



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{10} \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\times \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7^{14}}{64}$$

мин-abc - ?

$$(abc)^2 = 2^{28} \cdot 4^{20} \cdot 2^{14+14+20} \cdot 7^{10+14+34} \cdot kmn$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn} = 2^{25} \cdot 2^2 \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Если } k, m, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } \sqrt{kmn} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow k \text{ или } m \text{ или } n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=n=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пусть $2^p \mid abc$, $p \in \mathbb{N}$ -max

$$2^p \mid abc, \quad p \in \mathbb{N} \text{-max} \Rightarrow p \geq 34, \quad q \geq 20$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$4^5 \mid \sqrt{kmn} \Rightarrow \sqrt{kmn} \cdot 4^{10} \mid kmn$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=4^{10}, \quad n=1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① - Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$k=1$$

$$\Rightarrow abc = 2^{15} \cdot y^{22} \cdot 2 \cdot y^5 = 2^{16} \cdot y^{27}$$

- это минимально, так как $2^{15} \cdot y^{10}$ и $2^{16} \cdot y^{10}$
 \Rightarrow среднее k, n, a равно

тогда ka
 $\Rightarrow kna = 2^{16-1} \cdot y^{10} \cdot y^2$
при $t, d \in \mathbb{N}$

\Rightarrow минимально среднее
при $t=1, d=1$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot y^{24}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Продолжение

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{34}, \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - 11\sqrt{2}}{41} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{34} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Найдите все a : 36 .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 & (1-2) \text{ рин.} \end{cases}$$

(1) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

1) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

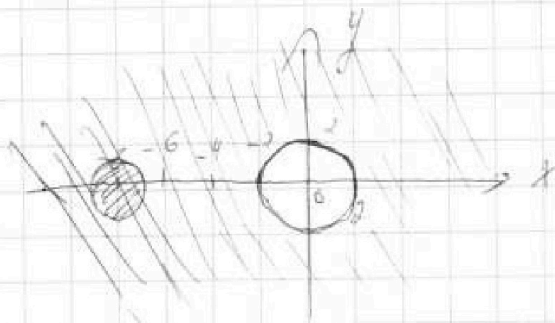
$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$

- 0

- окружность с центром в $(-8; 0)$
и $r=1$

$x^2 + y^2 = 4$

- окружность с центром в $(0; 0)$
и $r=2$



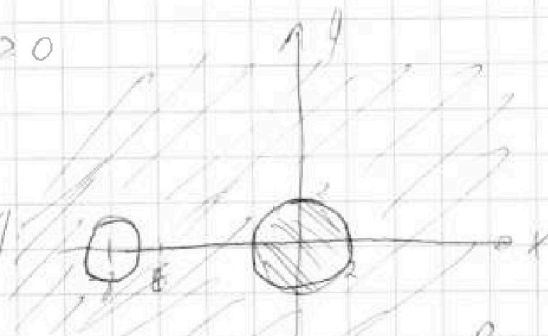
\Rightarrow Решения

- точки касания

$r=1$ с центром в $(-8; 0)$

2) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

Аналогично (1).



\Rightarrow Решения

- точки касания $r=2$
с центром в $(0; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ - Преобразование

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$52x^2 - 5x + 3 \geq 2 - 4x$$

$$2 - 4x \geq 0$$

$$\frac{2}{3} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \quad (\text{Если } 2 - 4x \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \rightarrow$$

также 9/19
и 4x с 4x.
0/231

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 49x^2 - 28x + 4$$

$$0 \geq 47x^2 - 23x + 1$$

$$47x^2 - 23x + 1 \leq 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 47 = 341$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 19}{94} \approx \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 22 \\ \hline 169 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

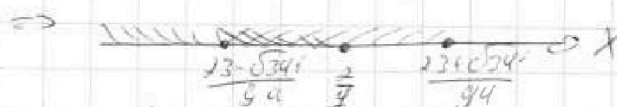
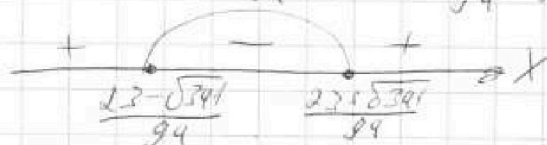
$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 46 \\ \hline 188 \\ + 181 \\ \hline 369 \\ + 33 \\ \hline 402 \end{array}$$

$$\frac{21}{47} < \frac{21}{47}$$

$$\frac{21}{47}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94}$$

$$\left(x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right) \left(x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \right) \leq 0$$



$$x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< \frac{23 - 19}{94} = \frac{4}{94} <$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} >$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④- Продолжение от

$$(4x-25)^2 - 0,25 = 2\sqrt{2x^2-5x+3}(2-4x)$$

$$(4x+3)(4x-2) = 2\sqrt{2x^2-5x+3}(2-4x)$$

$$(3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3}(2-4x)$$

$$x = \frac{2}{4} \in ODZ \Rightarrow \text{корень}$$

$$x \neq \frac{2}{4} \Rightarrow (3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3}(2-4x) \quad | \cdot (2-4x)$$

$$\frac{3-4x}{2} = \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\geq 0$$

$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$$x \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 92x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 - 20x + 12$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{121 \cdot 2}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = (x-1)(2x-3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(2) \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow O D \text{ } (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 4x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + 49x^2 - 28x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 25 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

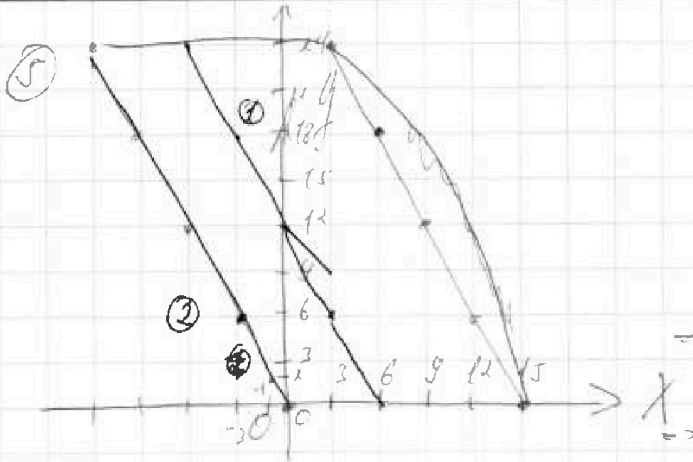
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

$\in T'(x_1, y_1, z)$
 \rightarrow для $\forall (x_1, y_1)$ ~~содержит~~

\rightarrow для $\forall x, y \in$ границе
 $2x + y = 0$ не выполняется.

всех x, y границы

$$2x + y + 12 = 0$$

(если $\forall (x, y) \in$ границе)

$2x + y$ (если $\forall (x, y) \in$ границе)
 $2x + y + 12 = 0, 0 \leq x \leq 15$
 $12 \in \mathbb{Z}$ $2x + y = 0$

\Rightarrow На каждой прямой $2x + y + c = 0, c \in \mathbb{Z}$

- но $\forall c \in \mathbb{Z}$ в границе

границы x, y в границе

не пересекаются

(для $2x + y = 0$)

$\rightarrow (-1, 2), (0, 0), (1, 4)$

для $2x + y + c = 0$ - аналогично,
 $\forall x, c \in \mathbb{Z}$)

\Rightarrow На каждой прямой $2x + y + c = 0, c \in \mathbb{Z}$

- но $\forall c \in \mathbb{Z}$ в границе

\Rightarrow для каждой прямой $2x + y + c = 0$

- $c \in \mathbb{Z}$ и $2x + y + c + 12 = 0$
 $13^2 = 169$

то всего прямых:

$$2x + y = 0 \text{ и } 2x + y + 12 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0 \text{ и } 2x + y + 13 = 0$$

$$2x + y + 18 = 0 \text{ и } 2x + y + 30 = 0$$

Далее $\forall c \in \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in$ границе

прямых $2x + y + c = 0$

за границей не пересекаются

$$\Rightarrow 12 - 169 + 19 = 32 + 11$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 25 \cdot 19 = 975$$

Ответ: 975 + 32 + 11

68
 $\times 169$
 1119
 $+ 1521$
 169
 $\hline 3211$

19
 $\times 19$
 171
 $+ 380$
 $\hline 495$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

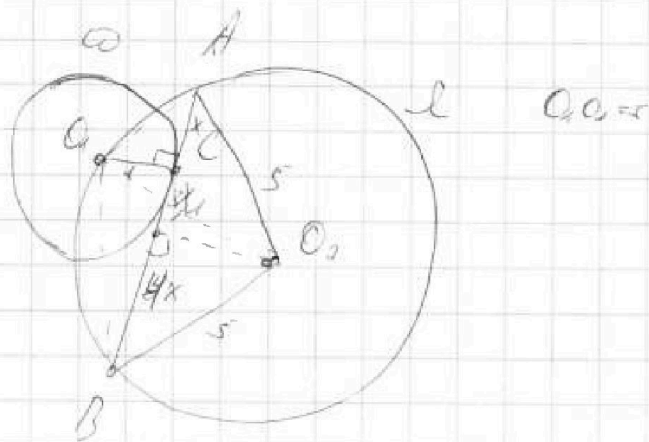
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

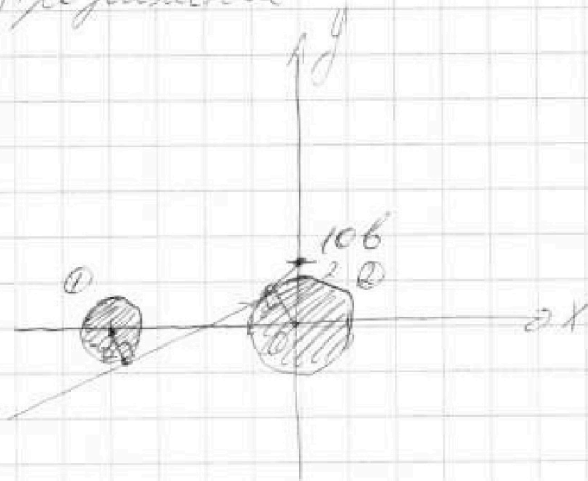
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) - Продолжение

(2)



1) ~~касание с прямой~~
1-2, 0

2) касание с прямой
10, 0

сист. им. 2 рав. $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

д.т. пересечем экр. и (1)

\Rightarrow тр.

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$ - касания 1 и 2

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 10b = 0 \\ ax_2 - y_2 + 10b = 0 \\ (x_1 + 2)^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\uparrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \uparrow$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \Delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Продолжение

$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 5b$$

$$8a - 10b = -5b$$

$$8a = 15b$$

$$\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = 5b$$

$$\frac{8a}{5} = b$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(\frac{25 \cdot 64}{25 \cdot 9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$2) \left(\frac{8a}{5}\right)^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$\frac{64a^2 \cdot 25}{25} - a^2 = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



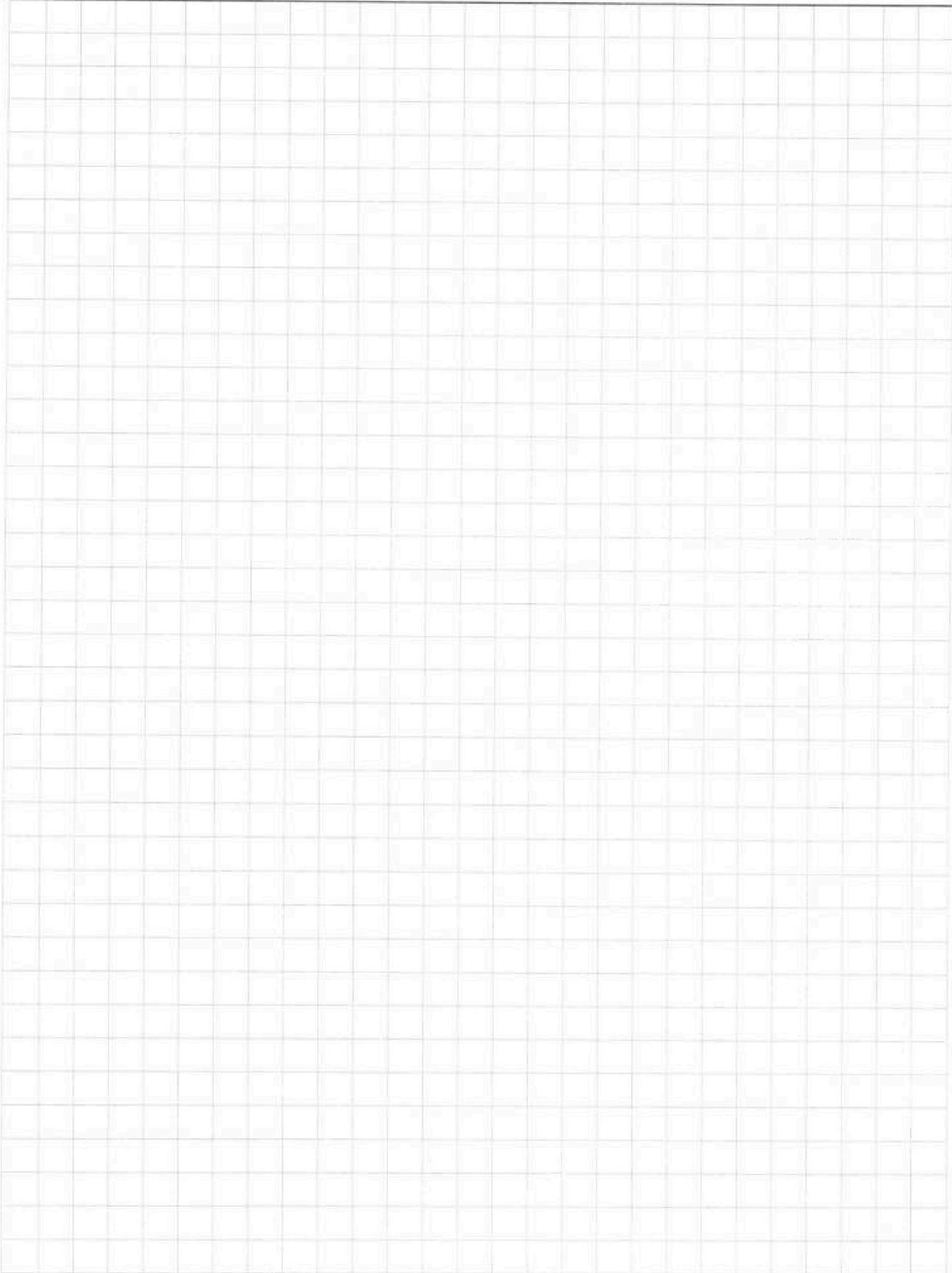
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b - 64a^2 - 45b^2 = 0 \end{cases}$$

400: $8 \cdot 551 \cdot 2 = 8002$

$$64a^2 - 1600b + 45b^2 = 0$$

$$(8a)^2 - 1600b + (55b)^2 = 0$$

$$45b^2 - 1600b + 64a^2 - 1600b + 100b^2 + 15b^2 = 0$$

$$100b^2 - 1600b + 640b^2 + 1600a^2 = 25b^2$$

$$(80a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$(90b + 80a)^2 = 25b^2$$

$$80a - 10b = 25b$$

$$80a - 10b = -25b$$

$$10b + 80a = 5b$$

$$10b + 80a = -5b$$

$$80a = 25b$$

$$80a = -15b$$

$$80a = -5b$$

$$40a = -b$$

$$80a = b$$

$$\frac{80a}{35} = b$$

$$a = -\frac{15b}{8}$$

$$-\frac{80a}{15} = b$$

$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{35}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$\frac{-64}{49} - 1 = -\frac{113}{49}$$

$$a^2 \left(\frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{15}{49} = 1$$

$$a^2 = \frac{49}{15}$$

$$a = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$2) 25 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{225} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Ответ: $\pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Продолжение.

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 10b = y^2 \quad y^2 = (ax)^2 + 20abx + 100b^2$$

$$x^2 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow D = 400a^2b^2$$

$$\Rightarrow D = 400b^2$$

$$D = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(1+a^2) = 0$$

$$100a^2b^2 - 100b^2 - 100b^2a^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$200a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad | :4$$

$$50a^2b^2 - 25b^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$25b^2(2a^2 - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$-100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$25b^2 + 1 + a^2 = 0$$

$$25b^2 - a^2 = 1$$

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 4bx + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(4b+20ab) + 63 + 100b^2 = 0$$

$$D = (8+10ab)^2 - (a^2+1)(63+100b^2)$$

$$= 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0$$

$$160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

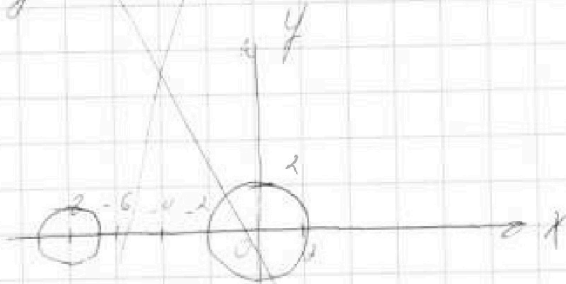
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① ~~Решение.~~
~~Сек. выпукл. круга.~~

$$\Rightarrow \parallel ax - y + kb = 0$$

$$y = -ax + kb$$



② $\frac{a+b}{b}$ - касая, $a, b \in \mathbb{N}$

возм.:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

касая μ ; $\mu | (a+b)$, $\mu | (a^2 - 6ab + b^2)$

gcd

$$\gcd(a, b) = 1$$

gcd

$$\gcd(a+b, a^2 - 6ab + b^2) = \mu$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = t$$

$$a+b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = \frac{t}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{p}{b}$$

$$\text{пусть } p = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1) \frac{a}{b}}{(p^2 - 6p + 1) \frac{a}{b}}$$

$$p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p^2 - 6p + 1 = p^2 - 6p + 9 - 8 = (p-3)^2 - 8$$

$$D = 36 - 4$$

$$p_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



6

Найти все $a \in \mathbb{R}$:

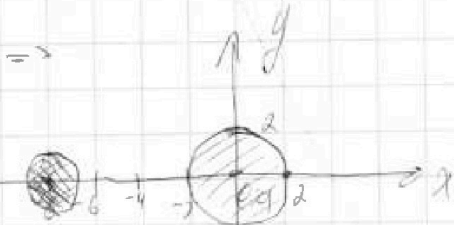
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 & (1) \end{cases} \begin{matrix} \text{— прямая} \\ \text{2 окружности} \end{matrix}$$

(1): $((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

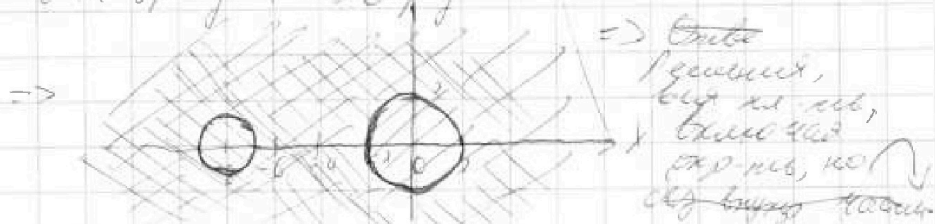
$x^2 + y^2 = 4$ — окружность в π
с центром в $(0, 0)$
и $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окружность
с центром в $(-8, 0)$
и $r = 1$



\Rightarrow И.т.м. не имеет ни одной
реш.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



\Rightarrow Окружность
внешняя,
внутр. кр. окр.,
внутри кр. окр.
окр. в-в, но
окр. в-в не имеют

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ -несократим

m -макс $\left\{ \begin{array}{l} a+b = m \cdot k \\ a^2-6ab+b^2 = m \cdot n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{m} \text{ - несократим} \end{array} \right.$

$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 k^2$

$a^2 - 6ab + b^2 = mn = m^2 k^2 - 6ab$

$\frac{m^2 k^2}{m} : m$
 $\Rightarrow 3ab : m$
 $\gcd(a, b) = 1$

~~$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$, $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(m, m^2 k^2 - 6ab) = m$~~

~~$\hookrightarrow \gcd(mk, 3ab) = m$
 $\gcd(a, b) = 1$~~

$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$

$(a+b, -3ab) = m$

$(a+b, 3ab) = m$, $(a, b) = 1$

~~$\text{Если } m|ab \Rightarrow m|3ab$~~

~~$m|3ab$ и $m|(a+b)$~~

~~$m|ab \Rightarrow$~~

~~$\begin{cases} a+b = mk & a = mk - b \\ 3ab = m \end{cases}$~~

~~$\text{или } 3b(mk - b) = m$~~

~~$3bmk - 3b^2 = m$~~

~~$3bmk - mk = 3b^2$~~

~~$\Rightarrow m|3b^2 \Rightarrow m|3a^2$~~

~~$\text{или } m|ab^2$~~

~~$\Rightarrow b^2 a^2 = m^2 k^2$~~

$\frac{3(b^2+a^2) \cdot m}{b(a+b)^2 + 3ab} \rightarrow$
 $\frac{3(a-b)^2}{}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$$\begin{cases} a+b=mn \\ 2ab=mn \end{cases}$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} & a^2 - 2ab + b^2 : mn \\ & a^2 + 2ab \end{aligned}$$

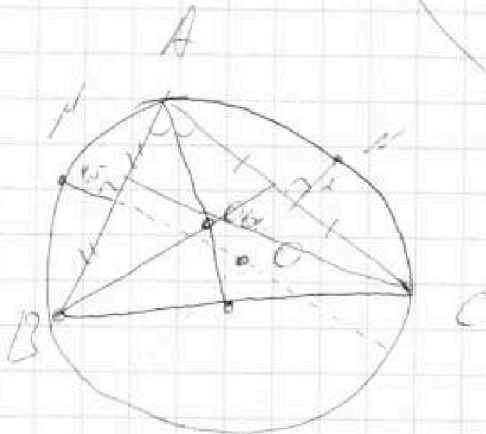
$$2(ab) : n$$

$$4a^2 + 3ab + 4b^2 : n$$

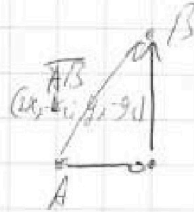
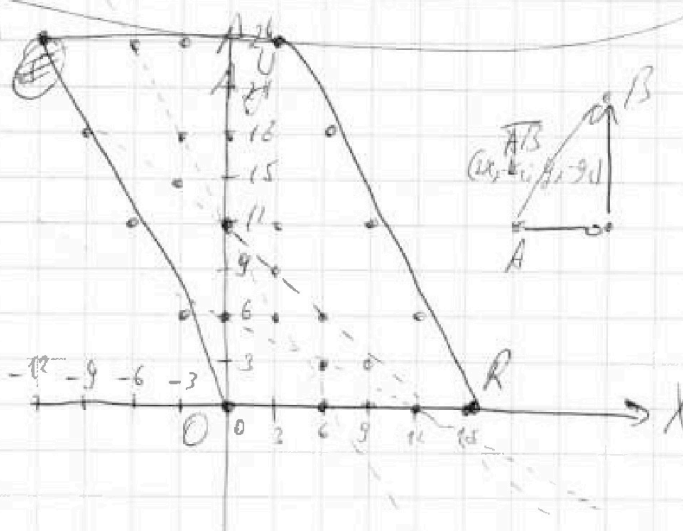
$$4a^2 - 8ab + 4b^2 : n$$

$$2(a-b)^2 : n$$

7



9



$$\begin{aligned} \Delta x & \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2\Delta x + \Delta y &= 12 \\ \Delta x &\geq 0, \Delta y > 0 \\ \Delta y &= 12 - 2\Delta x \\ 0 &\leq \Delta x \leq 6 \\ y - x &= 0 \text{ or } 1/4 \\ \text{или } 0 \text{ or } 1/2 \\ \Delta x &= 0 - \frac{\Delta y}{2} \end{aligned}$$

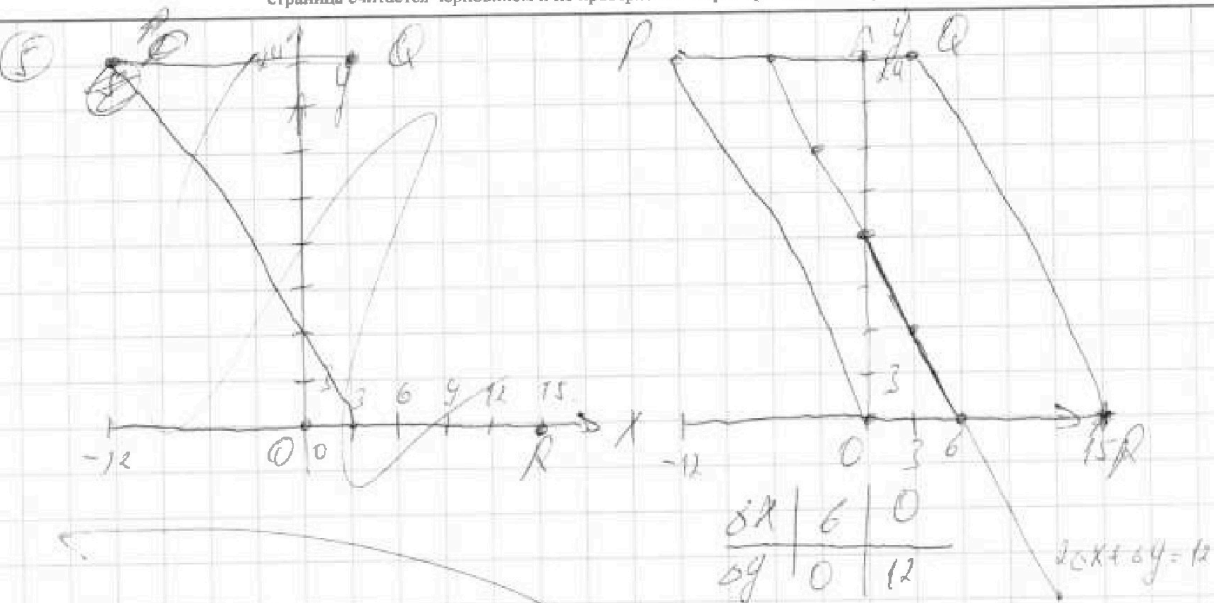
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

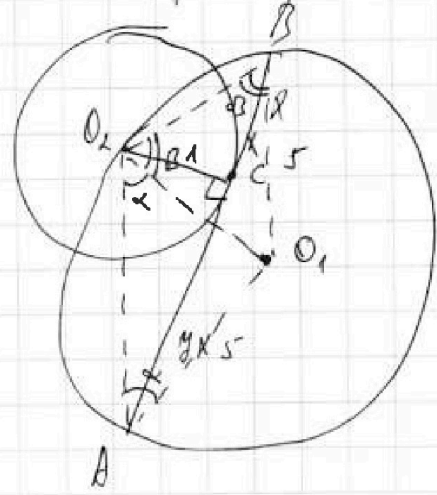
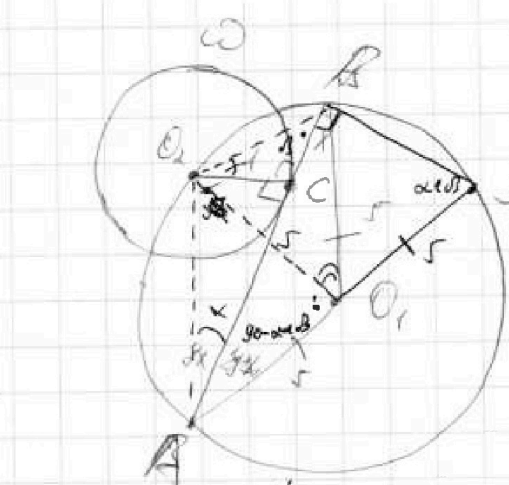
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ ③



\Rightarrow ~~...~~
 Если $(x_0, y_0) \in PQ \cap O$
 \Rightarrow ~~...~~ $x \in [0, 15]$
 $y \in [-24, 24]$
 $x \in$

$R = 5$ $r = 1$ $\frac{AC}{CB}$
 $AB = ?$

$O_1 O_2 = R = 5$
 $O_1 A = \sqrt{1 + 49x^2}$
 $O_2 B = \sqrt{1 + x^2}$

$\text{если } \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2r = 2$
 $\frac{2x}{\sin(x+2x)} = 2 \Rightarrow 4x = \sin(x+2x)$

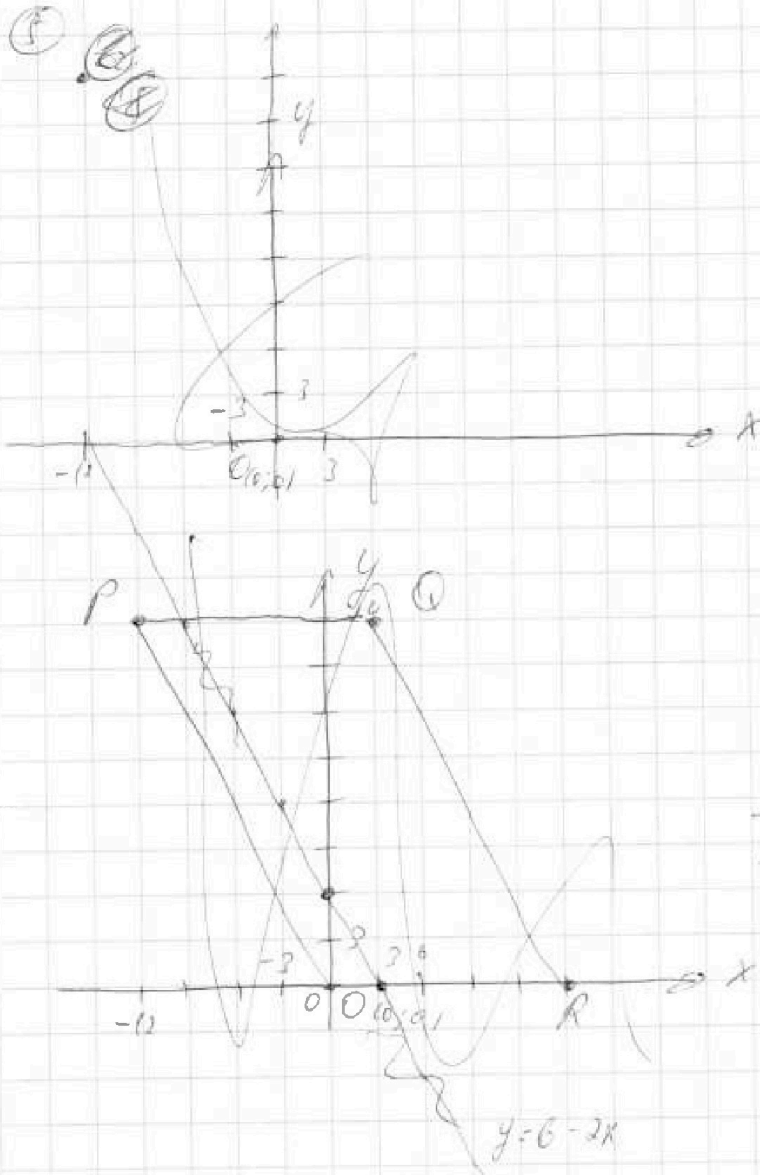
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Каждое кол-во.
 $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Решим: $2x + y = 6$

$$\Rightarrow y = 6 - 2x$$

x	0	3
y	6	0

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 6 \quad (2x_2 + y_2 + 6) = 0$$

$$2x_2 + y_2 - 6 = 2x_2 + y_2 + 6$$

Решение:

Решим

Пусть $x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$26x + 6y = 12$$

$$6y = 12 - 26x$$