



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{10} \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\times \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7^{14}}{64}$$

мин-abc - ?

$$(abc)^2 = 2^{28} \cdot 4^{20} \cdot 2^{14+14+20} \cdot 7^{10+14+34} \cdot kmn$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn} = 2^{25} \cdot 2^2 \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Если } k, m, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } \sqrt{kmn} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow k \text{ или } m \text{ или } n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=n=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пусть $2^p \mid abc$, $p \in \mathbb{N}$ -max

$$2^p \mid abc, \quad p \in \mathbb{N} \text{-max} \Rightarrow p \geq 34, \quad q \geq 20$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{kmn} \in \mathbb{N} \\ 4^5 \mid \sqrt{kmn} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{kmn} \cdot 4^{10} \mid kmn$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=4^{10}, \quad n=1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① - Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$k=1$$

$$\Rightarrow abc = 2^{15} \cdot y^{22} \cdot 2 \cdot y^5 = 2^{16} \cdot y^{27}$$

- это минимально, так как $2^{15} \cdot y^{10}$ и $2^{16} \cdot y^{10}$
 \Rightarrow среднее k, n, a равно

тогда na
 $\Rightarrow kna = 2^{16-1} \cdot y^{10} \cdot y^2$
при $t, d \in \mathbb{N}$

\Rightarrow минимально среднее
при $t=1, d=1$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot y^{27}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Продолжение

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{34}, \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - 11\sqrt{2}}{41} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{34} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Найдите все a : 36 .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 & (1-2) \text{ рис.} \end{cases}$$

(1) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

1) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

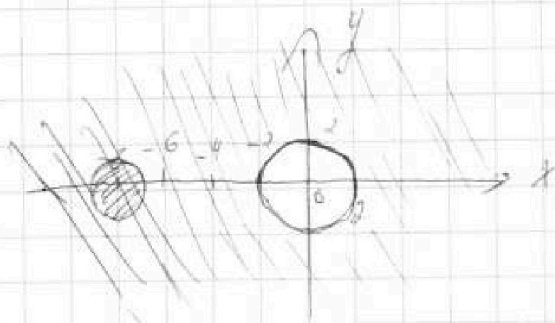
$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$

- 0

- окружность с центром в $(-8; 0)$
и $r=1$

$x^2 + y^2 = 4$

- окружность с центром в $(0; 0)$
и $r=2$



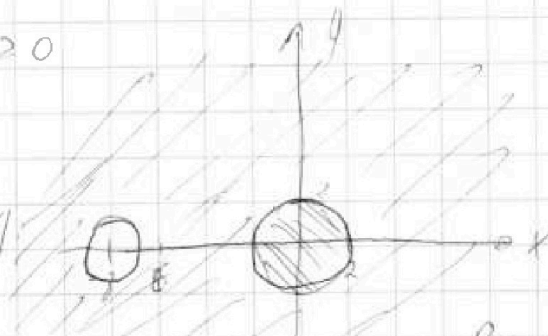
\Rightarrow Решения

- точки касания

$r=1$ с центром в $(-8; 0)$

2) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

Аналогично (1).



\Rightarrow Решения

- точки касания
с центром $(0; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ - Преобразование

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 2 - 4x$$

$$2 - 4x \geq 0$$

$$\frac{2}{4} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Если $2 - 4x \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{4} \leq x \Rightarrow$$

также $2 - 4x$
и $4x$ с $4x$
0/2/1

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 49x^2 - 28x + 4$$

$$0 \geq 47x^2 - 23x + 1$$

$$47x^2 - 23x + 1 \leq 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 47 = 341$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 19}{94} \approx \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 22 \\ \hline 169 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

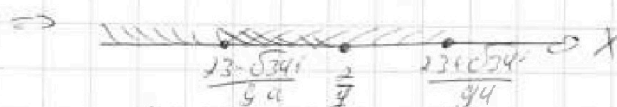
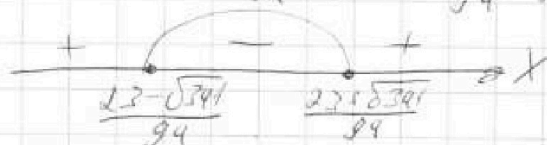
$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 40 \\ \hline 188 \\ 181 \\ \hline 369 \\ 47 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\frac{21}{47} < \frac{21}{47}$$

$$\frac{21}{47}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94}$$

$$\left(x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right) \left(x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \right) \leq 0$$



$$x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{21}{47} \right]$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< \frac{23 - 19}{94} = \frac{4}{94} <$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} > \frac{21}{47}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④- Продолжение от

$$(4x-2.5)^2 - 0.25 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(4x+3)(4x-2) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$x = \frac{2}{4} \in ODZ \Rightarrow \text{корень}$$

$$x \neq \frac{2}{4} \Rightarrow (3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x) \quad | \cdot (2-4x)$$

$$\frac{3-4x}{\geq 0} = 2\sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$$x \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 92x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 - 20x + 12$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{121 \cdot 2}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = (x-1)(2x-3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(2) \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{OДЗ: } (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 4x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + 49x^2 - 28x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 25 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

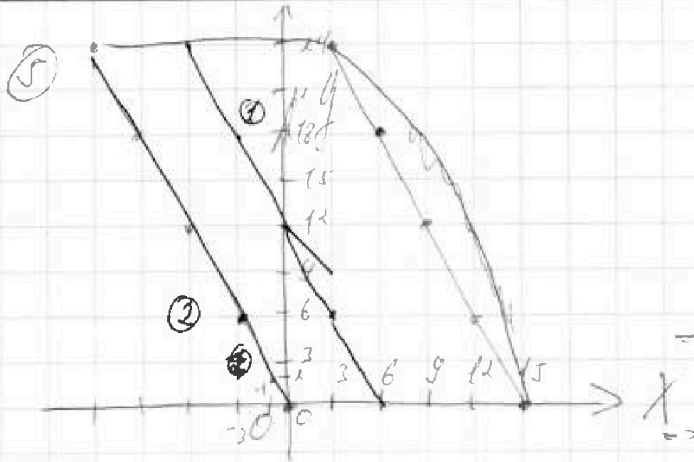
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

$\in T'(x_1, y_1, z)$
 \rightarrow для $\forall (x_1, y_1)$ ~~содержит~~

\rightarrow для $\forall x, y \in$ границе
 $2x + y = 0$ не выполняется.

всех x, y границы

$$2x + y + 12 = 0$$

~~(если $\forall (x, y) \in$ границе)~~

$$2x + y$$

$$\text{если } (x, y) \in \text{границе}$$

\leftarrow

\Rightarrow На каждой грани

$$2x + y + c = 0, c \in \mathbb{Z}$$

- по \mathbb{Z} в границе

границы x, y в границе

$$\text{не выполняется}$$

$$\text{для } 2x + y = 0$$

$$\rightarrow (-1, 2), (0, 0), (1, 4)$$

$$(-12, 24) \notin$$

для $2x + y + c = 0$ - очевидно,
 $x, y \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow На каждой грани

$$2x + y + c = 0, c \in \mathbb{Z}$$

- по \mathbb{Z} в границе

\Rightarrow для каждой грани

$$2x + y + c = 0 \text{ и } 2x + y + c + 12 = 0$$

$$\text{сведем } 12^2 = 169$$

то всего границ:

$$2x + y = 0 \text{ и } 2x + y + 12 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0 \text{ и } 2x + y + 13 = 0$$

$$2x + y + 18 = 0 \text{ и } 2x + y + 30 = 0$$

Далее берем x, y ,

x, y и z - действительные

значения

за границей x, y, z

$$\Rightarrow 12 \cdot 169 + 19 = 3211$$

$$\Rightarrow 25 \cdot 19 = 475$$

Ответ: 3211

68
 $\times 169$
 1159
 $+ 1521$
 169

 3211

1
 $\times 19$
 152
 $+ 15$
 475



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

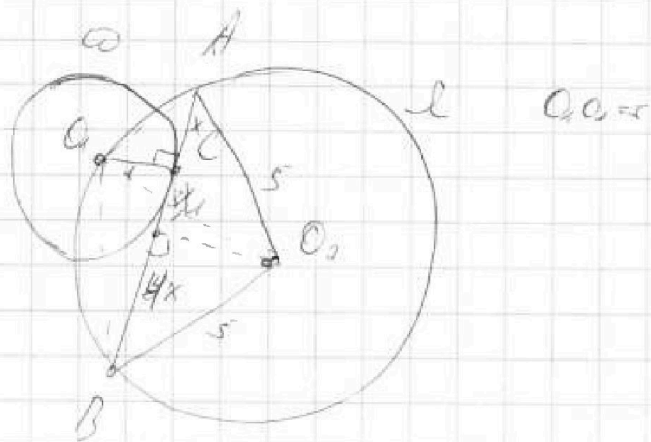
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

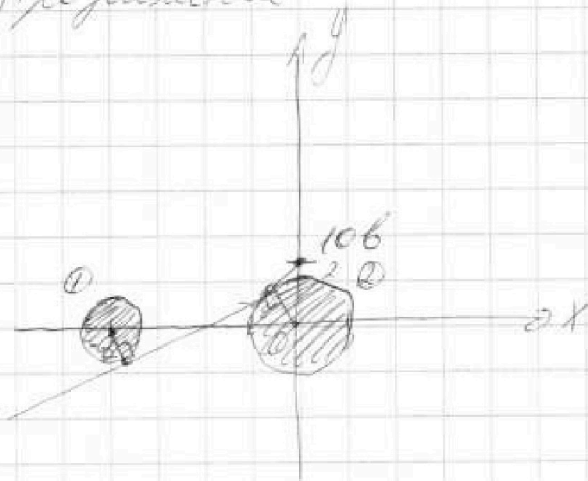


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) - Продолжение

(2)



1) ~~касание~~ ^{касание} с ~~уравнением~~ ^{уравнением}

2) ~~касание~~ ^{касание} с ~~уравнением~~ ^{уравнением}

сист. им. 2 рав. $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

д. л. пересечем экр. и кр.

\Rightarrow ~~касание~~

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$ - касания 1) и 2)

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 10b = 0 \\ ax_2 - y_2 + 10b = 0 \\ (x_1 + 2)^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

\Rightarrow ~~$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$~~

1) $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x + 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

\Rightarrow ~~$ax - y + 10b = 0$~~

2) $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ реш.}$

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x + 2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = 1 \text{ реш.}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Продолжение

$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 5b$$

$$8a - 10b = -5b$$

$$8a = 15b$$

$$\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = 5b$$

$$\frac{8a}{5} = b$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(\frac{25 \cdot 64}{25 \cdot 9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$2) \left(\frac{8a}{5}\right)^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$\frac{64a^2 \cdot 25}{25} - a^2 = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



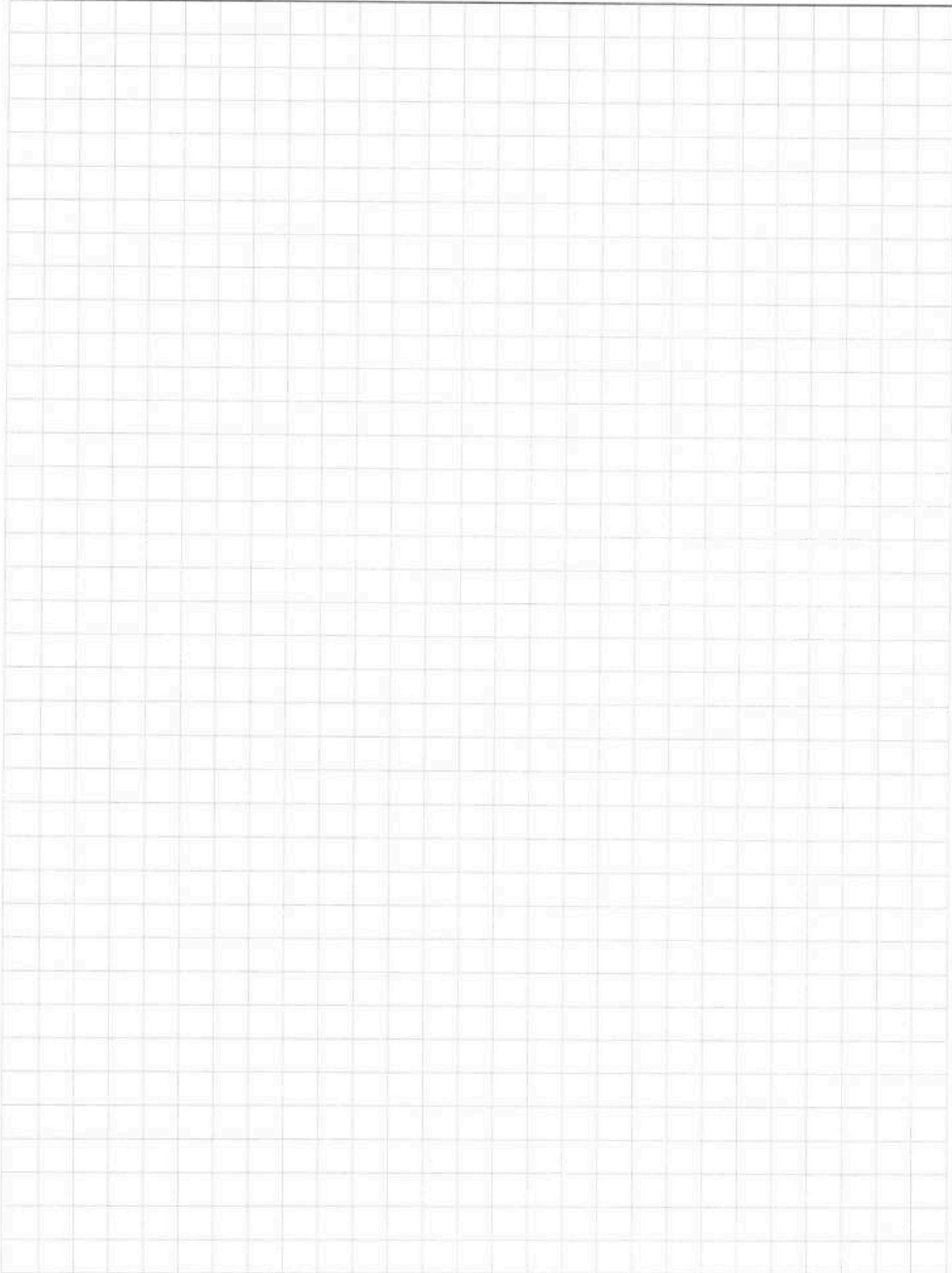
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b - 64a^2 - 45b^2 = 0 \end{cases}$$

400a
8-551 a = 8005

$$64a^2 - 1600b + 45b^2 = 0$$

$$(2a)^2 - 1600b + (55b)^2 = 0$$

$$45b^2 - 1600b + 64a^2 - 1600b + 100b^2 + 15b^2 = 0$$

$$100b^2 - 1600b + 64a^2 = 25b^2$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$(10b + 8a)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 25b$$

$$8a - 10b = -25b$$

$$10b + 8a = 5b$$

$$10b + 8a = -5b$$

$$8a = 25b$$

$$8a = -15b$$

$$8a = -5b$$

$$4a = -b$$

$$8a = -b$$

$$a = \frac{25b}{8}$$

$$a = -\frac{15b}{8}$$

$$\frac{8a}{35} = b$$

$$-\frac{8a}{15} = b$$

$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{35}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$\frac{-64}{49} - 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{15}{49} = 1$$

$$a^2 = \frac{49}{15}$$

$$a = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$2) 25 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{225} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Решение: $a = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$
 $a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Продолжение.

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 10b = y^2 \quad y^2 = (ax)^2 + 20abx + 100b^2$$

$$x^2 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow D \geq 0$$

$$\Rightarrow D = 20ab$$

$$D^2 = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(1+a^2) = 0$$

$$100a^2b^2 - 100b^2 - 100b^2a^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$200a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad | :4$$

$$50a^2b^2 - 25b^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$25b^2(2a^2 - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$-100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$25b^2 + 1 + a^2 = 0$$

$$25b^2 - a^2 = 1$$

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16bx + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 63 + 100b^2 = 0$$

$$D = (16+20ab)^2 - (a^2+1)(63+100b^2)$$

$$= 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0$$

$$160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

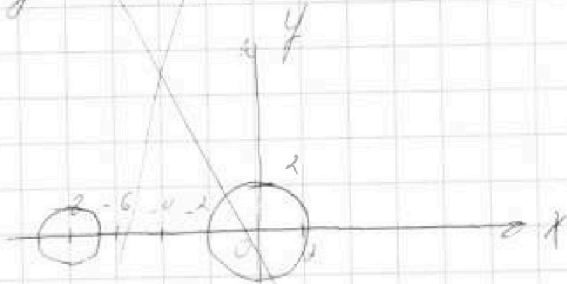
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① ~~Решение.~~
~~Согласно формуле~~
~~для касания кривых.~~

$$\Rightarrow \parallel ax - y + kb = 0$$

$$y = -ax + kb$$



② $\frac{a+b}{b}$ - касая, $a, b \in \mathbb{R}$

возм.:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

касая μ ; $\mu(a+b), \mu \mid a^2 - 6ab + b^2$

гср

гср

$$(a, b) = 1$$

гср

$$(a \pm b, a^2 - 6ab + b^2) = \mu$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = t$$

$$a + b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = \frac{t}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{p}{b}$$

пусть $\mu = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{(\mu+1)^2}{(\mu^2 - 6\mu + 1)^2}$$

$$\mu^2 - 6\mu + 1 = 0$$

$$\mu^2 - 6\mu + 1 = \mu^2 - 6\mu + 9 - 8 = (\mu - 3)^2 - 8$$

$$D = 36 - 4$$

$$\mu_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

Найти все $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (1) \end{cases}$$

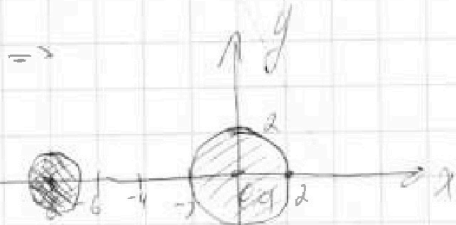
- система
2 уравн

$$(1): ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

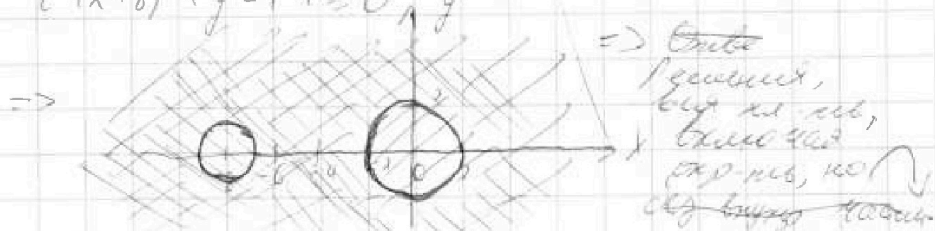
$x^2 + y^2 = 4$ - окруж в π
с центром в $(0, 0)$
и $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окруж
с центром в $(-8, 0)$
и $r = 1$



\Rightarrow и.т. не имеют общих точек
реш.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

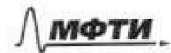


\Rightarrow Outside
regions,
both $x^2 + y^2 \geq 4$
and $(x+8)^2 + y^2 \geq 1$
exp-ness, но
объ. вышесказанного

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ - несократим

m -макс $\left\{ \begin{array}{l} a+b = m \cdot k \\ a^2-6ab+b^2 = m \cdot n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{n} \text{ - несократим} \end{array} \right.$

$$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 k^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = mn = m^2 k^2 - 8ab$$

$$\Rightarrow 8ab : m$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

~~$$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m, \quad \gcd(a, b) = 1$$~~

~~$$\gcd(m, m^2 k^2 - 8ab) = m$$~~

~~$$\Leftrightarrow \gcd(mk, 8ab) = m$$~~

~~$$\gcd(a, b) = 1$$~~

~~$$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$$~~

~~$$(a+b, -8ab) = m$$~~

~~$$(a+b, 8ab) = m, \quad (a, b) = 1$$~~

~~$$\text{Если } m | 8ab \Rightarrow m | 8ab$$~~

~~$$m | 8ab \text{ и } m | (a+b)$$~~

~~$$m | ab \Rightarrow$$~~

~~$$\begin{cases} a+b = mk & a = mk - b \\ 8ab = m \end{cases}$$~~

~~$$\text{или } 8b(mk-b) = m$$~~

~~$$8bmk - 8b^2 = m$$~~

~~$$8bmk - mk = 8b^2$$~~

~~$$\Rightarrow m | 8b^2 \Rightarrow m | 8a^2$$~~

~~$$\text{или } m | 8a^2$$~~

~~$$\Rightarrow 8a^2 = m^2 k^2$$~~

$$\frac{8(b^2+a^2) : m}{b((a+b)^2+8ab) : m} \rightarrow$$

$$8(a-b)^2$$

$$\leftarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

$$\begin{cases} a+b=mn \\ 2ab=mn \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &: mn \\ b^2 + 2ab & \end{aligned}$$

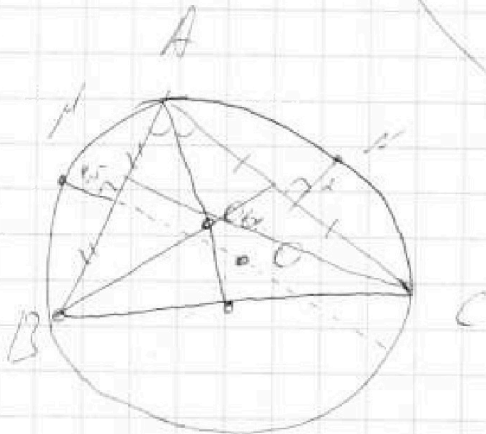
$$2(2ab) : n$$

$$4a^2 + 3ab + 4b^2 : n$$

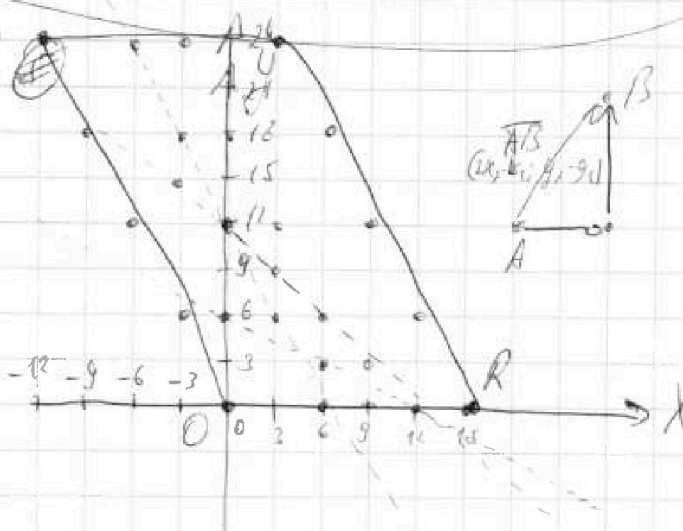
$$4a^2 - 8ab + 4b^2 : n$$

$$2(a-b)^2 : n$$

③



④



$$\begin{aligned} \Delta x & \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2\Delta x + \Delta y &= 12 \\ \Delta x & \geq 0, \Delta y > 0 \\ \Delta y &= 12 - 2\Delta x \\ 0 & \leq \Delta x \leq 6 \\ y - x &= \frac{0-12}{4} \\ \text{или } 0 & \leq \Delta x \leq 6 \\ \Delta x &= 6 - \frac{\Delta y}{2} \end{aligned}$$

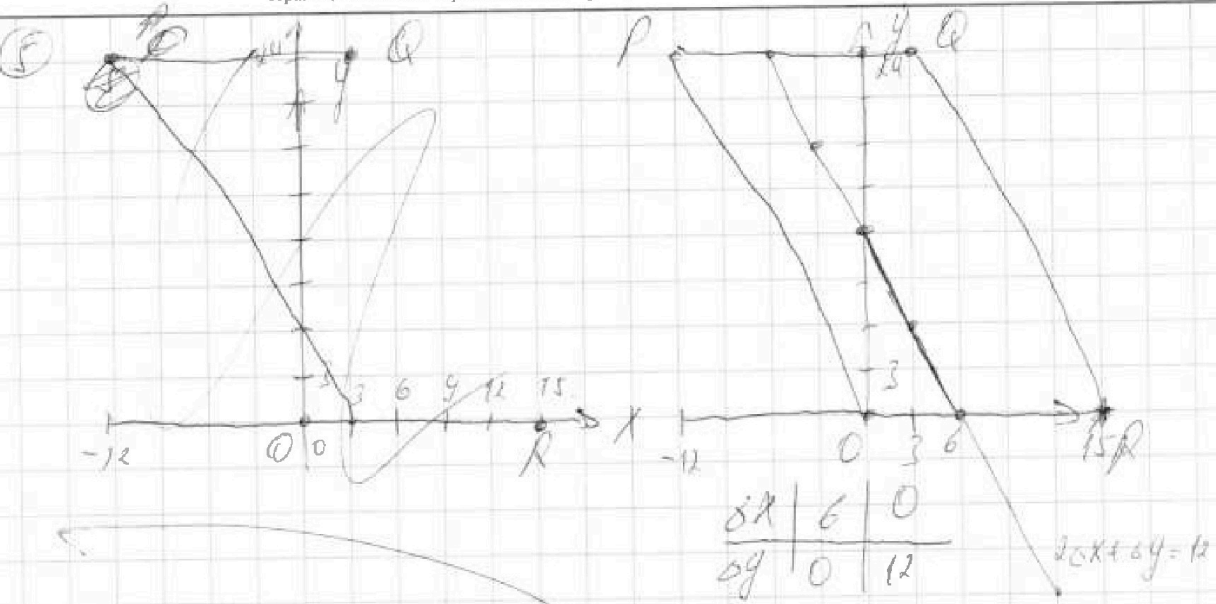
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

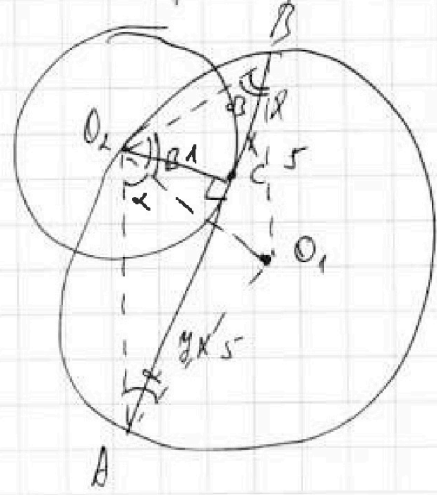
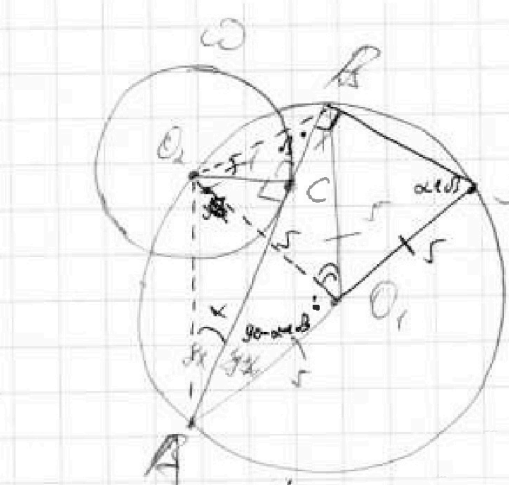
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 3



\Rightarrow ~~...~~
 Если $(x_0, y_0) \in P \cap Q$
 \Rightarrow ~~...~~ $[0, 24]$
 $x \in [0, 15]$
 $y \in [-24, 24]$
 $x \in$

$R = 5$ $r = 1$ $AC = 5$
 $AB = ?$ CB

$O_2 O_1 = R = 5$
 $O_2 A = \sqrt{1 + 49x^2}$
 $O_2 B = \sqrt{1 + x^2}$
 $\text{или } \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2r = 2$
 $\frac{2x}{\sin(x + \beta)} = 2 \Rightarrow 4x = \sin(x + \beta)$

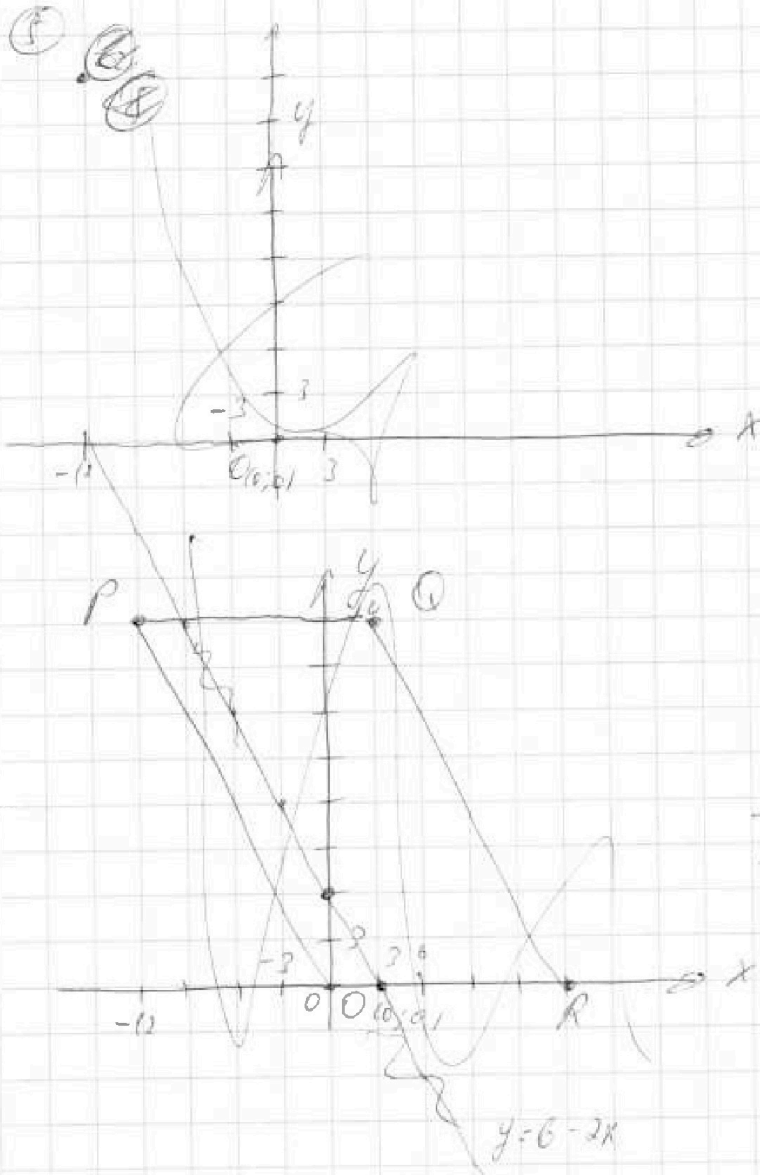
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Косинусов кол-во.
 $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Решим: $2x + y = 6$

$$\Rightarrow y = 6 - 2x$$

x	0	3
y	6	0

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 6 + (2x_1 + y_1 + 6) = 0$$

$$2x_2 + y_2 = 6 = 2x_1 + y_1 + 6$$

Решение:

Решим

Пусть $x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$26x + 6y = 12$$

$$6y = 12 - 26x$$