2OM \Leftrightarrow OM = \frac{18}{5}$$

Тогда коэффициент  $k$  перед  $x$  равен Подставим координаты

$$T, M \text{ в (1): } ax + 2y - 3b = 0$$

$$\frac{18}{5}a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{6a}{5}$$

Теперь подставим "y" в каждую из 2 окр-тей:

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 = 9 & (3) \\ (x-6)^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

у каждого из них должно быть 1 решение относительно  $x$  (касательная).

$$(3): x^2 + \frac{a^2 x^2}{4} + \frac{9b^2}{4} - \frac{3ab}{2}x - 9 = 0$$

$$D = \frac{9a^2 b^2}{4} - 4\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = 0$$

$$\frac{9a^2 b^2}{4} - 9b^2 + 36 - \frac{9a^2 b^2}{4} + 9a^2 = 0$$

$$a^2 + 4 = b^2 \quad (25) \quad b = \frac{5a}{5} \Rightarrow (*)$$

$$\Rightarrow a^2 + 4 = \frac{36a^2}{25} \quad \text{Тогда}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) :  $x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2 x^2}{4} + \frac{9b^2}{4} - \frac{3ab}{2}x - 4 = 0$  <sup>(предыдущие №2)</sup>

$$D = 144 + \frac{9a^2 b^2}{4} + 36ab - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$$

$$144 + \frac{9a^2 b^2}{4} + 36ab - 9b^2 - 128 - \frac{9a^2 b^2}{4} - 32a^2 = 0$$

$$32a^2 + 9b^2 - 36ab - 16 = 0$$

$$32a^2 + 9a^2 - 36ab + 20 = 0$$

$$41a^2 - 36ab + 20 = 0$$

Обозначим некоторые точки, как на рис. (K и L - т. касания,  
т. M - т. пересек. OX и KL,  $\triangle OKM \sim \triangle OLM$  ( $O, L$  и  $O, K$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OK}{OL} = \frac{3}{2} = \frac{OM}{MO_1}. \text{ Но } MO_1 = 6 - OM \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{OM}{6 - OM}$$

Тогда  $18 - 3OM = 2OM \Leftrightarrow OM = \frac{18}{5}$ . Подставим координаты  
т. M в (1):  $ax + 2y - 3b = 0$

$$\frac{18}{5}a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{6a}{5}$$

Тогда подставим это  $b$  в \*

$$a^2 + 4 = \frac{36a^2}{25} \Leftrightarrow 4 = \frac{11}{25}a^2. \text{ Тогда } a^2 = \frac{100}{11}, \text{ значит}$$

$$a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Тогда нам подходят все  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ . (при  $a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$

прямая будет касаться этих двух окр-тей, при  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$  у прямой  
будет 4 т. пересек. с этими окр-тями, а при  $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right) \cup$   
 $\left(\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$  у прямой будет max. 2 пересек. с этими окр-тями.

Ответ:  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(1): \log_3^4 X + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

ОДЗ:  
 $x > 0, y > 0,$   
 $x \neq 1,$   
 $y \neq \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 X + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 X + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 X + \frac{7}{2 \log_3 X} + 8 = 0$$

$$2 \log_3^5 X + 16 \log_3 X + 7 = 0 \quad (\log_3 X \neq 0, \text{ т.к. } X \neq 1). \quad (3)$$

$$(2): \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) - \frac{7}{2 \log_3 (5y)} + 8 = 0$$

$$2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) - 7 = 0 \quad (\log_3 (5y) \neq 0). \quad (4)$$

(3)+(4):

$$2 \log_3^5 X + 16 \log_3 X + 2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) = 0$$

$$\log_3^5 X + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 (5xy) = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

$$\log_3^5 X + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 X + 8 \log_3 (5y) = 0$$

$$t = \log_3^4 X, \quad q = \log_3 (5y)$$

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

(х. Дюржера: (относит. t))

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

$$t^4 - qt^3 + q^2 t^2 - q^3 t + q^4 + 8 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) t = -q$$

(продолжение)

Сх. Лагранжа (относит.  $t$ )

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & q^5 + 8q \\ -q & 1 & -q & q^2 & -q^3 & q^4 + 8 \end{array} \quad 0$$

Возьмем производную по  $t$  у уравнения  $t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$ :

$$5t^4 + 8 + q^5 + 8q = 0. \quad t^4 = \frac{-q^5 - 8q - 8}{5} < 0, \text{ т.к. } q > 0.$$

$t^4 < 0 \Rightarrow \text{K}$ . Если взять производную по  $q$ , мы придём к такому же уравнению, т.к. уравнение симметрично относительно  $t$  и  $q$ .

Значит данная ф-я всегда возрастает и она может иметь max. 1 (и равно 1) пересек. с  $Ox$ . А это достигается при  $t = -q$ :

$$\log_3 x = -\log_3 (5y)$$

$$\log_3 (5xy) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

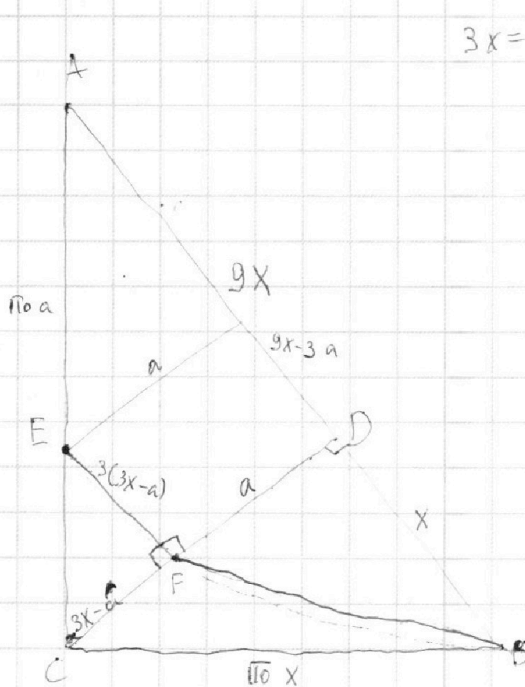
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x = \sqrt{x \cdot 9x}$$

$$10x^2 +$$

$$CB^2 = CE \cdot CD$$

$$tg \alpha = \frac{3}{3x-a}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$AE = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10} a$$

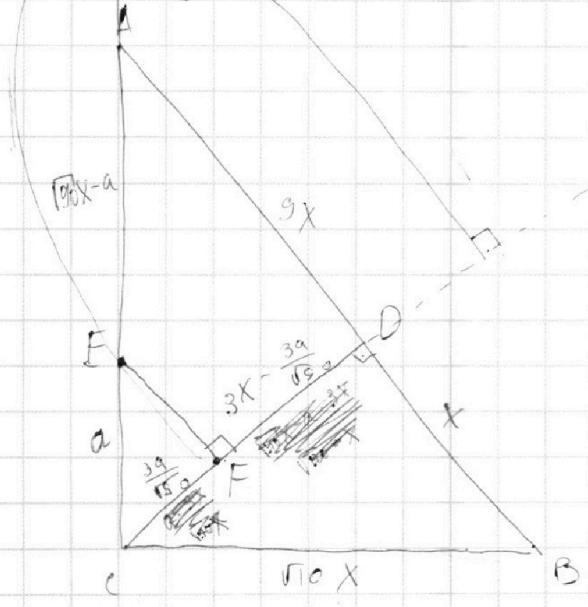
$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3x-a}{CE}$$

$$CE = 3\sqrt{10}x - \sqrt{10} a$$

~~$$3x^4 + 59x^2 + 5x^4 + 8 + 9^5 + 89 = 0$$~~

$$x^4 = \frac{-9^5 - 89 - 8}{5} < 0$$

$$41a^2 + \frac{216a^2}{5} + 20 = 0$$



$$\frac{9}{\sqrt{90}x - a} = \frac{CF}{FD}$$

$$= \frac{3x}{FD} - 1$$

$$\frac{3x}{FD} = \frac{\sqrt{90}x}{\sqrt{90}x - a}$$

$$FD = \frac{3(\sqrt{90}x - a)}{\sqrt{90}}$$

$$= 3x - \frac{3a}{\sqrt{90}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



этих двух окружностей. (Вся  $y$  — внутренней касательной из-за симметричного расположения окружностей относительно  $Ox$  коэффициент при  $x$  будет таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Подставим  $y$  в каждую из 2 уравнений окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 9 & (3) \\ (x-b)^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

Каждое из них должно иметь 1 решение относительно  $x$ . (т.к. касательная)

(3):

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0 \quad D = 1296 - 4 \cdot 32 \cdot (9b^2 - 16)$$

$$D_1 = \frac{9a^2 b^2}{4} - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) (9b^2 - 9) = 0 \Rightarrow = 1296 - 64 \cdot 32 \cdot 9b^2$$

$$\frac{9a^2 b^2}{4} + 32 - a^2 - 36b^2 = 0$$

$$4a^2 - 12b^2 + 9a^2 b^2 + 128 = 0$$

(4):

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 4 = 0$$

$$x^2 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) - x \left(12 + \frac{3ab}{2}\right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2 b^2}{4} - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$$

$$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2 b^2}{4} - 36b^2 - 128 - \frac{3a^2 b^2}{4} - 32a^2 = 0$$

$$\frac{3a^2 b^2}{2} - 32a^2 - 36b^2 + 36ab + 16 = 0 \quad (5)$$

$$D_1 = \frac{9a^2 b^2}{4} - 36b^2 + 36 - \frac{3a^2 b^2}{4} + 9a^2 = 0$$

$$\frac{3a^2 b^2}{2} + 9a^2 - 36b^2 + 36 = 0 \quad (6)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{t^5}{q^3 t^3} + \frac{q^5}{q^3 t^3} + \frac{8t}{q^3 t^3} + \frac{8q}{q^3 t^3} = a \quad (qt > 0, t \neq 0)$$

$$\frac{t^2}{q^3} + \frac{q^2}{t^3} + \frac{8}{q^3 t} + \frac{8}{t^3 q^2}$$

1)  $t = -q$

Сх. Горнера (относит.  $t$ )

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & q^5 + 8q \\ -q & 1 & -q & q^2 & -q^3 & q^4 + 8 & 0 \end{array}$$

$$t^4 - qt^3 + q^2t^2 - q^3t + q^4 + 8 = 0$$

$$(t^2 + q^2)^2 - q^2t^2 - qt(t^2 + q^2) + 8 = 0$$

$$(t^2 + q^2)^2 - qt(t^2 + q^2 + qt) + 8 = 0$$

Пусть  $k = t^2 + q^2$ ,  $l = qt$ .

$$k^2 - l(k+l) + 8 = 0 \quad k^2 - lk - l^2 + 8 = 0$$

Относит.  $k$ :  $D = l^2 + 4l^2 - 32 = 5l^2 - 32$      $k = \frac{l \pm \sqrt{5l^2 - 32}}{2}$      $k > 0 \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow l \geq \sqrt{\frac{32}{5}} (qt > 0)$

$$k = \frac{l \pm \sqrt{5l^2 - 32}}{2}$$

Относит.  $l$ :  $D = k^2 + 4k^2 + 32 = 5k^2 + 32 > 32$ ,  $k > 0$

$$l = \frac{k \pm \sqrt{5k^2 + 32}}{-2} = \frac{-k \pm \sqrt{5k^2 + 32}}{2} \quad l > 0 \Rightarrow l = \frac{-k + \sqrt{5k^2 + 32}}{2}$$

Из этого следует, что  $k = l \cdot m$ , где  $m > 2$  (если  $t \neq -q$ )

Тогда:  $t^2 + q^2 = mqt \Leftrightarrow (t-q)^2 + (2-m)qt = 0$      $\begin{cases} 2-m > 0 \\ (t-q)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  данное  $k$ -во выполняться не может. Тогда:

$$\log_3 x = -\log_3(5y) \Rightarrow \log_3(5xy) = 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(6) - (5):

$$4a^2 + 20 + 36ab = 0 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

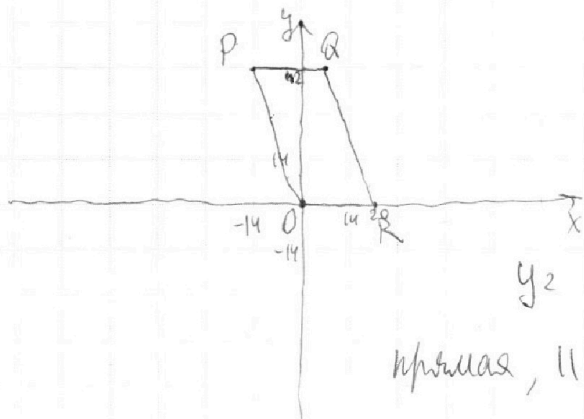
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 = 3x_1 + y_2 - y_1 : 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_2 - y_1| : 3. \text{ Пусть } y_2 = 42.$$

Будем рассматривать  $y_1$ , меньшие  
 $y_2$  на  $3k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $\forall$

прямая,  $\parallel O_x$ , пересекает данный паралл. и

пересек. паралл., имеет с ним ровно 21 общ. точку, если  $x$ -  
координата по  $O_x$  этой прямой  $: 3$ , и ровно 20 общ. точек, если  
координата по  $O_x$  этой прямой  $\neq 3$ . Для  $y_1 \in \{39, 36, \dots\}$