



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

~ 1

$$ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1; \quad bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \Rightarrow bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_2;$$

$$ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \Rightarrow ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_3, \quad (ab: 2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1$$

$$\begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1 \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) = x_2 \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1 \\ ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_2 \\ bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{(15+23+17)} \cdot 4^{(11+39+18)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 - \text{обозначение}$$

четности при делении ab на $2^{15} \cdot 4^{11}$, ac на $2^{23} \cdot 4^{39}$ и bc на

$$2^{17} \cdot 4^{18} \text{ соответственно}) \Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 4^{69} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Rightarrow abc =$$

$$= \sqrt{2^{55} \cdot 4^{69} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 4^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}. \quad abc - \text{натуральное}$$

$$\text{число} \Rightarrow (abc)^2: (2^{55} \cdot 4^{69}). \quad \text{П.к. } (abc)^2 - \text{квадрат н.к.}$$

числа, стороны всех простых множителей - четны \Rightarrow

$$\Rightarrow (abc)^2: (2^{56} \cdot 4^{69}) \Rightarrow abc: (2^{28} \cdot 4^{39}). \quad \text{Поэтому мин. } abc = 2^{28} \cdot 4^{39}.$$

$$\text{Пример: } a = 2^{11} \cdot 4^{11}, b = 2^5, c = 2^{12} \cdot 4^{18}$$

$$ab = 2^{16} \cdot 4^{11}, bc = 2^{17} \cdot 4^{18}, ac = 2^{23} \cdot 4^{39}, abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МОФИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.д.
Пусть ~~дано~~ найдем такое m , что числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$ можно сократить на m . Тогда

Тогда $(a+b):m$ и $(a^2+b^2-4ab):m$: $a^2+b^2-4ab = (a+b)^2 - 9ab$.

$(a+b)^2 - 9ab : m$, $(a+b)^2 : m \Rightarrow 9ab : m$. Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$

(разложиме m на простые множители, где p_i - простой

делитель m , а α_i - степень вхождения p_i в m). Пусть

найдем такое p_i ~~где $p_i \leq p_i \leq p_i$~~ , что $ab : p_i$. П.к.

$\frac{a}{b}$ - несократима, ~~a и b не имеют~~ $\text{НОД}(a,b) = 1 \Rightarrow$ только одно из чисел a и b делится на p_i ; (иначе $\text{НОД}(a,b) \geq p_i$).

Пусть ~~$a : p_i$ и $b : p_i$~~ , $a : p_i$ и $b : p_i$ (без ограничения общности)

$\Rightarrow a+b : p_i$ ~~\Rightarrow~~ $a+b : m$ (т.к. p_i - простой множитель m),

это противоречит ~~уже принятому~~ условию \Rightarrow не най

дем такого p_i , что $ab : p_i \Rightarrow \text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 9ab : m$.

Тогда из $9ab : m$ и $\text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 9 : m$. Тогда $m \leq 9$.

~~Возьмем $m=9$~~ . Подберем пример для $m=9$: $a=1$, $b=8$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$.

$\frac{a+b}{a^2+b^2-4ab} = \frac{1+8}{1+64-4 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1$ ($\frac{a}{b}$ - несократима, $\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$ сокращаем

на a на m).

Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2+3x+1} > 1$$

$$3x^2+3x+1 > 1$$

$$3x^2+3x > 0$$

$$x^2+x > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$$

Когда $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 1$ при любых допустимых $x \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$ не имеет решений.

Когда существует только 1 возможный корень: $x = \frac{1}{9}$, если он входит в область определения.

$$3x^2+3x+1 > 0 \rightarrow \sqrt{3x^2+3x+1}, \quad 3x^2-6x+2 \geq 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, \quad D = 36 - 24 =$$

$$= 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

$$\frac{1}{9} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{9} > \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ входит}$$

в область определения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0$ на всей области определения,

т.к. $\sqrt{3x^2-6x+2} \geq 0$, а $\sqrt{3x^2+3x+1} > 0$ (т.к. $D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$) \Rightarrow

$= \sqrt{3x^2+3x+1} > 0$. Область определения $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}$ и

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$ совпадает.

$$(\sqrt{3x^2-6x+2})^2 - (\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = (-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

я раскрыли как $3x^2-6x+2$, тогда потому что область опреде-

ления знаменателя совпадает с областью, на кото-

рой $3x^2-6x+2$ имеет ^{неотрицательное} значение совпадают, и

точки, в которой $3x^2-6x+2$ принимает отрицательные значения не рассматриваются.

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1-9x=0 \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} > 1 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$$

$$3x^2-6x+2 > 1$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{6-\sqrt{24}}{6} \\ x > \frac{6+\sqrt{24}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ^{только} при $0 \leq z \leq 32$ ~~то~~ прямая пересечет параллелограмм ^{большее количество точек только эти z}. Заметим, что если z - четное, то прямая $z = 2x + y$. Будет иметь ровно 13 точек с целыми координатами в параллелограмме (9 внутренних точек), т.к. в таком случае y должно быть четным (чтобы x было целым), а четность y . $0 \leq y \leq 26$ ровно 13. Аналогично при z - четном, y - четном \Rightarrow максимум точек 14. Тогда между прямой парами z и $z+14$ ^{нае} 13^2 пар если z - чет., и 14^2 если z - чет. Если рассматриваем пары прямых $z = 2x + y$ ^{и $z+14 = 2x+y$} при $0 \leq z \leq 18$, то мы рассмотрим все пары прямых \Rightarrow все пары внутренних точек. Тогда общее кол-во пар $k = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 16960 + (1690 - 169) = 18481$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

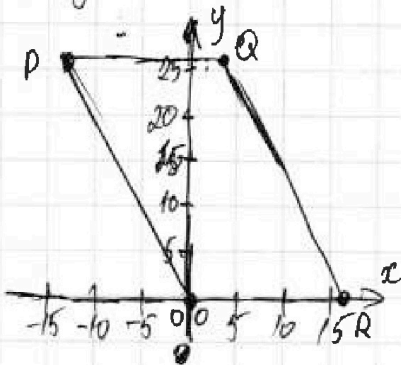
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



25

$$\text{Пусть } 2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 14$$

$$\text{Пусть } 2x_1 + y_1 = z. \text{ Тогда } 2x_2 + y_2 = 14 + z$$



Найдем уравнение прямой PQ:

Пусть оно $ax + y = b$

$$\begin{cases} a \cdot (-13) + 26 = b \\ a \cdot 0 + 0 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot (-13) + 26 = b \\ a \cdot 0 + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \cdot (-13) + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \cdot (-13) + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Тогда $2x + y = 0$ - уравнение прямой PQ.

Уравнение прямой QR $ax + y = b$:

$$\begin{cases} 32a + 26 = b \\ 16a + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a = 26 = b \\ 16a + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow \text{QR: } 2x + y = 32.$$

PQ: $y = 26$, QR: $y = 0$. Тогда все точки в параллелограмме удовлетворяют условию: $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq y \leq 26. \end{cases}$

Возьмем ^{прямые} $Z_1 = 2x + y$ и $Z_2 = 2x + y$ ^{так}. Тогда любая ^{точка} ~~точка~~ ^{из} ~~этой~~ ^{этой} ~~прямой~~ ^{прямой} ~~удовлетворяет~~ ^{удовлетворяет} ~~условию~~ ^{условию} ~~параллелограмма~~ ^{параллелограмма} ~~и~~ ^и ~~находится~~ ^{находится} ~~внутри~~ ^{внутри} ~~параллелограмма~~ ^и ~~такая же~~ ^{такая же} ~~точка~~ ^{точка} ~~на~~ ^{на} ~~прямой~~ ^{прямой} $Z + 14 = 2x + y$ ~~(удовлетворяющая тем же условиям)~~ ^(удовлетворяющая тем же условиям) является ~~искомой~~ ^{искомой} ~~той~~ ^{той} ~~парой~~ ^{парой}.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

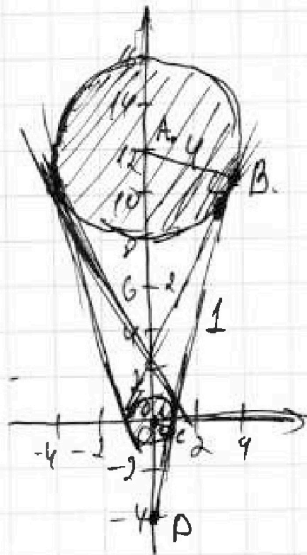
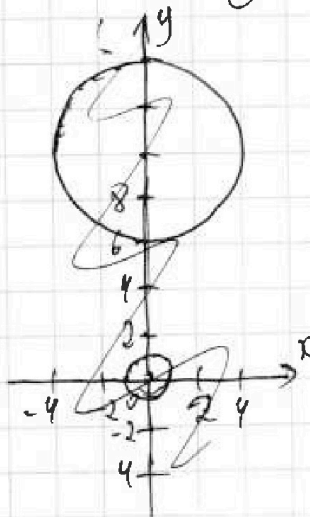
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0$ только если один из множителей ≥ 0 , а второй ≤ 0 .



П.к. оба графика
обойх множителей - круги
- окружности, то множе-
ство всех решений
этого уравнения неравенства
все точки внутри каж-
дого круга (т.к. круги не пересе-

каются, ^{точка} внутри круга делает значение одно из множи-
телей положительным, а второго - отрицательным.

П.к. $ax + y - 8b = 0$ - прямая, то система имеет
всего два решения, то эта прямая касательная к ^{одной}
окружности (имеет ^{одну} точку касания) либо не ^{имет} ^{никаких} точек с
кругами, либо касается одной окружности (1 решение), либо
пересекает хотя бы одну окружность (бесконечное кол-во
решений). По условию нужно найти a всех прямых,
касательных ^{одной} окружности. Возьмем ^{точку} A и B .
Уже только одна П.к. $AB = 0$, $A \in \text{окр}$ Тогда $a = 4, -4$



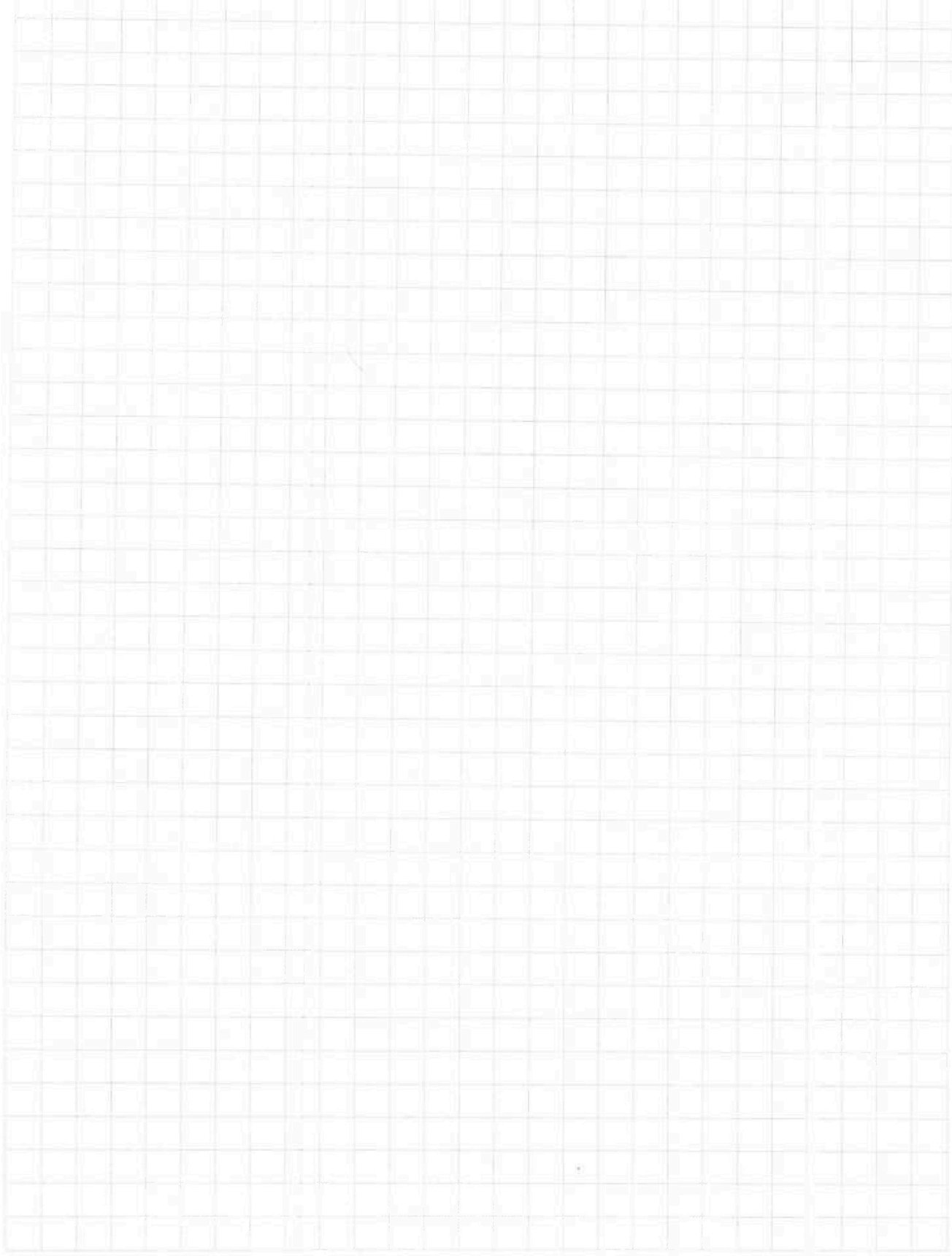
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

$$4(120^2 + 221^2) = 4(120^2 - 2 \cdot 120 \cdot 221 + 221^2) + 8 \cdot 120 \cdot 221 = 4(221 - 120)^2 +$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 120 \\ \hline 442 \\ 2210 \\ \hline 26520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 12 \\ \hline 221 \\ 26520 \\ \hline 26520 \end{array}$$

$$= 4(10201) +$$

$$8 \cdot 26520 \quad \begin{array}{r} 14^2 \\ \sqrt{14} \\ \hline 119 \\ 14 \\ \hline 133 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 221 \\ \hline 221 \\ 26520 \\ \hline 26520 \end{array}$$

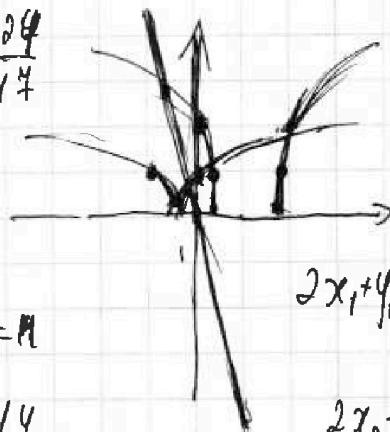
$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 251 \\ \hline 251 \\ 1255 \\ 502 \\ \hline 63001 \end{array} \quad \emptyset$$

$$D = 4 \cdot (2514 \cdot 240) + 588$$

$$a^2 = \sqrt{\frac{252514240 - 588}{281}}$$

ВН АВ = 24a = 24 \cdot \frac{24}{14}

10 \cdot 14 \cdot 14 + 13 \cdot 13 \cdot 9



$$(x+1) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = 0$$

$$2x_2 + y_2 = (2x_1 + y_1) = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$2x_1 + y_1 = 2 \quad D = 36 - 12 = 24$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2x_2 + y_2 = 24x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$$3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 6 = 2\sqrt{3}$$

$$+ 2 = 8 + 1 + 2\sqrt{3} -$$

$$2a + b = 14 = 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = -2x_1 + 2a + b - 14$$

$$0 = 1 \cdot 16 + b$$

$$26 = a \cdot 3 + b$$

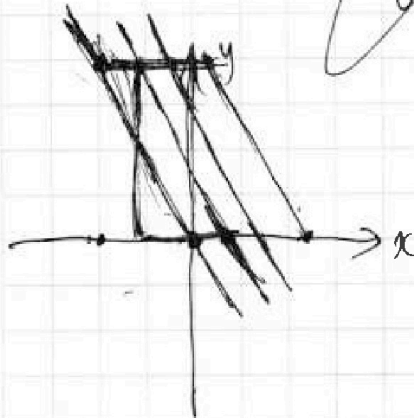
$$26 = -13a \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2a^2 + 82$$

$$0 \leq y \leq 16$$

$$-2x \leq y \leq -2x + 32$$

$$0 \leq y + 2x \leq 32 \quad 0 \leq y \leq 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16) = 3$

$36 - 12 = 24$
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\alpha = -4, -4$
 $-\alpha x = y + 4$
 $-\alpha = \frac{y+4}{x}$
 $c = y_0 + \alpha x_0 \quad -\alpha = 4$
 $\alpha x + y = -4$
 $\alpha x + y = c$
 $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
 $\frac{4 - 12}{5 - 4} = \frac{y_2 + 4}{x_2}$
 $y_1 = c + \alpha x_1 \quad y_2 = c + \alpha x_2$
 $\frac{4 - 12}{5 - 4} = \frac{12}{5} = -\frac{12}{5}$

$\alpha x + y = b$
 $-13\alpha + 26 = b \Rightarrow -13\alpha + 26 = 0$
 $\alpha = 2$
 $0 = b$
 $-2x + y = 0$
 $2x + y = 9b$
 $2x + y = 32$

$0 \leq 2x + y \leq 32$
 $0 \leq y \leq 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

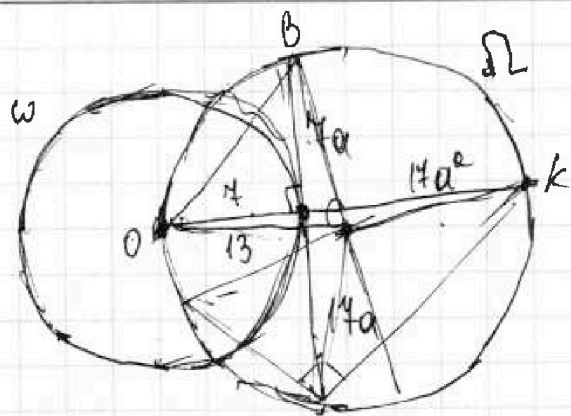
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

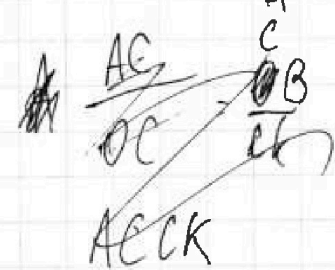
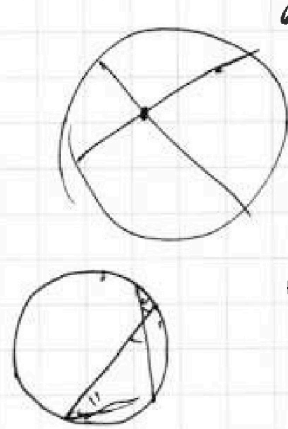


МФТИ



$$\begin{aligned} ab &= 14 \\ a-b &= 11 \\ b &= 0, a=11, c=18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq 15 \Rightarrow a=11, \\ a-b &= 6 \Rightarrow b=5, \\ c &= 12. \\ 240 &= 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{OC}{CA} &= \frac{BC}{CK} \\ OC \cdot CK &= AC \cdot BC \\ 14 \cdot 4a^2 &= 4 \cdot CK \Rightarrow CK = 14a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 14 \\ \hline 91 \\ 13 \\ \hline 221 \\ \times 221 \\ \hline 221 \\ 442 \\ \hline 442 \\ 442 \\ \hline 48841 \end{array}$$

$$13^2 = \sqrt{14^2 a^2 + 14^2 a^4 + 4^2 + 4^2 a^2}$$

$$14^2 x^2 + (14^2 + 4^2)x + 4^2 - 13^2 = 0 \quad D = 14^4 + 2 \cdot 14^2 \cdot 4^2 + 4^4 - 4 \cdot 14^2 \cdot 4^2$$

$$+ 13^2 \cdot 14^2 \cdot 4 = (4^2 - 14^2)^2 + 4 \cdot 13^2 \cdot 14^2 = 240^2 + 2^2 \cdot 13^2 \cdot 14^2 = 47100$$

$$a^2 = \frac{14^2 - 4^2 \pm \sqrt{D}}{14^2}$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1)$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 12 \\ \hline 14400 \\ + 48841 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 321 \\ 321 \\ \hline 321 \\ 642 \\ 963 \\ \hline 103041 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54600 \\ + 48841 \\ \hline 106441 \\ \times 331 \\ 331 \\ \hline 331 \\ 993 \\ \hline 109861 \\ \times 329 \\ 329 \\ \hline 2961 \\ 658 \\ 984 \\ \hline 108241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 28 \\ \hline 56 \\ 56 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 251 \\ \times 251 \\ \hline 251 \\ 1255 \\ \hline 502 \\ \hline 62751 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 + 3x - 1 = -9x + 1$$

$$1 - 9x = (1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$

$$(1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 9x = 0 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1 - 18 + 54}{24} =$$

$$= \frac{37}{24}$$

$$\frac{1 + 9 + 24}{24} = \frac{34}{24}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad D = 36 - 24 = 12$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 + 6t + 3 + 3t + 3 + 1 = 3t^2 + 9t + 7$$

$$3t^2 - 6t + 3 + 3t - 3 + 1 = 3t^2 - 3t + 1$$

$$3(t^2 + 3t + 3) = 3(t^2 - 3t + 1)$$

$$ab: p, p;$$

$$a: p, p;$$

$$m: p, p;$$

$$ab: p, p;$$

$$a: p, p;$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b: m$$

$$(a+b)^2 - 9ab: m$$

$$9ab: m$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{9ab}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{5+4}{25+16-4 \cdot 2}$$

$$a+b: p, p; \quad (a, b) = 1$$

$$\frac{1+8}{1+64-4 \cdot 8} = \frac{9}{65-32} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$