



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть k, m и n — такие натуральные числа, что

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} ac: 2^{23} \\ bc: 2^{17} \\ ab: 2^{15} \end{array} \right\} \Rightarrow abc: 2^{23} \quad \left. \begin{array}{l} ac: 7^{39} \\ ab: 7^{11} \\ bc: 7^{18} \end{array} \right\} \Rightarrow abc: 7^{39}$$

Пусть r, s и t — такие натуральные числа, что

$$abc = r \cdot 2^s \cdot 7^t \quad \text{Тогда } s \geq 23, \quad t \geq 39$$

$$3) \quad ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2kmn}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow 2kmn \text{ — точный квадрат} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kmn \geq 2 \quad \text{Так как нам нужно найти}$$

$$abc, \text{ а } abc \text{ — не простое. Тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$4) \text{ Получается } s \geq 28, \quad t \geq 34 \quad \sqrt{\frac{kmn}{2}}$$

Вместе с уже имеющимися условиями $s \geq 28, t \geq 39,$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \quad n \geq 1$$

$$5) \text{ Пример. Пусть } a = 2^{11} \cdot 7^{21}, \quad b = 2^4, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}, \quad ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \cdot (15 \cdot 7^{11}), \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{38} \cdot (2^{17} \cdot 7^{18})$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39} \cdot (2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$\text{Ответ. } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~1) $\frac{a}{b}$ - несократима \Rightarrow 1) Пусть $a+b = k \cdot m$~~

$$2) \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+4ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

3) Дробь можно сократить на m .

$$\frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2-9ab}{m}} = \frac{k}{k^2m-9ab} \Rightarrow 9ab : m$$

4) Если $a : m$ или $b : m$, то так как $(a+b) : m$, то и второе число $: m$, но дробь $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow a \not: m$ и $b \not: m$.

$$\text{Но } 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m \leq 9$$

5) Максимум $m = 9$. Пример

~~$$a = 5, b = 4 : \frac{5+4}{25-7 \cdot 5 \cdot 4+16} = \frac{9}{41}$$~~

$$a = 1, b = 8 : \frac{1+8}{64-56+1} = \frac{9}{9} = 1$$

Ответ: при $m = 9$.

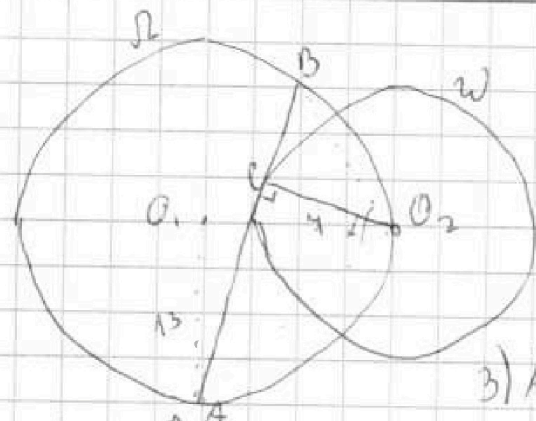
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть O_1 - центр Ω , O_2 - центр Ω_2 .
 $a < BO_2$, $A = A$, $AO_2 = 17x$, $AB = 4x$

2) $\triangle AOB$ - вписан в $\Omega \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 13 \Rightarrow 4x = 26 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AO_2B} = \frac{BO_2 \cdot AO_2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{4 \cdot 13}{2}$$

3) AB - касат. $\Rightarrow O_2C \perp AB \Rightarrow S_{AO_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot OC$

$$4) \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot 4 \Rightarrow AO_2 \cdot BO_2 = \frac{4 \cdot x \cdot 13}{2} = 13 \cdot 4x$$

5) По т. косинусов в $\triangle AO_2B$. 5) По т. Пифагора в $\triangle BO_2C$

$$\triangle BO_2C: BO_2 = \sqrt{(4x)^2 + 4^2} \quad \triangle ACO_2: AO_2 = \sqrt{(4x)^2 + 7^2}$$

6) По т. косинусов в $\triangle BO_2A$

$$(4x)^2 = (17x)^2 + 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 17x \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$576x^2 = 289x^2 + 32 - 136x \cos \alpha$$

$$284x^2 = 32 - 136x \cos \alpha \Rightarrow 47 - 69x \cos \alpha = 182 \cos \alpha$$

$$x = \frac{13}{12} \sin \alpha \quad (u_3 \text{ n. 2}) \Rightarrow x^2 = \frac{169}{144} \sin^2 \alpha = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

$$47 - 69 \cdot \frac{13}{12} \cos \alpha = 182 \cos \alpha$$

$$284x^2 = 49x^2 + 2 \cdot 4^2 - 26 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$41x^2 = 7x^2 + 14 - 52 \cdot \cos \alpha$$

$$34x^2 + 52 \cdot \cos \alpha - 14 = 0 \Leftrightarrow 17x^2 + 26 \cdot \cos \alpha - 7 = 0$$

$$x^2 = \frac{182}{144} \sin^2 \alpha \quad (u_3 \text{ n. 2}) = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

$$17 \cdot \frac{169}{144} (1 - \cos^2 \alpha) + 26 \cdot \cos \alpha - 7 = 0$$

$$u_3 \text{ n. 2: } \sin \alpha = \frac{12}{13} x \Rightarrow \cos^2 \alpha = \left(\frac{5}{13} x\right)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a) Пусть $\cos \alpha = \frac{5}{13}x$.

$$17x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 - \text{не подходит} \\ x = \frac{4}{17} \end{cases}$$

b) Пусть $\cos \alpha = -\frac{5}{13}x$.

$$17x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{17} < 0 - \text{не подходит} \end{cases}$$

$$13 > 4 \Rightarrow \overset{\text{минимум}}{AB} > 180^\circ \Rightarrow \angle AOB > 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$x = \frac{4}{17} \Rightarrow AB = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 2x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \begin{matrix} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{matrix}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 2x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + \downarrow \text{переход к следствию!!!}$$
$$- 2x + 1 - (1 - 2x)^2 = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-(1 - 2x)(1 - 2x - 1) = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$2x(1 - 2x) = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$81x^2(1 - 2x)^2 = 4(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1) \quad \downarrow \text{переход к следствию!!!}$$

$$1 - 2x = 0$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

\Leftrightarrow

$$1 = 2x$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 =$$

$$= 16(69 + 9) = 16 \cdot 78$$

~~Проверка так как были переходы~~

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Проверка (так и как были переходы к следствию и не проверили условия на существование корней)

$$1) x = \frac{1}{9}: \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{27}{81} + \frac{81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} = 0 \checkmark$$

$$2) x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{3 \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 - 6 \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right) + 2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

~~1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}~~

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}}$$

$$69 + 23\sqrt{3} \sqrt{6 + 2\sqrt{48}}$$

$$63 + 23\sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{48}}$$

$$63 + 23\sqrt{3} > 18 \geq 2 \cdot \sqrt{81} > 2\sqrt{48}$$

Не существует ~~3~~ корня $\Rightarrow x \neq \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$

3) $x = \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}$ Чтобы вместо следствий были равносильные переходы должно выполняться

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (D = 9 - 12 < 0) \\ (1-x) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x^2 + 1} \geq 0 \\ 2x(1-x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x \quad (1) \\ 1 - 9x \geq 0 \quad (2) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 1 - 18x + 81x^2 \\ 2x \geq \frac{1}{9} \quad (3) \\ 2x \leq 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}}$$

$$69 - 23\sqrt{3} \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$63 + 2\sqrt{48} \geq 63 + 23 \cdot 2 > 23\sqrt{2} \Rightarrow (1) \text{ верно}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~(1) $20x^2 - 21x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 20x^2 - 420 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 21$~~

(2) $1 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{9}$

$\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow$ (2) - верно

(3) $\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0$ - верно

$x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$ - является корнем

Ответ: $x = \frac{1}{9}$ или $x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

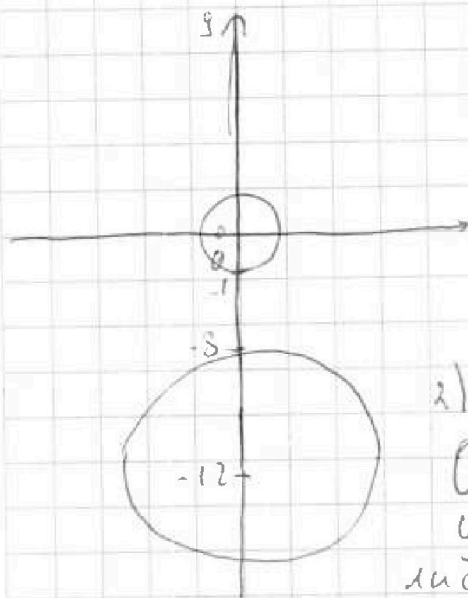
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$ - график окружности с центром $(0; 0)$ и $R = 1$
 $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - график окружности с центром $(0; 12)$ и $R = 4$



Решениями не равенства являются точки, лежащие внутри одной окружности и вне второй а так как окружности не пересекаются, то просто точки внутри окружностей (или ка или)

2) $y = 8b - ax$ - уравнение прямой.

С каждой из окружностей y к x
либо 0 пересечений $\Rightarrow 0$ решений
либо 1 пересечение $\Rightarrow 1$ решение
либо 2 пересечения \Rightarrow бесконечно мно-
го решений

3) Нулю 2 решения $\Rightarrow y = 8b - ax$ - касательная к обеим окружностям

4) $y = 8b - ax$ - касат к $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1$ решение y

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax)^2 = 1 - \text{решение}$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4 \cdot (64b^2 \cdot (a^2 + 1)) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256b^2 \stackrel{+14a^2+4}{=} 0 \Rightarrow \cancel{256a^2} + 1 = 64b^2$$

5) $y = 8b - ax$ - касат. к $x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow 1$ решение

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \quad - 1 \text{ решение}$$

$$x^2 + 64b^2 - 8bax - 96b - 8bax + a^2x^2 + 12ax - 96b + 12ax + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(24a - 16ab) - 192b + 128 = 0$$

$$D = (24a - 16ab)^2 + 4(a^2 + 1)(192b - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 4(192a^2b - 128a^2 - 192b - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 768a^2b - 512a^2 + 768b - 768 = 0$$

$$64a^2 - 256a^2b^2 + 384a^2b + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404a^2(b^2 + b + 1) + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404(a^2 + 1) \cdot 64b^2 - 404b \cdot 404 + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404 \cdot 64b^2 - 404b^2 + 64b - 1472 = 0$$

$$404 \cdot 63b^2 + 64b - 1472 = 0$$

$$D = 64^2 + 4 \cdot 1472 \cdot 404 \cdot 63 = 4(32^2 + 1472 \cdot 404 \cdot 63) =$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{192} \\ 768 \\ \hline 160 \\ 384 \\ \hline 384 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 404 \cdot 4 \\ 166 \\ \hline 30 \\ \hline 28 \\ \hline 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} &= 16(16^2 + 176 \cdot 63 \cdot 1472) = 32 \sqrt{64(8^2 + 44 \cdot 63 \cdot 1472)} = \\ &= \cancel{16^2} (4^2 + 11 \cdot 63 \cdot 1472) = 32^2 (2^2 + 11 \cdot 63 \cdot 368) = \\ &= 64^2 (1 + 693 \cdot 92) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{693} \\ 22 \\ \hline 1386 \\ 6237 \\ \hline 64756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64754 = 25 \\ \hline 4 \\ 45247 \\ 5225 \\ \hline 50 \cdot 72257 \end{array}$$

$$b = \frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463}$$

$$a = \pm \sqrt{\left(\frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

$$\text{Ответ при } a = \pm \sqrt{\left(\frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y^2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ -12 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{24} \quad \begin{array}{r} 52 \\ 17 \\ \hline 38 \\ 17 \end{array}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) + 8 = \frac{69 \cdot 4}{81} + \frac{24}{9} + 0$$

$$\frac{12}{24} \quad \frac{23}{3} \quad +4 +4$$

$$3x^2 - 6x + 2 > 0$$

$$D = 36 - 24 = 8$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 7(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$2\sqrt{(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)} = (1 - 9x)^2 + 9x - 1 \quad (69 - 23\sqrt{2} < 6 - 2\sqrt{15})$$

$$2\sqrt{(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)} = (9x - 1)(9x - 9x) \quad (3 + 2\sqrt{15} > 2\sqrt{2})$$

$$4(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2(1 - 9x)^2(1 - 9x)$$

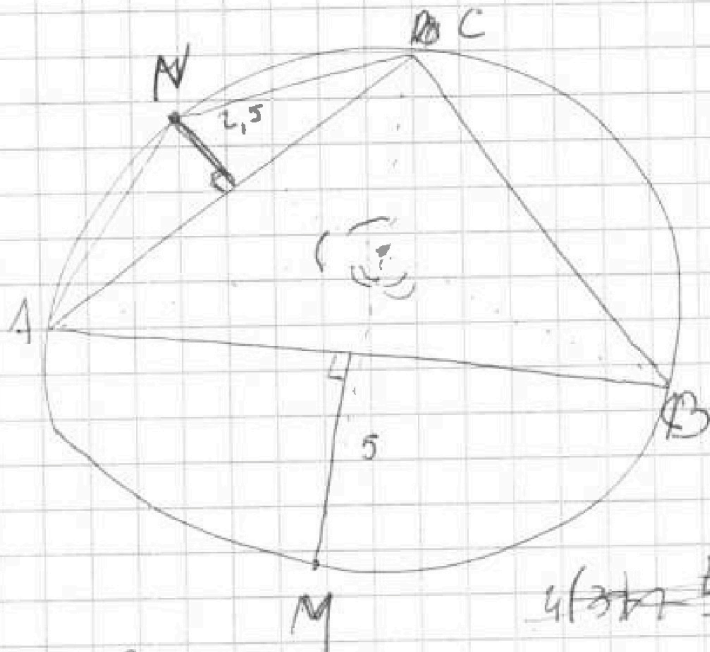
$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2 - 429x^3$$

$$429x^3 - 81x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\frac{165}{54} \quad \frac{81}{2} \quad \frac{81}{24}$$

$$46 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 7\frac{1}{3} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{6 - 2\sqrt{15}}{69} \quad 6x - 3x = -6x + 1 - 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times 3 \\ \hline 1044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ 62 \text{ } 1 \\ \hline 414 \\ \hline 476 \text{ } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{78} \\ 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{14} \\ 6 \\ \hline 2484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ 6 \\ \hline 414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4761} \\ 2 \\ \hline 9522 \end{array}$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{3(36 + 312 - 24\sqrt{78})} - 414(6 - 2\sqrt{78}) + 9522$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{1044 - 42\sqrt{78}} - 2484 + 328\sqrt{78} + 9572$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{6 + 2\sqrt{18}}{69}$$

$$69 + 23\sqrt{2} > 6 + 2\sqrt{78}$$

$$63 + 23\sqrt{2} > 2\sqrt{78}$$

⊗

$$1 - \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

69 -

$$69 - 23\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 6 - \sqrt{78}$$

$$63 - 23\sqrt{3} \overset{>}{\vee} -2\sqrt{78}$$

$$69 \overset{>}{\vee} 6 - 2\sqrt{78}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \overset{>}{\vee} \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$1 + 3 \cdot$$

$$63 + 2\sqrt{78} \overset{>}{\vee} 23\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \sqrt{109} \\ 67 \times 14 \\ \hline 114 \\ 14 \\ \hline 119 \\ + 14 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{169} \\ 69 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ \hline 19661 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \\ 42 \\ \hline 1396 \\ 546 \\ \hline 7156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{182} \\ 144 \\ \hline 728 \\ 1428 \\ \hline 182 \\ \hline 26208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{24} \\ 24 \\ \hline 24 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{11661} \\ 10 \\ 7156 \\ \hline 4505 \\ 10 \\ 41 \\ - 4 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{576} \\ 289 \\ \hline 289 \\ \hline 287 \end{array}$$

$$4156 - 11661 + 11661 \cdot \cos^2 \alpha = 26208 \cdot \cos \alpha \quad \begin{array}{r} 2543 \\ 1005 \\ \hline 2565 \end{array}$$

$$11661 \cos^2 \alpha - 26208 \cdot \cos \alpha + 4505 = 0 \quad \begin{array}{r} 2543 \\ 1005 \\ \hline 2565 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{169} \\ 14 \\ \hline 1183 \\ + 169 \\ \hline 2873 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1865 \mid 5 \\ \hline 75 \quad 313 \quad 26 \\ 36 \\ \hline \times 144 \\ 4 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \\ 26 \\ \hline 864 \\ 288 \\ \hline 3444 \end{array}$$

$$2543 - 2543 \cos^2 \alpha + 3444 \cdot \cos \alpha - 1005 = 0$$

$$- 2543 \cos^2 \alpha + 3444 \cdot \cos \alpha + 1865 = 0$$

$$D = 144^2 \cdot 12^4 \cdot 26^2 - 4 \cdot 169 \cdot 14$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13} x$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} x$$

$$y = kx + b$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{13} x$$

$$2x_2 + (kx_2 + b) - (x_1 + kx_1 + b)$$

$$(x_2 - x_1)(k + 2) = 14$$

$$x_2(k + 2) + b - (x_1)(k + 2) \rightarrow b = 14$$

$$\# 14 \div (k + 2)$$

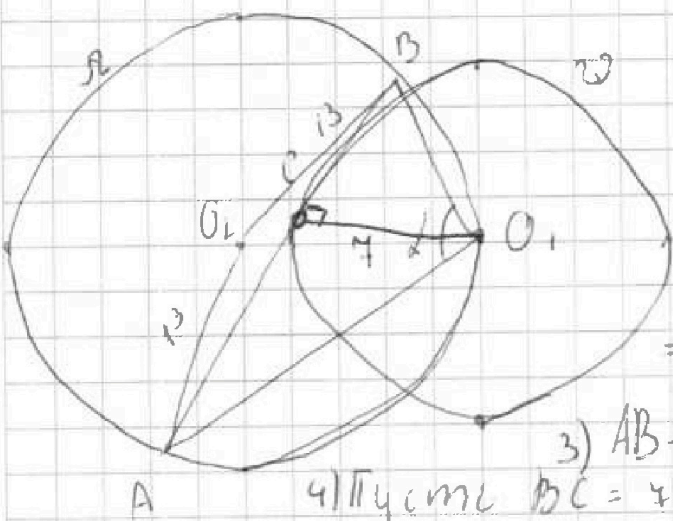
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть O_1 - центр ω ;
 O_2 - центр Ω

2) Пусть $\angle BO_1A = \lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{BA} = 2\lambda \Rightarrow \widehat{BO_1A} = 360^\circ - 2\lambda$$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = 360^\circ - 2\lambda$$

3) AB - касат $\Rightarrow O_1C \perp AB$

4) Пусть $BC = 4x \Rightarrow AC = 14x$

5) По т. косинусов в $\triangle BO_2A$ $(24x)^2 = 169 + 169 - 2 \cdot 13^2 \cdot$

5) $O_1C \perp AB \Rightarrow BO_1 = \sqrt{(4x)^2 + 4^2}$; $AO_1 = \sqrt{(14x)^2 + 4^2}$
(по т. Пифагора в $\triangle BO_1C$ и $\triangle AOC$)

6) По т. косинусов в $\triangle BO_1A$:

$$(24x)^2 = 49x^2 + 49 + 787x^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{(y^2 + 1)(1 + x^2 + 49)} \cdot \cos \lambda$$

7) По т. синусов в $\triangle BO_1A$: $26 = \frac{26}{\sin \lambda}$

8) Возвращаясь

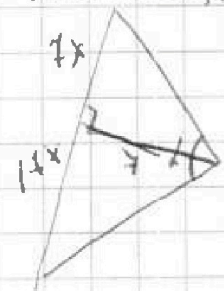
$$24x = \frac{26}{\sin \lambda}$$

$$y = 8b - ax$$

$$y^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 11)^2 = 16$$

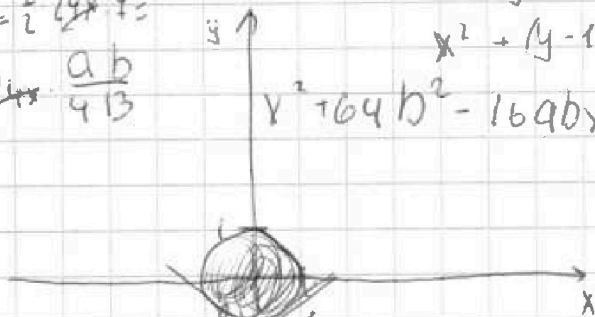
$$y^2 + 64b^2 - 16abx + ax^2 = 1$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot 24x \cdot 4 = 24x \cdot \frac{ab}{4b}$$

1 рш $\frac{26}{364}$

1 рш



$$\begin{array}{r} +289 \\ 49 \\ \hline 10 \quad 338 \\ -576 \\ \hline 338 \\ 138 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 2 &\geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

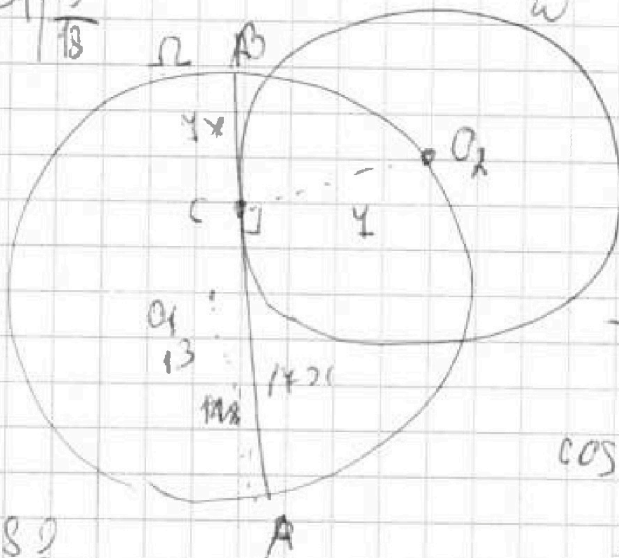
$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 18x + 8x^2$$

$$-45x^2 + 15x + 3 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$45^2 x^4 - 2 \cdot 45 \cdot 15x - 2 \cdot 3 \cdot 45x^2 + 15^2 x^2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ +24 \\ \hline 48 \\ \hline 546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \overline{) 3} \\ \underline{18} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$



$$24^2 x^2 = 2169 + 2 \cdot 162 \cdot \cos \alpha$$

$$24^2 x^2 = 49x^2 + 49 -$$

$$+ 49x^2 + 289 -$$

$$- 24\sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 289)} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 162} - 1$$

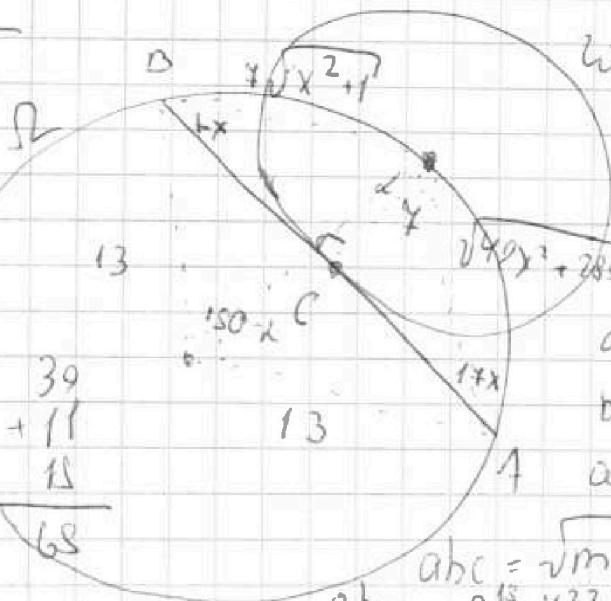
$$576x^2 = 64 - 1,8$$

$$\frac{210}{576}$$

$$64 - 56,1$$

$$\frac{28}{448}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ +49 \\ \hline 338 \end{array}$$



$$4 \cdot 48x^2 - 289 =$$

$$\sqrt{49x^2 + 289} = -14\sqrt{(49x^2 + 338x^2 + 289)}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 4^{11} \cdot m \quad m \cdot k \cdot n = 7^2 \cdot 4$$

$$ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot n$$

$$abc = \sqrt{m \cdot k \cdot n} \cdot 7^{55} \cdot 4^{68}$$

$$abc = 2^{15} \cdot 4^{22} \cdot \sqrt{2 \cdot 4^2 \cdot m \cdot k \cdot n} \quad abc = 2^{20} \cdot 4^{23}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$ ($k \in \mathbb{N}$), $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$

$b \cdot c = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{18}$ ($m \in \mathbb{N}$), $bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$

$a \cdot c = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ ($n \in \mathbb{N}$), $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

Тогда $ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15} \cdot 2^{14} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39}$

$(abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = \sqrt{2^{27} \cdot 7^{34}} \cdot \sqrt{kmn \cdot 2^{\cancel{28}}}$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow kmn \cdot 2^{\cancel{28}}$ - должно быть полным квадратом $\Rightarrow kmn \geq 2$ Пусть $kmn = 2$ Тогда

$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{34} \Rightarrow$ минимум $abc = 2^{27} \cdot 7^{34}$

Пример ~~$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$~~ , ~~$b = 2^5$~~ . При этом $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

~~$abc = 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$~~ $n=2$

~~$a = 2^{11} \cdot 7^{11}$~~ , ~~$b = 2^4$~~ , ~~$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$~~ $\frac{9ab}{m}$

~~$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$~~ $n=2$ ~~$mk = 4^5$~~ $a+b=m$

~~$b = 2^{28} \cdot 7^{39} : (2^{24} \cdot 7^{39}) = 2^4 \cdot 7^4$~~ $b = 7^4$

~~$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$~~ , ~~$a = 2^{11} \cdot 7^{16}$~~ $m=9$ $a:m$ $5 \quad 4$

$a+b$ $m \cdot \frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + 1$ 9

$a^2 - 2ab + b^2 = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$ $81 - 9 \cdot 5 \cdot 4$

$\text{НОД}(a+b) = 1$ $5 \cdot 6$ k

$a+b = k \cdot m$ $\frac{11}{121 - 9 \cdot 5 \cdot 6}$ $k \cdot m = \frac{9ab}{m}$

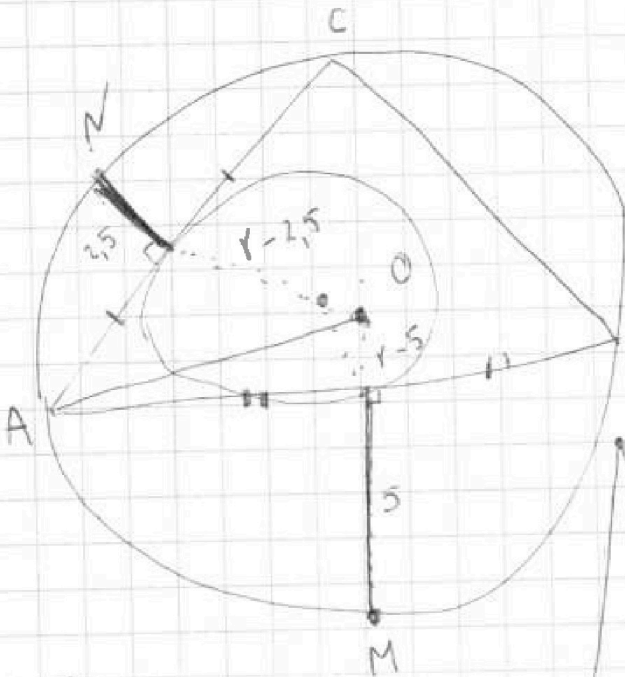
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x_2 - x_1)(k + 2) = 14$$

$$\frac{26}{14}$$

$$2x + y$$

$$17 \cdot 26 =$$

1) $y_1 = 26 = 3k + b$

max

$$y = 2 - 2x + 32$$

$$y = -2x$$

$$y = 3k$$

$$y = 3k - 48$$

2) $0 = 10k + b$

$$26 = -13k$$

$$k = -2$$

$$y = 3k + b$$

$$6 = 0$$

$$3 \cdot 10 + b = 0$$

$$\begin{cases} y \leq -2x + 32 \\ y \geq -2x \\ y \leq 3k \\ y \geq 3k - 48 \end{cases}$$

$$(0 - 16) \cdot$$

$$(0, 0)$$

$$(16, 0)$$

$$(-13, 26)$$

$$(13, 26)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

