МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$ $a,b,c \in \mathbb{N}$ $\min abc$ - ?

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$

Если $ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$, то его можно представить как $ab = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot k$, $k \in \mathbb{N}$

Также пусть $bc = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot m$, $m \in \mathbb{N}$

пусть $ac = 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot k \\ bc = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot m \\ ac = 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot n \end{cases}$$

Перемножим все 3 уравнения системы

$$a^2b^2c^2 = 2^{51}\cdot 7^{64} mnk$$

$$abc = \sqrt{2^{51}\cdot 7^{64}\cdot mnk} = 2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2mnk}$$

Минимальное значение mnk, такое, что $2^{25}\cdot 7^{32}\sqrt{2mnk} \in \mathbb{N}$ это 2. Тогда $\min abc = 2^{26}\cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Получаем~~ Из этого равенства следует, что $8ab \vdots m$. Но ни a, ни b по доказанному выше на m не делятся, значит $8 \vdots m$, а отсюда максимальное значение, принимаемое m это 8. Оно достигается например при $a=3$ $b=5$.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократимая

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ max m, такое, что $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$ - ?

Пусть есть такое m. Тогда верно следующее

$$\begin{cases} a+b \underset{m}{\equiv} 0 \\ a^2-6ab+b^2 \underset{m}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$a \underset{m}{\equiv} -b$. Это значит, что ни a, ни b на m делиться не должны, ведь если a делится, то $a \underset{m}{\equiv} 0 \underset{m}{\equiv} -b$, а это противоречит несократимости $\frac{a}{b}$.

Представим $a+b=km$, $k \in \mathbb{N}$

$a^2-6ab+b^2=nm$, $n \in \mathbb{N}$

Тогда имеем $\begin{cases} a+b=km \\ a^2-6ab+b^2=nm \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=k^2m^2 \\ a^2-6ab+b^2=nm \end{cases} \Big\downarrow -$$

$$8ab=k^2m^2-nm=m(k^2m-n)$$

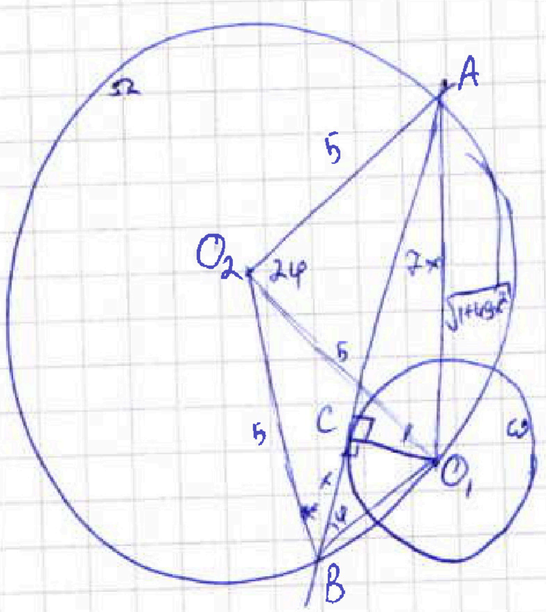
Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$R_\Omega = 5$

$R_\omega = 1$

$AC : CB = 7$ AB кас. ω

AB - ?

Решение:

1) Пусть $AB = 8x$, тогда $AC = 7x$ $BC = x$

~~Пусть $\varphi = $~~ Пусть O_1 - центр ω; O_2 - центр Ω

Пусть $\varphi = \angle O_1BC$

2) т.к. AB - касательная к ω $\angle O_1CA = 90°$; $\angle O_1CB = 90°$

3) по теореме Пифагора в $\triangle AO_1C$; в $\triangle CO_1B$

$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2$ $\qquad O_1B^2 = BC^2 + O_1C^2$

$AO_1 = \sqrt{1+49x^2}$ $\qquad O_1B = \sqrt{1+x^2}$

4) т.к. $\angle O_1O_2A$ - центральный для дуги $\smile AO_1$, на которую опирается вписанный $\angle O_1BA = \varphi$, то $\angle O_1O_2A = 2\varphi$

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) ~~cos φ~~ $\sin\varphi = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ в $\triangle O_1CB$

~~$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$~~

6) $O_1O_2 = O_2A = 5$ как радиусы Ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1O_2A$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle O_2O_1A = \angle O_2AO_1 =$

$= 90^\circ - \varphi$

7) по теореме косинусов в $\triangle O_1O_2A$

$$O_2A^2 = O_1O_2^2 + AO_1^2 - 2O_1O_2 \cdot AO_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{10\sqrt{1+49x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + 49x^2$$

$$\frac{10}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+49x^2}$$

$$\frac{100}{1+x^2} = 1 + 49x^2$$

$$100 = 1 + 49x^2 + x^2 + 49x^4$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = -\frac{99}{49}$ нет корней

$x = 1$

8) Т. к. $AB = 8x$ $\qquad$ $AB = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обратная замена

$$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$$

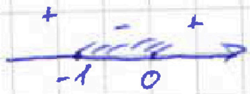
$$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \\ 2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2x+1}\ \cancel{\geq} \leq 1 \\ -7x+1=-2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+2x\leq 0 \\ 49x^2-14x+1=8x^2+8x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)\leq 0 \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases}$$



$x\in[-1;0]$

$$D=484+12\cdot 41=976$$

$$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{976}}{82}=\frac{22\pm 2\sqrt{244}}{82}=\frac{11\pm\sqrt{244}}{41}$$

$x=\frac{11+\sqrt{244}}{41}$ $x=\frac{11-\sqrt{244}}{41}$

не подходит под $x\in[-1;0]$

Ответ: $\frac{11-\sqrt{244}}{41}$; $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

ОДЗ: $2x^2-5x+3\geq 0 \quad (x-1)(x-\frac{3}{2})\geq 0$ $\quad + \quad - \quad +$ $\quad 1 \quad \frac{3}{2}$

$2x^2+2x+1\geq 0 \quad D=4-8<0$ всегда верно

$x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

~~т. к. $2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1)=2-7x$ можем заменить $\sqrt{2x}$~~

Замена $\sqrt{2x^2-5x+3}=a$

$\sqrt{2x^2+2x+1}=b$

$2-7x=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=a^2-b^2$

$a-b=a^2-b^2$

$a-b=(a-b)(a+b)$

1) $a-b=0$

$a=b$

Обр. замена $\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$

$7x=2 \quad \underline{x=\frac{2}{7}}$

2) $a+b=1$

Продолжение на обратной стороне

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a_1 = tg\alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$a_2 = tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

Ответ: $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$; $\pm\frac{1}{3\sqrt{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение случая 2

$\angle O_1BB_1 = \angle O_2BC_1$

$\angle BC_1O_2 = \angle BB_1O = 90^\circ$ по свойству касательной

Тогда $\triangle BO_1B_1 \sim \triangle BO_2C_1$ с коэф. $\frac{O_2C_1}{O_1B_1} = 2$

Пусть $BB_1 = x$, тогда по подобию $BC_1 = 2x$

По теореме Пифагора в $\triangle BO_2C_1$; в $\triangle BOB_1$

$BO_2^2 = O_2C_1^2 + BC_1^2$ $\qquad$ $BO_1^2 = B_1O_1^2 + BB_1^2$

$BO_2 = 2\sqrt{x^2+1}$ $\qquad$ $BO_1 = \sqrt{1+x^2}$

Так как расстояние между центрами окружностей равно 8

$BO_2 + BO_1 = 8$

$3\sqrt{x^2+1} = 8$

$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$

$x^2 = \frac{55}{9}$

$x = \frac{\sqrt{55}}{3}$

~~Так как Анал~~ Так как a в уравн. прямой $y = ax + \text{к}o\text{в}$ это тангенс её наклона $tg\alpha$ есть искомый a и $tg(180^\circ - \alpha)$ это a для второй прямой

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

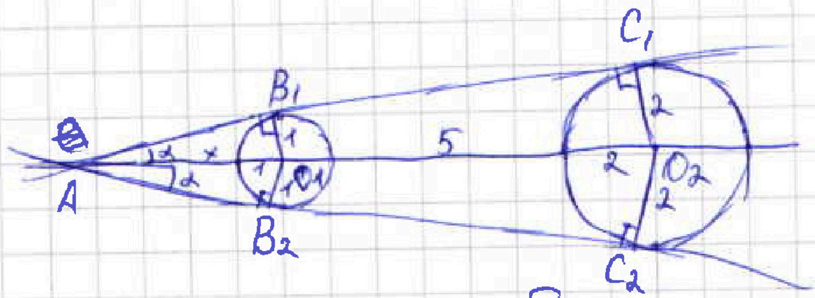
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Касания прямой и двух окружностей могут происходить только так, как показано на чертеже.

У нас 4 различных подходящих нам прямых

1) Рассмотрим ~~окружности~~ прямые, пересекающиеся в A. A будет лежать на оси Ox, ~~так как должно выполняться свойство касательных для~~



так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых.

Тогда Ox есть биссектриса угла $\angle A$, т. к. центры окружностей, лежащие на ней равноудалены от сторон угла.

Пусть $\angle A = 2\alpha$

B_1, C_1 — точки касания одной прямой с окружностями

B_2, C_2 — точки касания второй прямой с окружностями

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

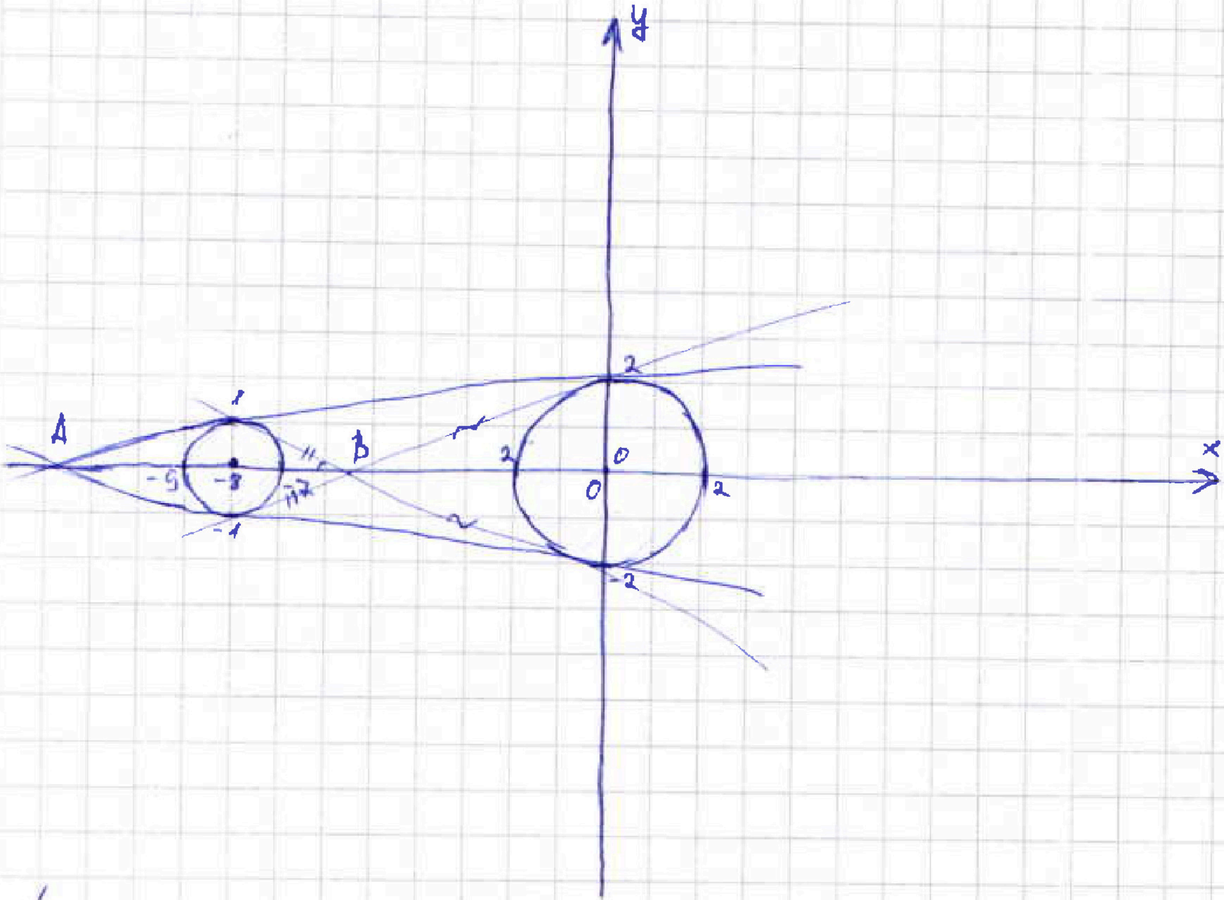
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \quad (2) \end{cases}$ $\quad y = ax + 10b \quad (1)$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ – окружность с ц. в $(-8;0)$ $R = 1$

$x^2 + y^2 = 4$ – окружность с ц. в $(0;0)$ $R = 2$



(Система имеет 2 решения, когда прямая $y = ax + 10b$ касается двух окружностей.)

(Решением нер-ва (2) будут области внутри окружностей, включая их границы)

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

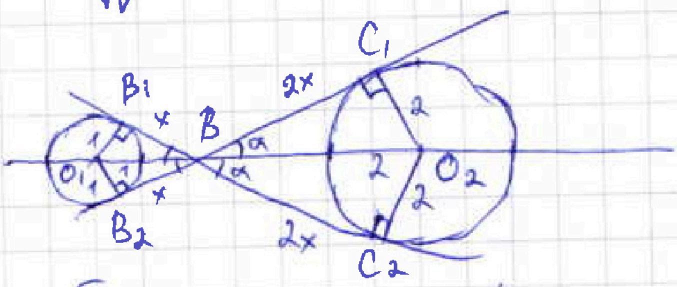
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

искомый a в этом случае это $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

Для прямой касающейся окружностей в точках B_2 и C_2 искомый a это $tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2) Рассмотрим ~~[illegible]~~, две прямые, пересекающиеся в B. B будет лежать на оси Ox, так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых



~~Ox есть биссектриса угла~~

Пусть B_1, C_2 – точки касания одной прямой с окружностями

B_2, C_1 – точки касания второй прямой с окружностями

$\angle C_1BC_2 = 2\alpha = \angle B_1BB_2$ как вертикальные

Так как BC_1 и BC_2 касательные $\Rightarrow$ Ox – биссектриса $\angle C_1BC_2$ и $\angle B_1BB_2$

Продолжение на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение случая 1

~~sin~~ Пусть расстояние от A до окружности $(x+8)^2+y^2=1$ это x

$\sin\alpha = \frac{1}{x+1}$ для ~~окружности~~ ~~прямоугольного~~ ~~треугольника~~ прямоугольного по свойству касательной треугольника AB_1O_1

$\sin\alpha = \frac{2}{9+x}$ для прямоугольного по тому же свойству $\triangle AC_1O_2$

Можем приравнять и получим

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$$

$$9+x = 2x+2$$

$$x = 7$$

По теореме Пифагора в $\triangle AB_1O_1$

$$AB_1^2 = B_1O_1^2 + AO_1^2$$

$$AB_1 = \sqrt{63}$$

Так как коэффициент a в уравнении прямой ~~это~~ $y=ax+\text{лов}$ это тангенс угла наклона

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Аналогично относительно M, середины $\smile AB$ и перпендикуляра MM' по этой же теореме $AM' = BM'$

3) т. к. M – середина $\smile AB$ CM – биссектриса $\angle ACB$, и поэтому проходит через I, центр вписанной окр. $\triangle ABC$

Аналогично BN – биссектриса $\angle CBA$

4) $\angle CBN = \angle ABN = \angle CAN$ как ~~лежащие на одной~~ вписанные, опирающиеся на равные дуги

$\angle BCM = \angle ACM = \angle BAM$ как вписанные, опирающиеся на равные дуги

5) Пусть $AC = 2a$, тогда $AN' = CN' = a$

$AB = 2b$, тогда $AM' = BM' = b$

~~6) по т. синусов в $\triangle ABC$~~

~~AC~~

6) ~~$\sin\beta = \frac{MM'}{AM'} = 4{,}5$~~

6) по теореме Пифагора в $\triangle AMM'$; в $\triangle NAN'$

$AM^2 = MM'^2 + AM'^2$ $\qquad$ $NA^2 = N'A^2 + NN'^2$

$AM = \sqrt{4{,}5^2 + b^2}$ $\qquad$ $NA = \sqrt{a^2 + 4}$

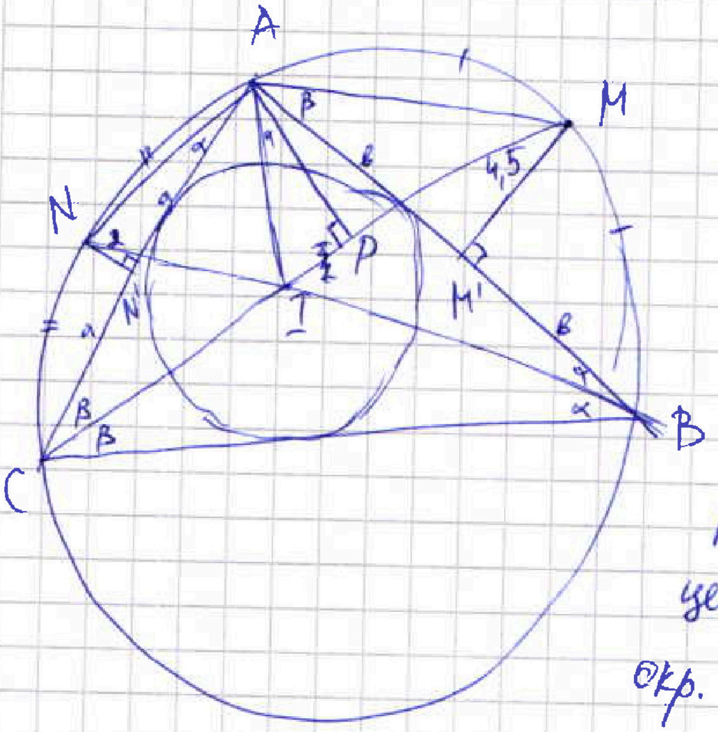
Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



M – середина $\cup AB$

N – середина $\cup AC$

расстояние от

M до $AB = 4,5$

от N до $AC = 2$

расстояние от A до центра вписанной окр. $\triangle ABC$ – ?

Решение

1) пусть I – центр вписанной окружности $\triangle ABC$

$\angle NAC = \alpha$ $\quad$ MM' – расстояние от M до AB

$\angle BAM = \beta$ $\quad$ NN' – расстояние от N до AC

2) NN' перпендикуляр к хорде AC, описанной окружности $\triangle ABC$, проходящий через середину $\cup AC$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме о радиусе, ~~??~~ перпендикулярном хорде $AN' = CN'$ и прямая NN' содержит центр описанной около $\triangle ABC$ окружности

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7) $\sin\beta = \frac{MM'}{AM} = \frac{4{,}5}{\sqrt{4{,}5^2+b^2}}$ в $\triangle AMM'$

$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{4{,}5^2+b^2}} = \frac{AM'}{AM}$

$\sin 2\beta = \frac{9b}{4{,}5^2+b^2}$

8) $\sin\alpha = \frac{NN'}{AN} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ в $\triangle ANN'$

$\cos\alpha = \frac{AN'}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

$\sin 2\alpha = \cancel{\frac{4a}{\sqrt{a^2+4}}}\ \frac{4a}{a^2+4}$

9) по т. синусов для $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2b(4{,}5^2+b^2)}{9b} = \frac{2a(a^2+4)}{4a}$$

$$4{,}5^2\cdot 4 + 4b^2 = 9a^2 + 36$$

$$b^2 = \frac{9}{4}a^2 + 9 - 4{,}5^2$$

10) дополнительное построение $AP \perp CH$

11) т. к. AI проходит через I – центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то AI – биссектриса $\angle BCA$

12) $\angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

$\angle CAI = \frac{1}{2}\angle BCA = 90^\circ - \alpha - \beta$ Продолж. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

13) $\angle CAP = 90^\circ - \angle ACP = 90^\circ - \beta$

$\angle IAP = \angle CAP - \angle CAI = 90^\circ - \beta - 90^\circ + \beta + \alpha = \alpha$

14) $\sin\beta = \frac{AP}{A\cancel{B}C}$ в $\triangle APC$

$\frac{AP}{A\cancel{B}C} = \frac{4{,}5}{\sqrt{4{,}5^2 + b^2}}$

Подставим b^2 из пункта 9 решения

$\frac{AP}{A\cancel{B}C} = \frac{4{,}5}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + 9}} = \frac{4{,}5}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} \Rightarrow AP = \frac{\overset{3}{\cancel{4{,}5\cdot 2}}\,\cancel{B}\,a}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

15) $\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,\alpha = \frac{AP}{AI}$ в $\triangle API$

$\frac{AP}{AI} = \frac{\cancel{2}\,a}{\sqrt{a^2 + 4}} = \cancel{\frac{2b\,a}{2\cancel{B}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}} \quad \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

Подставим AP из пункта 14 решения

$\frac{3a}{AI\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

$\frac{3}{AI} = \frac{1}{2}$

$AI = 6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{\begin{cases} y=ax+10b \\ x^2+y^2=4 \end{cases}}$

$\sqrt{1+x^2}-1+2\sqrt{1+x^2}-2=8$

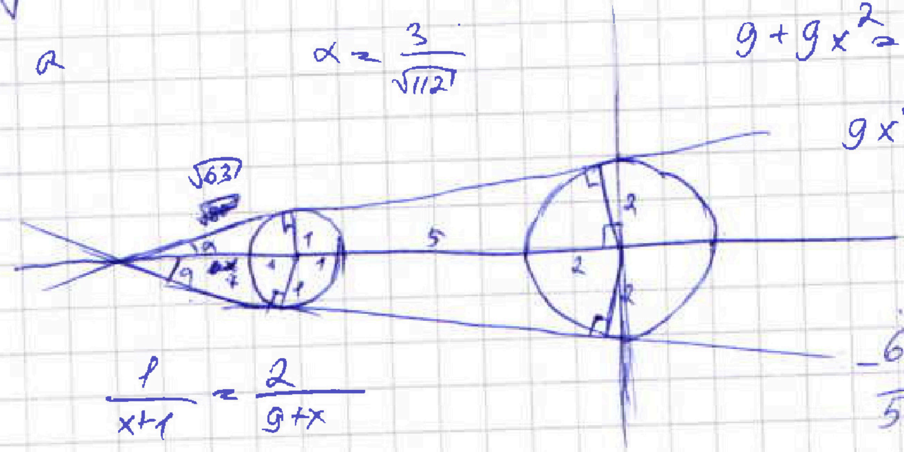
$3\sqrt{1+x^2}=11$ $\quad \cancel{1+x^2}$

$9+9x^2=121$

a $\quad \alpha=\frac{3}{\sqrt{112}}$

$9x^2=112$

$x^2=\frac{112}{9}$



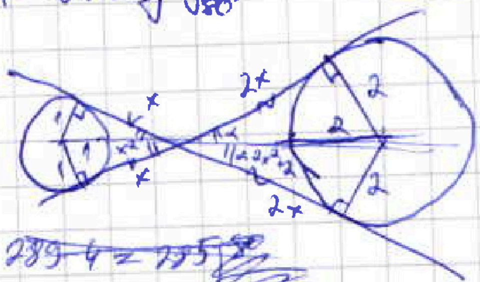
$\frac{1}{x+1}=\frac{2}{9+x}$

$\begin{array}{r} -64 \\ 9 \\ \hline 55 \end{array}$

$9+x=2x+2$ $\quad x=7$

~~$a=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{80}}$~~ $\quad$ ~~$a=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{80}}$~~

$-252\,|\,4$



$\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt2}$

$5+3x^2=8$

$x^2=1 \quad x=1$

~~$289-4=$~~

~~$a=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt7}$~~

$\cancel{\begin{cases} x^2+20ab\,x+100b^2-4=0 \\ x^2+16x+64 \end{cases}}$

$\begin{cases} (a+1)x^2+20abx+100b^2-4=0 \\ (a+1)x^2+\overset{2\cdot(8+10ab)}{(16+20ab)}x+100b^2+63=0 \end{cases}$

$a=\frac{1}{3\sqrt7}$

$100b^2-4=k^2$

$100b^2+63=t^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\frac{a}{b}$ – несокр

НОД$(a+b; a^2-6ab+b^2)$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = a-7b+\frac{8b^2}{a+b}$ $a-7b$ $8b^2$ ост

$\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$ $\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$ $a+b-\frac{8ab}{a+b}$

$\frac{a+b}{8b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{8b}$ $(a;b)=1$ $\frac{\frac{(a+b)^2}{b}-8a}{\frac{a}{b}+1}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $a=3$ $b=5$ $a\equiv_b x$ $a^2\equiv_b x^2$ $x^2\equiv_b$

$9-6\cdot3\cdot5+25$ 90 81 25 56

$a\equiv_m -b$ $y=ax+10b$ $y=\frac{3}{8}x+2$ $\begin{cases} a+b\equiv_m 0 \\ a^2-6ab+b^2\equiv_m 0\end{cases}$

$ab\equiv_m -b^2$

вида не $:m$

$\begin{cases} a+b=km \\ a^2-6ab+b^2=hm \end{cases}$ $\begin{cases} 2=10b \\ -1=-8a+10b \end{cases}$

$9-6\cdot3\cdot5+25=34-90=56$

$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=k^2m^2 \\ a^2-6ab+b^2=hm \end{cases}$ $-1=-8a+2$ $8a=3$ $a=\frac{3}{8}$ $b=\frac{2}{10}$

$\begin{cases} y=\frac{3}{8}x+2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 1k

$8ab=m(k^2m-h)$ b

$8ab\,\vdots\, m$ 64 9 3

$\vdots m \vdots m$ $x^2+\frac{9}{64}x^2+\frac{3}{2}x+4=4$

$8\frac{a}{m}b=1$

8 $x\left(\frac{73}{64}x+\frac{3}{2}\right)=0$ $x=-\frac{3}{2}\cdot\frac{64}{73}^{32}=-\frac{96}{73}$

$8ab\equiv_m 0$

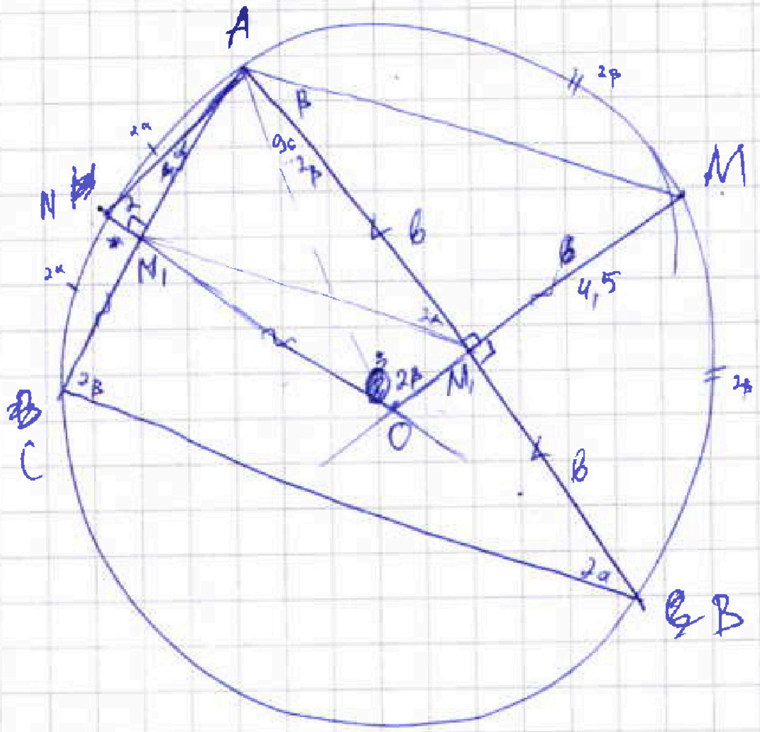
$-8b^2\equiv_m 0$ $\begin{cases} \cancel{y=\frac{3}{8}} \; y=ax+10b \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 1k $\begin{cases} y=ax+10b \\ (x+8)^2+y^2=1 \end{cases}$ 1k

$-8\equiv_m 0$ $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = 4{,}5 \quad b = 2$

$R - ?$

$360 - 9\alpha - 2\beta$

$360 - 2\alpha - 2\beta$

$\sin\beta = \frac{4{,}5}{\sqrt{4{,}5^2+b^2}}$

$\cos\beta = \frac{b}{}$

$\sin 2\beta = \frac{9b}{4{,}5^2+b^2}$

$\frac{AB}{2\sin 2\beta} = R$

$R = \frac{4{,}5^2+b^2}{9}$

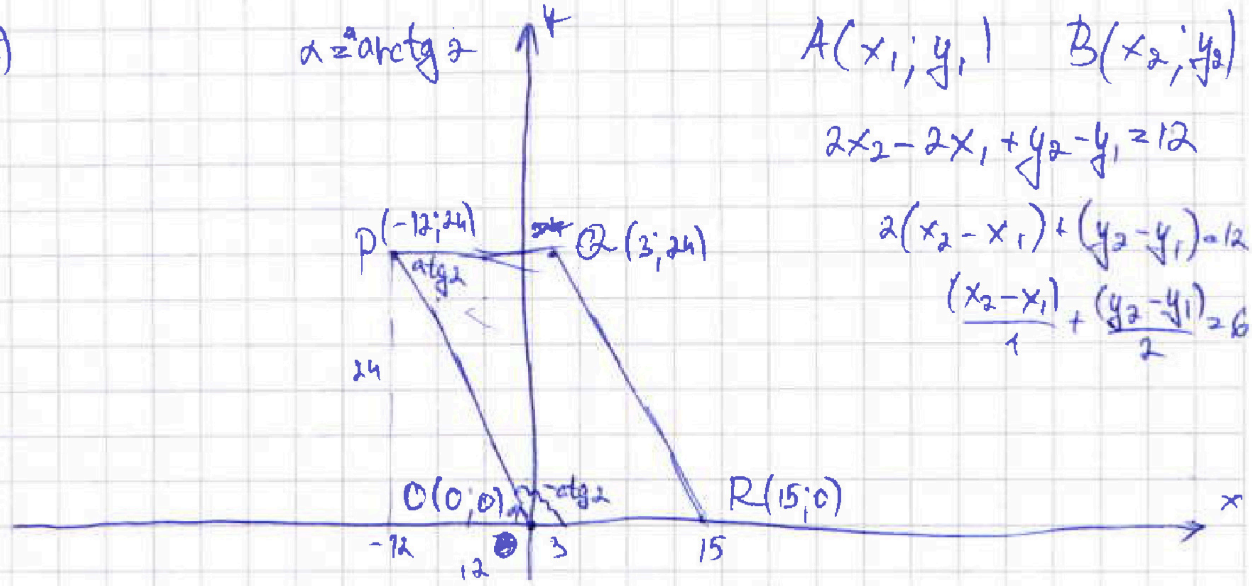
$\cancel{\frac{9b}{4{,}5^2+b^2}} =$

$\frac{2^2+a^2}{4} = \frac{b(4{,}5^2+b^2)}{9b} = R$ $\quad \cancel{3^2 + 2\cdot\frac{9}{8}a}$

$36 + 9a^2 = 4\cdot 4{,}5^2 + 4b^2 \qquad b^2 = 9 + \frac{9}{4}a^2 - 4{,}5^2$

5)

$\alpha = \operatorname{arctg} 2$



$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

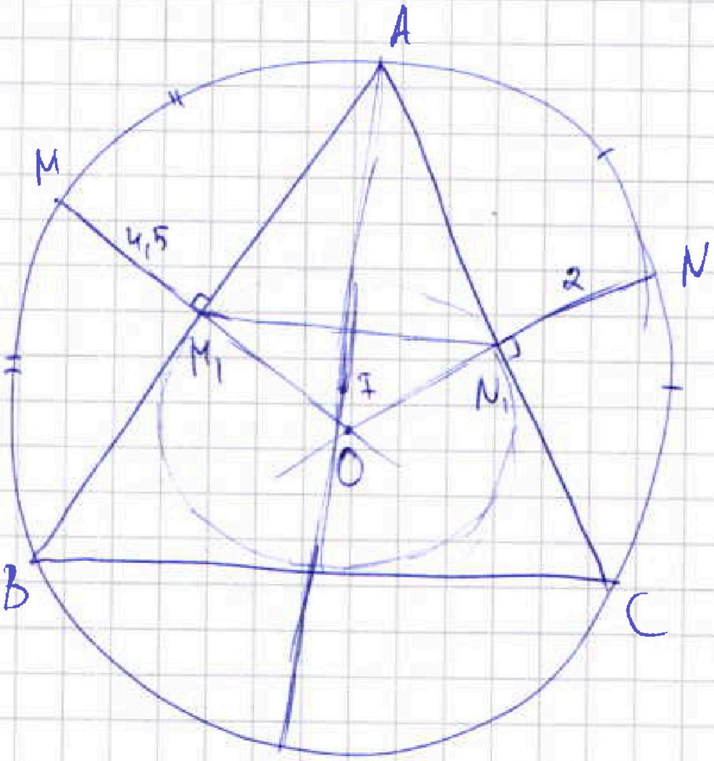
$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$\frac{(x_2-x_1)}{1} + \frac{(y_2-y_1)}{2} = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) sin, т. sin

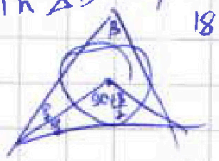
в через a

2) перпенд к BP

3) $\angle BIA = 90 + \frac{\beta}{2}$

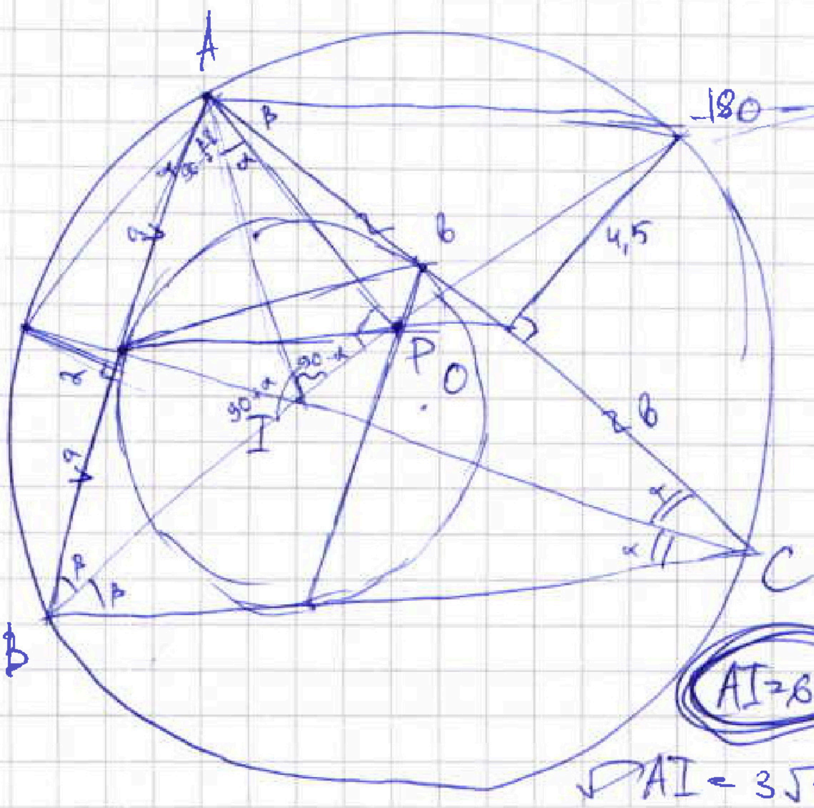
4) sin $\triangle BAP$, $\triangle IAP$

$180 - \beta - \alpha$



$180 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$



$180 - 90 + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - \beta = 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$

$\frac{AP}{2a} = \frac{4,5}{\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$

$AP = \frac{9a}{\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$

$\frac{9a}{AI\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

AI=6

$\frac{9}{3AI\sqrt{1 + \frac{1}{4}a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$

$AI = 3\sqrt{4(\frac{1}{4}a^2 + 1)} = 6\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $ab \vdots 2^{14}7^{10}$ $\min abc - ?$

$bc \vdots 2^{17}7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}7^{37}$

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}k$ $a^2b^2c^2 = 2^{51}\cdot 7^{74}\, mnk$

$bc = 2^{17}\cdot 7^{17}m$ $abc = 2^{25}\cdot 7^{37}\cdot\sqrt{2mnk}$ $m=2$ $n=1$ $k=1$

$ac = 2^{20}\cdot 7^{37}n$ $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$

$37 + 14 = 51$; $27 + 37 = 64$; $27+37=74$

$976 : 4 = 244$

2) $\frac{a}{b}$ несокр $\quad$ НОД$(a+b,\ a^2-6ab+b^2) - ?$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$a^2-6ab+b^2 \,|\, a+b$
$-(a^2+ab)$ $\quad a-7b$
$-7ab+b^2$
$-(-7ab-7b^2)$
$8b^2$

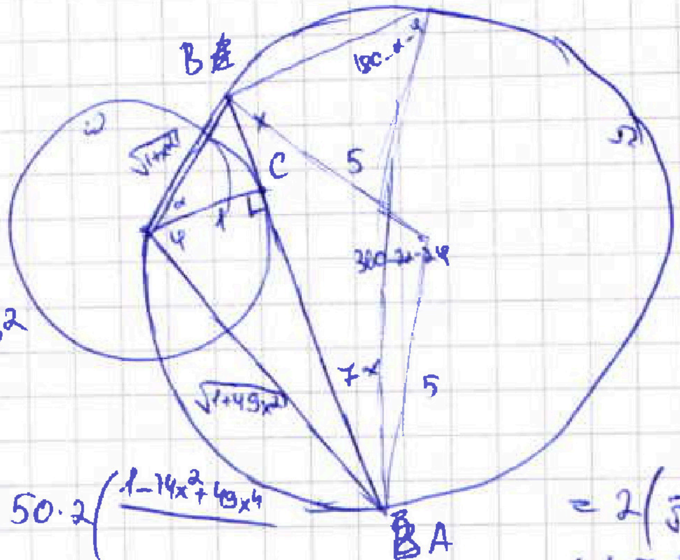
$\frac{26}{41}$

$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$\frac{180-360+2\alpha+2\varphi}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad 1-\frac{2}{1+x^2}$ $\quad R_\omega = 1$ $\quad R_\Omega = 5$ $\quad \cancel{x^2-6x+1}$ $\quad \frac{AC}{CB} = \frac{7x}{x}$

3) $8x - ?$



$\cancel{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}$

$\cos(2\pi-2\alpha-2\varphi) =$

$= \cos(2(\alpha+\varphi)) =$

$= 2\cos^2(\alpha+\varphi)-1 =$

$a-b = a^2-b^2$

$64x^2 = 50-50\cdot 2\left(\frac{1-14x^2+49x^4}{}\right.$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+49x^2}} - \frac{7x\cdot x}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}\right)^2 - 1$

$= 2\left(\frac{1-7x^2}{\sqrt{\ }}\right)^2 - 1$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 =$

$= -7x+2$

$41\cdot 12 = 492$; $492 + 484 = 976$; $22\cdot 22 = 484$; $31\cdot 31$; $41\cdot 12 = 492$