



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть:  $x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}$

также, то:  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot x$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot y$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot z$$

$$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\text{но } ac \neq 7^{37} \text{ и } abc - \text{целое} \Rightarrow \begin{cases} xyz : 2 \\ xyz : (7^5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xyz = 2 \cdot 7^{10} k$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k \Rightarrow abc \Rightarrow 2^{26} \cdot 7^{37} \text{ (т.к. } k \geq 1)$$

Пример

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$\text{Проверка: } ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{9+6+11} \cdot 7^{20+17} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2  $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$   ~~$x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$~~   
 Обозначим  $(a; b)$  - наибольший общий делитель чисел  $x, y$ , больший нуля

Если  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow (a; b) = 1$   
 иначе можно сократить дробь на  $(a; b)$

Получим, что, ~~если~~  $\frac{a+b}{a^2+b^2-6ab}$  можно сократить как

~~$(a; b) = m$  т.е.  $m \in (a; b)$  и при~~  
 $\Rightarrow (a+b; (a+b)^2-8ab) : m$ , т.е.  $m \in (a+b; (a+b)^2-8ab)$

По алгоритму Евклида:  $(a+b; (a+b)^2-8ab) = (a+b; 8ab)$   
~~Вся дробь  $\frac{8ab}{(a+b)^2-8ab}$~~   
 очевидно, что  $4ab \geq 1$  ~~( $a \geq 1; b \geq 1$ )~~  
 $\Rightarrow 8ab \geq 2ab \geq \frac{4ab}{a+b}$

Посмотрим при каких условиях  $8ab \geq a+b$ :  
 ~~$8ab \geq a+b \geq 2ab$~~   
 и то ~~тогда~~  $\Rightarrow$  среднее

~~$4ab$~~   ~~$8ab$~~   
 Очевидно, что  $(4a-1)(2b-1) \geq 0$  тк  $a \geq 1$   
 Значит  $8ab > 2b + 4a - 1 = a+b + \underbrace{(b+3a-1)}_{\geq 0} > a+b$

Получим, что  ~~$8ab > a+b$~~  всегда  
 ~~$ab \geq 0; a+b \geq 0$~~  ~~иногда~~

тк  $(a; b) = 1 \Rightarrow (ab; a+b) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max((a+b; 8ab)) = \max((a+b; 8)) = 8$

тк  $(x; y) \leq \max(x, y)$ ; т.е.  $\max(m) = 8$

Пример  $\begin{cases} a=1 \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{15}$  - несокр

$\frac{a+b}{a^2+b^2-6ab} = \frac{1+15}{1+15^2-6 \cdot 15 \cdot 1} = \frac{16}{136} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 17} = \frac{2}{17}$  ; несокр ;  $m=8$

Ответ:  $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

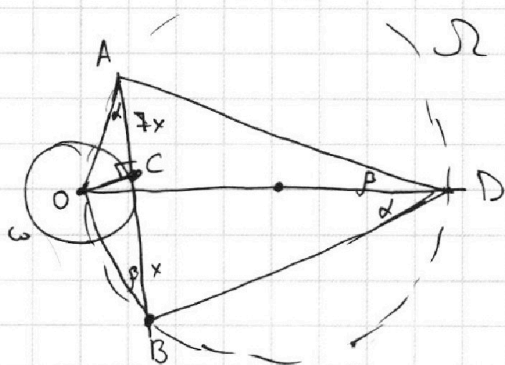
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$f(y) = \sin y > 0 \text{ тк } 0 < y < \pi$$



Дано:  $O$  - центр окр  $\omega$   
 $O \in \text{окр } \Omega$ ;  $AB$  - хорда  $\Omega$   
 $AB$  кас  $\omega = \mathcal{C}$   
 $AC$ :  $CB = 7$ ;  $r = 1, R = 5$   
 радиуси  $\omega$  и  $\Omega$  совб

И-ти:  $AB = ?$

Пусть  $\angle OAB = \alpha$  и

$\angle OBA = \beta$

Пусть  $AC = 7x$ ;  $CB = x$

Проведем в  $\Omega$  диаметр, содержат  $O$ ; Пусть он хордою  
пересекает  $\Omega$  в точке  $D$

Тогда ~~тогда~~  $\angle ADO = \angle ABO = \beta$ ;  $\angle BDO = \angle BAD = \alpha$

Рассм  $\triangle C$ :

$OC \perp AB$  в  $T \in C$  тк ~~кас~~ точка касания

~~в~~ в  $\triangle AOC$ :  $\text{tg} \alpha = \frac{1}{7x}$ ; в  $\triangle BOC$ :  $\text{tg} \beta = \frac{1}{x}$  (тк  $OC = r = 1$ )

По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R = 10; \quad 8x = 10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{49x^2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{49x^2}{49x^2 + 1}$$

$$\text{Аналогично: } \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$4x = \frac{5}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} (x + 7x) \quad | : 4x \neq 0$$

$$1 = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} \Leftrightarrow (1 + x^2)(49x^2 + 1) = 100$$

$$1 + 49x^4 + 50x^2 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

По теореме Виета:  $\begin{cases} x^2 = 1 - \text{кор} x \\ x^2 = -\frac{99}{49} - \text{кор} x \end{cases} \text{ тк } x^2 \geq 0 \Rightarrow x = 1 \text{ тк } x \geq 0$

$$AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8$$

Ответ:  $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

Область решений не существует тк ~~2 > 2~~

возведем в квадрат:  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ \text{но } 2 \cdot \frac{2^2}{7^2} + \frac{2 \cdot 2}{7} + 1 > 0 \text{ неверно} \end{cases}$$

Значит переходя к равносильности

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$(2 - 7x) \left( \frac{1 - (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \right) = 0$$

(1)  $2 - 7x = 0$

(2)  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

(1)  $x = \frac{2}{7}$ ;  $0 < \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow \text{лог } x$

(2) введем в квадрат

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -1 + 7x \Rightarrow 7x - 1 \geq 0; x \geq \frac{1}{7}$$

введем в квадрат:  $4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}; \quad \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}; \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}; \quad \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}; \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}, \text{ верно}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}, \text{ неверно}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(2x - 3)(x - 1) \geq 0$$

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} = \frac{11 + 16}{41} = \frac{27}{41} < 1 \Rightarrow \text{лог } x$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ только при } x \geq 0 \Rightarrow \text{лог } x$$

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$  или  $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

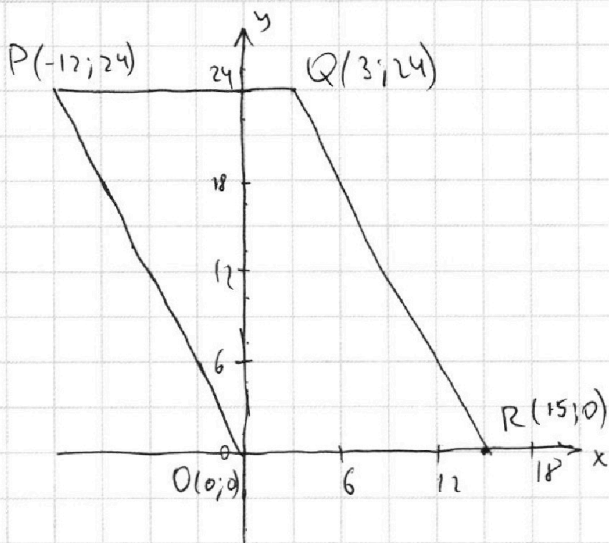
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



Найдем уравнение  
прямой QR:

$$\frac{x-3}{15-3} = \frac{y-24}{0-24}$$

$$\frac{x-3}{12} = \frac{24-y}{24}$$

$$2x-6 = 24-y$$

$$2x+y = 30$$

$$PQ: y = 24$$

$$PO: y+2x = 0$$

$$OR: y = 0$$

Получим для всех точек

$$\begin{cases} 0 \leq y+2x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 24 \\ (2x_2+y_2) - (2x_1+y_1) = 12 \end{cases}$$

← "разность" двух прямых вида

$$2x+y = c$$

где  $c$  равно  $y/y$  или  $x/x = 12$

Пусть  $2x_1+y_1 = c \geq 0 \Rightarrow 0 \leq c \leq 18$

$$2x_2+y_2 = c+12 \leq 30$$

при этом, т.к.  $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{Z} \\ y_1 \in \mathbb{Z} \\ x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$

и кол-во пар  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  равно:

кол-во  $\begin{cases} c=0 \\ \dots \\ c=18 \end{cases}$  при  $c: 2: |x_{\text{ос}} - x_{\text{пу}=24}| + 1; x_{\text{ос}} = \frac{c}{2}$

$c: 2: |x_{\text{ос}} - x_{\text{пу}=24}| + 1; x_{\text{ос}} = \frac{c}{2} - 12$

$$\text{кол-во} = \sum_{c=0}^{18} \left( \left| \frac{c}{2} - \frac{c}{2} + 12 \right| + 1 \right) = \sum_{c=0}^{18} 13 = 19 \cdot 13 = 247$$

В квадрате т.к. для любой точки прямой  $2x+y=c$  можно выбрать любую точку прямой  $c+12=2x+y$  той же четности

$$\text{кол-во} = 9 \cdot 12^2 + 10 \cdot 13^2 = 2986$$

Ответ: 2986

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Реш:

(1)  $y = ax + 10b$

(2)  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$  ~~линии~~ **линии** ~~касания~~ **касания** ~~отличаются~~ **отличаются** ~~с точностью до совпадения~~ **с точностью до совпадения** ~~при равенстве~~ **при равенстве**

~~Рассмотрим~~

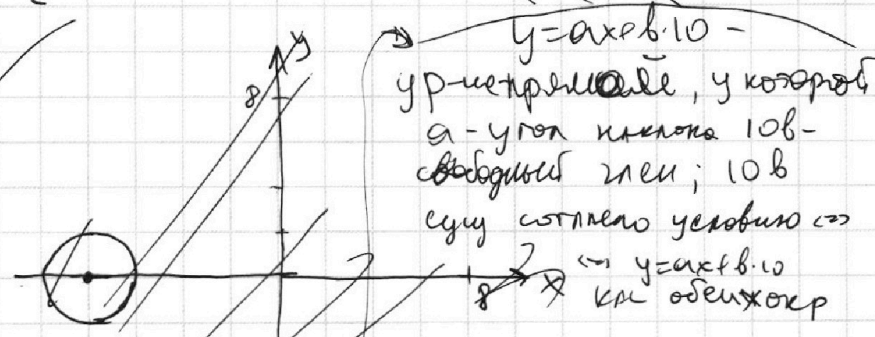
Рассмотрим

равносильно:

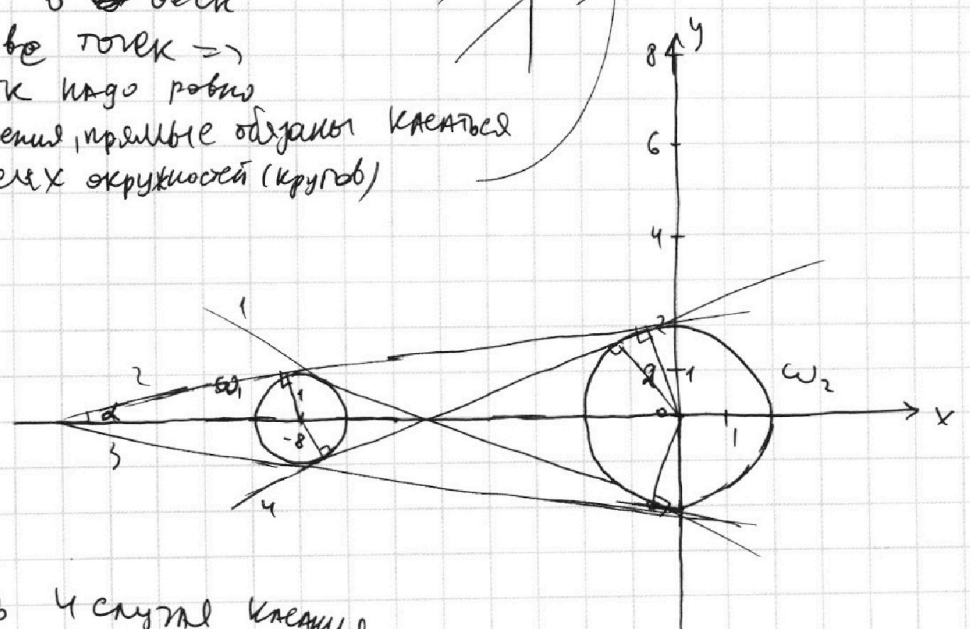
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x^2 + y^2) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Круг } (O(-8; 0); R=1) \\ \text{Круг } (O(0; 0); R=2) \end{cases}$$



Заметим, что если прямая не касается окружности (круга), то она пересекает круг в ~~двух~~ **двух** ~~точках~~ **точках**  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  тк надо равно 2 решения, прямые **обязаны** касаться **обеих** окружностей (кругов)



$y = ax + b \cdot 10$  - уравнение, у которого  $a$  - угол наклона  $10b$  - свободный член;  $10b$  эту составил условие  $\Leftrightarrow$   $y = ax + b \cdot 10$  как обобщение



Есть 4 случая касания 2х окружностей (2 внешние и 2 внутр)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

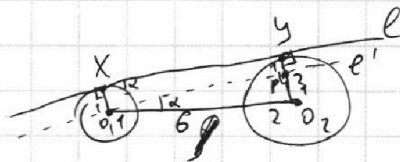


$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$$

Тк окружности симметричны оти  $Ox \Rightarrow$

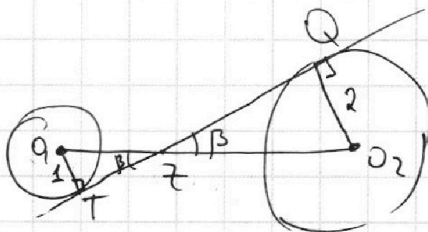
$\Rightarrow$  можно рассмотреть только 1 внешнюю  
и 1 внутреннюю касательную, остальные  
два ответа - два промежутка с противоположным  
знаком, тк в этом случае  $Ox$  - биссектриса  
углов образованных внешними или  
внутренними касательными



расстояние  
и/у центров:  $l \perp O_1O_2$

$e' \parallel l$ ;  $PO_2 = 2 - 1 = 1 = O_1Q$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PO_2}{PO_1} = \frac{1}{\sqrt{6^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$



$$O_2O_1 = 8$$

$\Delta O_1Tz \sim \Delta O_2Qz$  тк  $\angle O_1zT = \angle O_2zQ$  - вертикальные  $\Rightarrow$   
 $90^\circ = \angle O_2zQ = \angle O_1zT$

$$\Rightarrow \frac{O_2z}{zO_1} = \frac{OQ}{TO_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow zO_2 = 2zO_1 = \frac{1}{3} O_2O_1 = \frac{8}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{O_1T}{Tz} = \frac{1}{\sqrt{9z^2 - Tz^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{64 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Ответ:  $\begin{cases} a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \\ a = \pm \frac{1}{\sqrt{35}} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

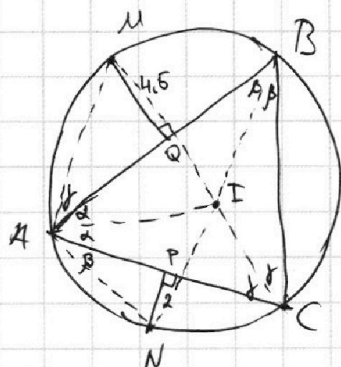
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Дано: сфера ABC

M, N - сер дуг AB и AC соотв

I - центр шара

$\rho(N, AC) = 2$ ;  $\rho(M, AB) = 4,5$

K - тл: AI

Р-ие:

Биссектрисы в  $\Delta N$  в  $\perp$  точке, в точке I, теорема о дуге.

Биссектриса проходит через середину соотв дуг, т.е.  $M \in CI$ ;  $N \in BI$

Пусть  $\angle A = 2\alpha$ ;  $\angle B = 2\beta$ ;  $\angle C = 2\gamma$  тогда  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$  (сумма углов в  $\Delta$ )

$\beta = \angle BNI = \frac{1}{2} \angle CN$ ;  $\angle MAN = \frac{1}{2} \angle BM = \angle MCB = \delta$

в  $\Delta ANP$ :  $AN = \frac{PN}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin \beta}$ ; в  $\Delta AMQ$ :  $AM = \frac{MQ}{\sin \beta} = \frac{4,5}{\sin \beta}$

$\angle ANI = \angle ANB = \angle ACB = 2\gamma$

$\angle AMI = \angle AMB = \angle ABC = 2\beta$

По лемме о треугольнике:  $MI = MA = \frac{4,5}{\sin \beta}$   
 $NI = NA = \frac{2}{\sin \beta}$

По теореме косинусов:

$\Delta AMI$ :  $AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2AM \cdot MI \cdot \cos 2\beta = 2AM^2(1 - \cos 2\beta) = 4AM^2 \sin^2 \beta$

$\Delta ANI$ :  $AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2AN \cdot NI \cdot \cos 2\gamma = 2AN^2(1 - \cos 2\gamma) = 4AN^2 \sin^2 \gamma$

Тогда:  $\begin{cases} AI = 2AM \sin \beta \\ AI = 2AN \sin \gamma \end{cases}$  тк  $\sin x$  при  $x \in [0; \pi]$ :  $\sin x > 0$

(1)  $AI = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot 9$

(2)  $AI = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot 4$

$$AI = \sqrt{AI^2} = \sqrt{9 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot 4 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

Ответ:  $AI = 6$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Зерновика*

$$5+4+6 = 155$$

$$2 \cdot \frac{(1+2\sqrt{6})^2}{4}$$

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{10+4+7=25}{10+15+7=32}$$

$$(2x-3)(x-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

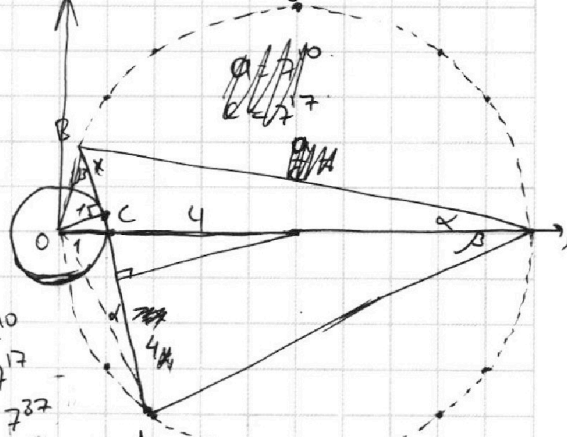
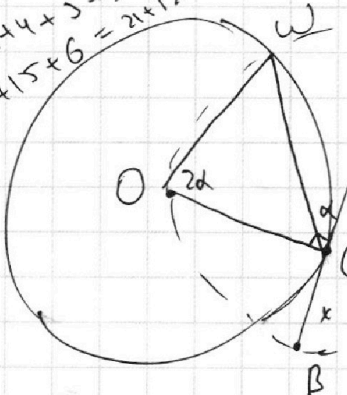
$$\Rightarrow abc \geq 2^{20+16+14+1} \cdot 7^{10+10+30+7} = 2^{51} \cdot 7^{57}$$

$$abc \geq 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} &= \frac{1}{7y} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$R \cdot AB = 2R \sin(\alpha + \beta) \cdot b =$$

$$4+4+4+5+5+5 = 21+17 = 38$$



$$ab = x \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = xyz \cdot (2^{25})^2 \cdot (7^{32})^2 = 2^{50} \cdot 7^{64}$$

$$y = ax + 10b$$

$$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$a = \sqrt{\frac{2xz}{y}} \cdot 2^8 \cdot 7^5$$

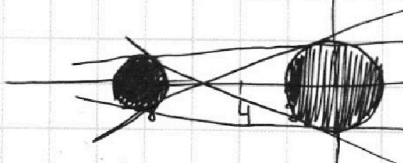
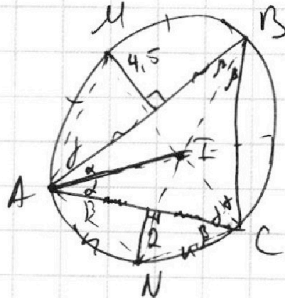
$$b = \sqrt{\frac{2xy}{z}} \cdot 2^5 \cdot 7^5$$

$$c = \sqrt{\frac{2yz}{x}} \cdot 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$



$$MI = MA = \frac{4.5}{\sin \gamma}$$

$$AI = 2 \cdot \frac{4.5}{\sin \gamma} \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin \beta \geq 4 \sin \gamma$$

$$\frac{2xy}{z} = 4 \cdot 7^0 \cdot k^2$$

$$b = 2^6 k$$

$$\sqrt{2xyz} = 9 \cdot 7^5 k^2$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k^2$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} k^2$$

$$\begin{aligned} 9 \sin \beta \cos \beta &= 4 \cos \gamma \sin \gamma \\ 9 \sin 2\beta &= 4 \sin 2\gamma \end{aligned}$$

$$AI = \frac{9 \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$$

$$b = 2^6 \Rightarrow c \geq 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$a \geq 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

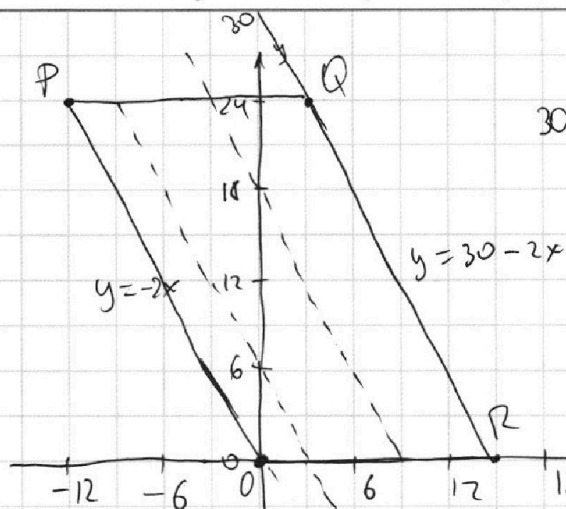
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$30x + 15y = 30 \cdot 15$   
 $2x + y = 30$

$(2x_1 + y_1) - (2x_2 + y_2) = 12$

$\begin{cases} y_0 \leq 24 \\ 2x + y \leq 30 \\ 2x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

↓ прямая      ↓ прямая  
 ↗ сдвиг

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$8ab \geq 2\sqrt{ab}$

$4\sqrt{ab} \geq 1$   
верно

$(a, b) = 1$

$(a+b; (a+b)^2 - 8ab) = (a+b; 8ab)$

1)  $a \neq 1; b = 1$

b1

$8ab \geq 4a + 2b = 1$

2) b1

b1

$8ab - 4a$

$1890 + 144 \cdot 9 = 1; 7$

b1

$4a(2b-1) \geq 2b-1$

~~6=1~~ =

$2x + y = 1$

$900 + 360 + 36 = 1296$

$\frac{8}{50 - 6 \cdot 7}$

$(4a-1)(2b-1)$

$6 \cdot 7 = 42$

$y = 24$   
 $x = -\frac{23}{2} = -11,5$

$\frac{1+15}{1+225-6 \cdot 15} = \frac{16}{1+15 \cdot 9} = \frac{16}{136} = \frac{16}{136}$

135

$136 = 8 \cdot 17$

$1296 + 1690 = 11 \rightarrow 0$

$= 6 + 180 + 800 + 2000 \neq 2$

$-11,5 \rightarrow 0,5$

$\frac{150 \sqrt{6}}{6} = 25$

$= 2986$