



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. $a^2 b^3 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^7 3^{11} 5^{14} : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \cdot 2^{14} 3^{17} 5^{43} = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

Тогда $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{38} = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$. (сгруппировать стороны, $abc : ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43}$)

Поскольку 2, 3 и 5 попарно взаимно просты, $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Поскольку a, b и c натуральные, abc - натуральное, > 0 .

Тогда если $abc : 2^{17} 3^{22} 5^{43}$, то $abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Заметим, что для $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$; $ab = 2^7 3^{11} 5^{14}$; $2^7 3^{11} 5^{14}$
 $b = 2^3 \cdot 3^4$; $bc = 2^{13} 3^{15} 5^{28}$; $2^{13} 3^{15} 5^{18}$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$; $ac = 2^{14} 3^{18} 5^{43}$; $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ } условие выполнено

$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$. - пример на минимальное значение суммы.

Тогда ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x. \quad \text{Пусть } t = \frac{\pi}{4} - x, \text{ тогда } \sin x = \cos t.$$

$$5 \arccos(\cos t) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - t, \quad x = \frac{\pi}{4} - t$$

$$\text{Пусть теперь } t = k\pi + d, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, d \in [0; \pi)$$

$$\begin{aligned} \text{Важно из определения } \arccos(\cos t) &= \arccos(\cos d) = d \text{ при чётных } k \\ \arccos(\cos t) &= \arccos(\cos d + \pi) = \arccos(-\cos d) = \\ &= \pi - d \text{ при нечётных } k. \end{aligned}$$

$$\text{Найдём ограничения на } k: \text{ из исходного уравн. } -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2};$$

$$\text{тогда } -4\pi < \frac{13}{4}\pi \leq t \leq \frac{17\pi}{4} < 2\pi. \quad \text{Важно } k \in [-4; 1].$$

$$k = -4: 5d = \frac{7\pi}{4} + 4\pi - d; 6d = \frac{28\pi}{4}; d = \frac{28\pi}{24}; t = -3\frac{1}{24}\pi; x = 3\frac{7}{24}\pi$$

$$k = -2: 5d = \frac{7\pi}{4} + 2\pi - d; 6d = \frac{15\pi}{4}; d = \frac{15\pi}{24}; t = -1\frac{9}{24}\pi; x = 1\frac{13}{24}\pi$$

$$k = 0: 5d = \frac{7\pi}{4} - d; 6d = \frac{7\pi}{4}; d = \frac{7\pi}{24}; t = \frac{7\pi}{24}; x = -\frac{1}{24}\pi$$

$$k = -3: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + 3\pi - d; -4d = -\frac{\pi}{4}; d = \frac{\pi}{16}; t = -2\frac{15}{16}\pi; x = 3\frac{3}{16}\pi$$

$$k = -1: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + \pi - d; -4d = -\frac{9\pi}{4}; d = \frac{9\pi}{16}; t = -\frac{7}{16}\pi; x = \frac{11}{16}\pi$$

$$k = 1: 5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} - \pi - d; -4d = \frac{-\pi}{4}; d = \frac{\pi}{16}; d > \pi - \text{невозможно.}$$

все остальные x, d, k, t
удовл. условиям на них

$$\text{Ответ: } x_1 = 3\frac{7}{24}\pi$$

$$x_2 = 1\frac{13}{24}\pi$$

$$x_3 = -\frac{1}{24}\pi$$

$$x_4 = 3\frac{3}{16}\pi$$

$$x_5 = \frac{11}{16}\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.
$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+4x+4y^2+4y)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+2)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0. \end{cases}$$

Посмотрим на графическое представление системы: второе уравнение

задаёт две окружности. окр-ти: U_1 : центр $O_1(-2; 0)$, радиус $r_1=2$

U_2 : центр $O_2(0; 0)$, радиус $r_2=3$.

Первое уравнение задаёт прямую; если $a \neq 0$, то она не параллельна осям координат. Если $a=0$, то $x=7b$ - верт. прямая.

Но у окружностей y -координаты центров совпадают, но пересечения нет, причём ни одна не лежит внутри другой. Вертикальная прямая $x=7b$, перпендикулярная их общим центрам, не может пересекать обе окружности одновременно. Но с одной она имеет не более двух т.п., так что этот случай нам не подходит.

Тогда переписем уравнение данной прямой как

$$y = \frac{7b-x}{3a} = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a} \cdot x. \text{ Для каждого } a \text{ параметр } b$$

задаёт семейство прямых с ~~заданным~~ ^{фиксированным} угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$.

(они друг другу параллельны). Если какая-то из этих прямых может одновременно пересекать обе окружности, причём каждая в двух точках, то данное a нам подходит.

(продолжение на обороте)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

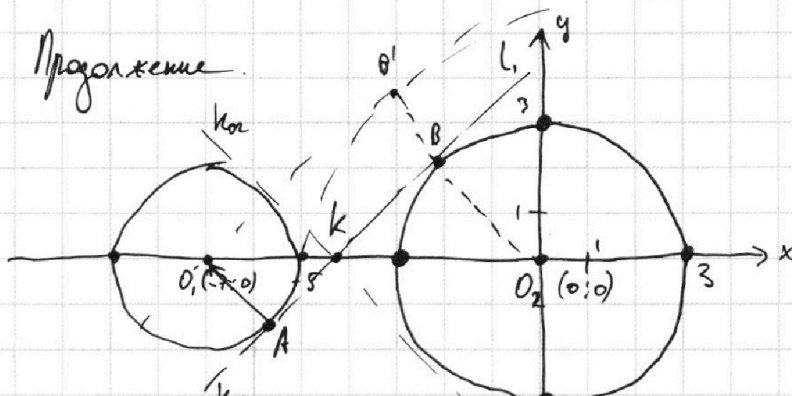
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4. Продолжение.



Заметим, что если существует прямая, l_2 перес. одну из окружностей

в двух точках и касаясь другой, то всегда можно сдвинуть её на $\epsilon > 0$

в сторону той, которой касается, так, чтобы точки пересечения с левой

остались две, т.е. их станет четыре. (по соображениям непрерывности)

Тогда наше "граничное" k_0 соответствует общей касательной (внутренней, иначе продолжим прямую через т. К, их таких две). Найдём это k_0 : ((см. рис.)) получим 4 пересечения) Отметим точки A, B (см. рис.)

Заметим, что ~~касательная~~

$$\vec{AO}_1 \perp \vec{O_2B}, \text{ т.е. } \angle O_1K = 90^\circ - \angle O_1k = 90^\circ - \angle O_2k = \angle KOB.$$

Тогда сдвиг на \vec{AO}_1 и гомотетия в O_2 с коэфф. $\frac{AO_1 + O_2B}{O_2B} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}$ переводят

прямую l_1 в одну и ту же — касательную l_3 из $(-7; 0)$ к окружности $w_3: O_3(0; 0)$
 $r_1 + r_2 = r_3 = 5$.

Найдём её уравнение: $l_3: y = (x+7)p$

$$\begin{cases} y = (x+7)p \\ y^2 + x^2 = 25 \end{cases} \text{ имеет одно решение: } x^2 - 25 + x^2 p^2 + 14xp^2 + 49p^2 = 0$$

$$\Delta = 0 = 196p^4 - 4 \cdot (49p^2 - 25)(p^2 + 1) = 4(25 + 25p^2 - 49p^2) = 4(25 - 24p^2), \text{ т.е. } 24p^2 = 25, p = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

(Знак минус соотв. второй касательной (в ней при аналогичных действиях перешли к l_2))

Тогда видно, что $p \in (0; \frac{5}{2\sqrt{6}}) \cup (-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0)$; а $\in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$ (ограничен знак)
 Ответ: а $\in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_7 x = \log_{36} 2 = 3/3 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_7 y = \log_{49}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 6x & x \neq 6 \\ t, x, y > 0, t \neq 1, y \neq 6 \end{cases}$$

$$\log_7^4 y + 6\log_7 y = \log_{49}(7^5) - 4$$

$$\begin{cases} \log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{1,5}{\log_7 t} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{2,5}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 t - \frac{3,5}{\log_7 t} = -4 = \log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y}$$

$$\log_7^5 t - 3,5 = -4 \log_7 t$$

$$\log_7^5 y + 3,5 = -4 \log_7 y$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4(\log_7 y + \log_7 t)$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4(\log_7 y + \log_7 t)$$

возможн. $-\log_7^4 y - \log_7^3 y \log_7 t + \log_7^2 t + \log_7^2 y = \log_7^3 t + \log_7^2 y + \log_7^3 t = -4$

или $\log_7 y + t = 0 \rightarrow yt = 1, \boxed{xy = \frac{1}{6}}$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$O(0;0) \quad P(-17;68) \quad Q(2;68) \quad R(19;0).$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40 = |(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1)|.$$

Введём $f(x; y) = 4x + y$ — функцию от координат точки.

Заметим, что для каждой точки A прямой, заданной уравнением

$$4x + y + c = 0 \quad f(A) = -c = \text{const}, \text{ и для всех прямых такого вида эта константа равняется } f(A) = -c.$$

Также заметим, что $f(O) = 0 > f(P)$; $f(Q) = f(R) = 76$.

$$OP: 4x + y = 0 \quad QR: 4x + y - 76 = 0.$$

Рассмотрим прямые вида $4x + y - k = 0$, где $k \in \{0, 1, 2, \dots, 76\}$.

Каждая из них пересекает параллелограмм; более того, нетрудно видеть,

что любая целая точка параллелограмма лежит ровно на одной из 77 прямых.

Назовём группу прямых семей, если у них k одинаковые остатки

при делении на 4. Получим 4 семьи: $I: k = 0, 4, \dots, 76$ — 20 прямых

$$II: k = 1, 5, \dots, 75$$

k второй семье относятся все 19 точек $II: k = 2, 6, \dots, 74$ — по 19 прямых.

точки границы, поэтому на каждой $III: k = 3, 7, \dots, 75$.

прямой семьи I ~~еще~~ $\frac{76}{4} + 1 = 18$ точек.

На прямых всех остальных семей по 19 точек на каждой.

(под этими здесь ~~и далее~~ подразумевается любые точки параллелограмма.)

Продолжение на обороте!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. Продолжение.

Теперь заметим, что если всели одну и ту же точку
для каждой семьи, то для каждой новой прямой k увеличатся
на $\frac{1}{2}$, а еще и f каждой новой прямой.

Тогда под условие подходят точки прямых одной семьи, с номерами
(выборки семьи) от 10.

В I семье таких пар прямых 10: 1-11, 2-12, ... 10-20.

В остальных по 9. И для каждой прямой можно брать любую
из её точек (подставить в условие).

$$\begin{aligned} \text{Тогда всего таких пар точек} & 10 \cdot 18 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 17 = \\ & = 3240 + 3 \cdot 289 \cdot 9 = 3240 + 3 \cdot (2601) = 3240 + 7803 = 11043. \end{aligned}$$

Ответ: 11043.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

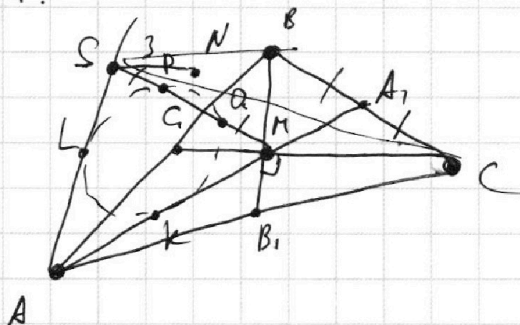
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



$$S_{ABC} = 60$$

$$SA = BC = 10$$

1) Прямая SL (или AM): она пересекет окружность ω по

дугам AL и MK ; $SP = QM$, тогда $SP^2 + PQ \cdot SP = QM^2 + PQ \cdot QM$

$SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = \text{deg}(S; \omega) = \text{deg}(M; \omega)$ Тогда $SL^2 = MK^2$ (по двум катетам).

$AL = MK$ (по двум катетам); тогда $AS = AM = BC = 10$.

$AM = \frac{2}{3} AA_1$ по свойству медианы: $AA_1 = 15$ и $MA_1 = 5 = \frac{BC}{2}$.

Тогда в $\triangle BMC$ медиана BM равна половине стороны, к которой проведена.

Тогда он прямой, $\angle BMC = 90^\circ$. Тогда $BM \cdot MC = \frac{2S_{BMC}}{3} = \frac{2S_{ABC}}{3} = \frac{2 \cdot 60}{3} = 40$. $BM \cdot MC = \frac{9}{4} \cdot 40 = 90$. $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350$.

(поскольку $BM^2 + MC^2 = BC^2 = 100$, BM и MC — катеты в $\triangle BMC$, $\angle BMC = 90^\circ$, $BM = 5\sqrt{2}$, $MC = 5\sqrt{2}$).

а) Ответ: 1350.

2) $SN = 3 =$ радиус окружности ω и $SL = MK = 3$.

$AL = LK = 10 - 3 = 7$. Пусть O — центр ω . $SO = \sqrt{SL^2 + r^2} = 5$.

$$MO = \sqrt{MK^2 + r^2} = 5.$$

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{90 + 5} = \sqrt{95}$$

$$AA_1 = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{100}$$

$$MC = \sqrt{20} = \sqrt{2} \cdot 5$$

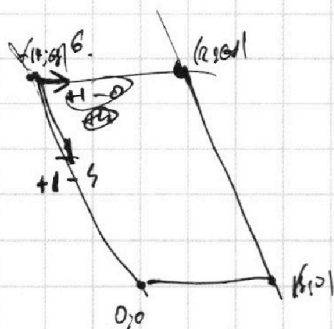
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x_2 + y_2 = 4x_1 + y_1 + 40.$$

Возьмем координаты 11 координат

18 точек на каждой
всего их 20.

разность 40 — через 5 сторон

и еще три грани на $\frac{2k}{4}$ или

1 → 6

2 → 7 ... 13 → 18

14 → 19

15 → 20

15 · 18 · 18

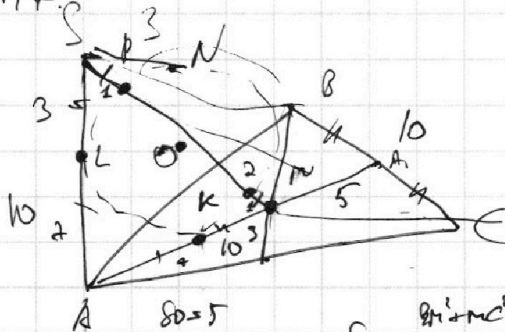
$$324 - 289 = 35.$$

примерно, там 10
Итак 17.

$$3 \cdot 17 \cdot 17 \cdot (19 - 5).$$

$$15 \cdot 18 \cdot 18 + 42 \cdot 17 \cdot 17.$$

$$15 \cdot 35 + 57 \cdot 209.$$



DBMC — на 1/3

$$\frac{1}{2} BM \cdot MC = S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

М.М.М.М.М.М.

$$\frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a$$

$$90 \cdot 15 = \frac{1}{3} \cdot 1310$$

$$BM \cdot MC = 100$$

$$BM = \frac{10}{n}$$

$$\sqrt{20 \cdot 180}$$

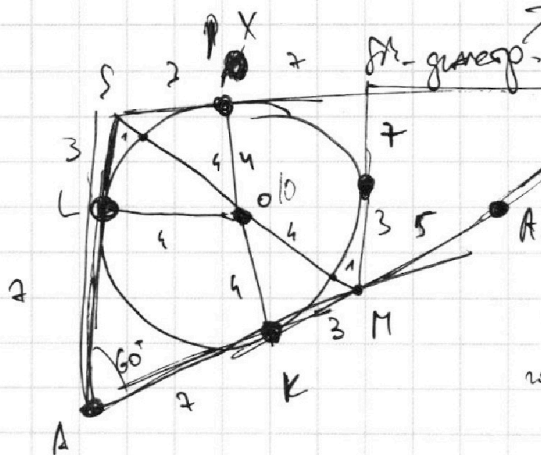
теперь S

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{10}{n} = 500 \cdot \frac{10}{n}$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1600$$

$$= 3600 = 60^2, \quad x = \frac{100 \pm 60}{2} = 30 \text{ or } 70$$



как всегда

расстояние / line (SAC)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_2^4 x - \frac{2}{\log_2 x} = \frac{1,5}{\log_2 x} - 4$$
$$\log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{2,5}{\log_2 y} - 4$$

$$\log_2^4 x - \frac{3,5}{\log_2 x} = -4 = \log_2^4 y + \frac{3,5}{\log_2 y}$$

$$\log_2^4 x + \log_2^4 y = \frac{3,5}{\log_2 x} \quad \log_2^4 x - \log_2^4 y = \frac{3,5}{\log_2 x} - \frac{3,5}{\log_2 y} + \frac{3,5}{\log_2 y}$$

$$(\log_2 x - \log_2 y) (\log_2 x + \log_2 y) (\log_2^2 x + \log_2^2 y) = 3,5 \frac{\log_2 x + \log_2 y}{\log_2 x \log_2 y}$$

$$(\log_2 x + \log_2 y)^2 (\log_2 x - \log_2 y) = \frac{3,5}{\log_2 x \log_2 y} + 2 \log_2 y (\log_2 x - \log_2 y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



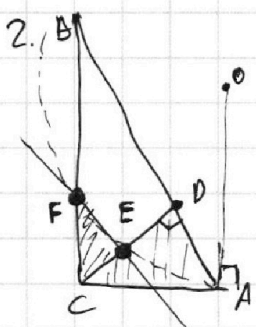
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 b^2 c^2 = 2^{2+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{11+18+19}$, ко $a^2 b^2 c^2 = a^2 c^2 = 2^{28} 3^{34} 5^{86}$.

$abc \mid ac \Rightarrow 2^{14} 3^{19} 5^{19}$, $abc > 0$, $abc > 2^{14} 3^{19} 5^{19}$.
 $a = 2^x 3^y 5^z$
 $b = 2^d 3^e 5^f$
 $c = 2^g 3^h 5^i$

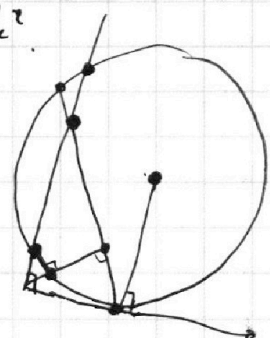
$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$
 $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$
 выполняется.

$y+z \geq 11$
 $e+f \geq 15$
 $g+h \geq 17$



$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{10}$
 $\frac{AD}{BP} = \frac{3}{10}$

$S_{ACE} = k^2$
 $S_{CBF} = k^2$



3. $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x - \frac{3\pi}{2}$

$\arccos(d) \in [0; \pi]$

$x \in [0; \frac{7\pi}{2}]$

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$

$x = \frac{6\pi}{24} - d$

$\arccos(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$

$\arccos(\frac{\pi}{4} - d) = 5\pi - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - d$

$\frac{3\pi}{2} - \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\sin x = 5$

$6d = \frac{3\pi}{2}, d = \frac{3\pi}{24}$

$\pi = 5 \arccos(\sin x) + x, x = 2\pi + \alpha, d \in \pi \pm 5 \arccos(\sin d) + 2\pi + d, x = \frac{3\pi}{2}$

$d \in [-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$

$d \in [-\frac{13\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$

$k > \frac{6\pi}{24} - \frac{3\pi}{24} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$

$d = k\pi + d$
 $k \in (-4; 1)$

$\arccos(\cos d) = d$
 $7-4k < 24$
 $7+16 = 23 \text{ чл.}$
 $7-4 \geq 0$

$5d + d \sin x = \frac{3\pi}{4}$
 $d = \frac{(9-4)\pi}{24}$
 $d \in (0; \pi)$

$d_1 = -4\pi + \frac{23}{24}\pi$
 $d_2 = -3\pi + \frac{19\pi}{24}$
 $d_3 = -2\pi + \frac{15\pi}{24}$
 $d_4 = -\pi + \frac{11\pi}{24}$
 $d_5 = 0 + \frac{7\pi}{24}$
 $d_6 = \pi + \frac{3\pi}{24}$

$x_1 = 6\pi - \frac{13\pi}{24}$
 $x_2 = 3\pi - \frac{13\pi}{24}$
 $x_3 = 2\pi - \frac{9\pi}{24}$
 $x_4 = \pi - \frac{5\pi}{24}$
 $x_5 = -\frac{\pi}{24}$
 $x_6 = -\pi + \frac{3\pi}{24}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x + 3ay - 7b = 0$$

~~$$x + 3ay - 7b = 0$$~~

$$a = 0: x = 7b$$

0 - 2 решения.

$$(x^2 + 4x + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$x = 7b - 3ay$$

$$y = \frac{7b - x}{3a} = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$$

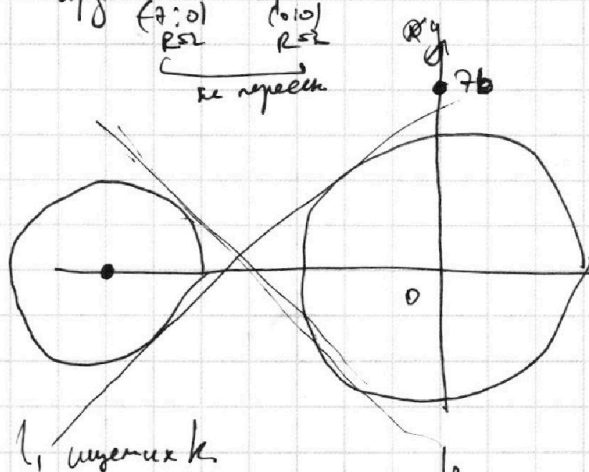
$$(x^2 + 4x + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$x = 7b - 3ay$: прямая, окружности - ~~7b~~ - 3a

сечение 7b.

прямая где ось ox.

осями координат (7; 0) ось ox (0; 0) ось oy
R=2 R=3
не пересекаются



1, 2 - их нет

$$y = (x+7)a, y^2 = 25 - x^2$$

одно решение

$$x^2 + (x+7)^2 a^2 = 25$$

~~$$D = \frac{49a^2 - 8 \cdot (49a - 25)}{4a^2} = 0$$~~

~~$$49a^2 - 249a + 200 = 0$$~~

$$x^2(a^2) + 14ax + 49a^2 - 25 = 0$$

~~$$D = \frac{196a^2 - 4 \cdot 49a^2 \cdot (49a^2 - 25)}{49a^2} = 0$$~~

~~$$49a^4 - 49a^4 - 49a^4 + 25a^2 = 25a$$~~

~~$$2x^2 + 14ax + 49a^2 - 25 = 0$$~~

~~$$7(a^2 - 1)^2$$~~

$$24a^2 - 25 = 0$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{25}{24}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

~~$$\frac{1}{3a} \in \left[0; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right]$$~~
~~$$\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right]$$~~

$$a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

$$a \in \left(-\infty; \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$

$$\log_7^4 t + \log_7^2 t = \log_7^2 7^2 - 4$$

$$t > 0, t \neq 1$$

$$\log_7 t, \log_7 y \neq 0$$

$$a, b \neq 0$$

$$\log_7^4 y + \log_7^2 y = \log_7^2 7^2 - 4$$

$$y > 0, y \neq 1$$

$$\log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{1}{1.5 \log_7 t} - 4$$

$$a^4 - \frac{1}{2a} = \frac{1}{1.5a} - 4$$

$$b^4 + \frac{1}{2b} = \frac{1}{2.5b} - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{1}{2 \log_7 y} = \frac{1}{2.5 \log_7 y} - 4$$

$$a^5 + 4a = \frac{7}{6} > 0$$

$$b^5 + 4b = \frac{7}{6} > 0$$

монотонные

$$a^5 + 4a = 5b^5 + 20b = \frac{7}{6}$$