



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



4. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

5. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

6. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

7. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

8. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

9. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

10. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим через X_p степень вхождения простого числа p в число $x \in \mathbb{N}$. Числа 2 и 7 - простые \Rightarrow если кто-то из них входит в число y в степени n ($y_2 = n$ напр.), в число z в степени m ($z_2 = m$), то в число xy в степени $m+n$. Если число $X : p^k$, то $X_p \geq k$. Тогда у нас:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} + \begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51 \\ a_2 + b_2 + c_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \end{cases}$$

Т.о. в abc 2 входит в хотя бы 26 степени

$a_2 + c_2 \geq 37 \Rightarrow$ т.к. $b_2 \geq 0$, то $a_2 + c_2 + b_2 \geq 37$, т.о. в abc 7 входит в хотя бы 37 степени

$$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$:
 $a = 2^9 \cdot 7^{10}$
 $b = 2^6$
 $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$

Контролю убедитесь, что усл. на кратности выполн.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $a^2 - 8ab + b^2 = (a+b)(b-7a) + 8a^2$.

По условию $\frac{a}{b}$ несократимо, т.е. a и b взаимно просты:
 $(a; b) = 1 \Rightarrow (a+b; b) = 1$ и $(a+b; a) = 1$.

Надо найти наибольшее m такое, что $(a+b) : m$
и $((a+b)(b-7a) + 8a^2) : m$.

$(a+b)(b-7a) : (a+b) : m \Rightarrow ((a+b)(b-7a) + 8a^2) : m$, только
если $8a^2 : m$. Т.к. $(a+b; a) = 1$, то и $(a+b; a^2) = 1$
 $\Rightarrow (a^2; m) = 1 \Rightarrow 8 : m \Rightarrow m \leq 8$.

Пример на 8: $a=1, b=7$

Тогда $\frac{1}{7}$ - несократимо, $a+b=8, a^2 - 8ab + b^2 = 8 \Rightarrow$ ищем
сократим на 8, ч.т.д.

Ответ: 8.

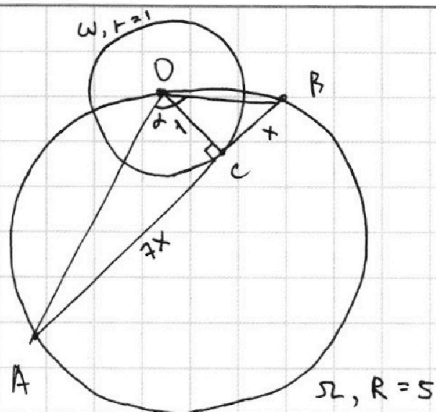
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O - центр $\omega \Rightarrow OC \perp AB$
(рад. δ π кас.); $BC = x \Rightarrow AC = 7x$.

то т. Пиф. $\triangle OCB$ и $\triangle OCA$:

$$OB = \sqrt{x^2 + 1}, \quad OA = \sqrt{49x^2 + 1}$$

Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда для $\triangle AOB$:

$$S = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)}$$

то т. син: $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{8x}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4x}{5}$

$$4x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)}; \quad x \neq 0 \quad (x - \text{длина})$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} = 10$$

$$49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t > 0$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

~~$$625 + 49 \cdot 99 = 625 + 4851 = 5476$$~~

$$\frac{D}{4} = 25^2 + 49 \cdot 99 = 625 + 4851 = 5476 = 74^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{-25 \pm 74}{49}; \quad t > 0 \Rightarrow t = \frac{74 - 25}{49} = 1$$

т.о. $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; т.к. $x > 0$, то $x = 1$

$$\Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$. Сделаем
замену $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$ и $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$. Тогда:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Вернём замену. Сначала найдём x , а потом проверим
ограничения.

$$\begin{aligned} 1) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 - 5x + 3 &= 2x^2 + 2x + 1 \\ 7x - 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Заметим, что для $2x^2 + 2x + 1$ $\Delta = 1 - 2 = -1 < 0 \Rightarrow$
 $2x^2 + 2x + 1 > 0$ при любых x .

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2})$$

$$\text{при } x = \frac{2}{7}: \quad = 2 \cdot \underset{0}{(\frac{2}{7} - 1)} \cdot \underset{0}{(\frac{2}{7} - \frac{3}{2})} \Rightarrow > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \text{ подходит.}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2 \cdot \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= 1 \\ 4x^2 - 3x + 3 + 2 \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Заметим, что для $4x^2 - 3x + 3$ $\Delta = 9 - 4 \cdot 12 = -39 < 0 \Rightarrow$

$4x^2 - 3x + 3 > 0$ при любых x . Т.к. $\sqrt{\dots} \geq 0$, то
лев. часть $> 0 \Rightarrow$ равенство 0 не и.б.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 &= 12 \end{aligned} \Rightarrow y_2 \text{ и } y_1 \text{ одной четности}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) (x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) < 0$$

скобки разного знака.

Рассмотрим график это кер-ва.

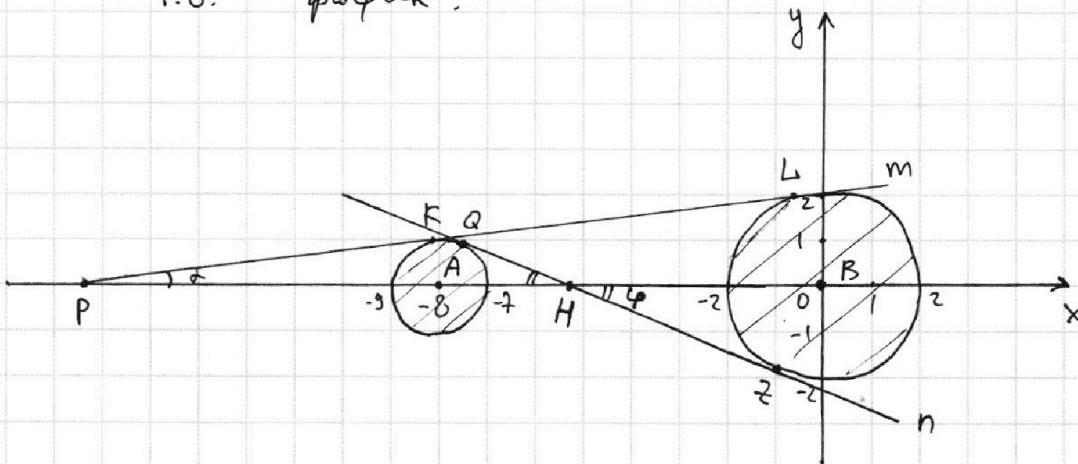
$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \quad - \text{окр. с центром } (-8; 0), R=1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad - \text{окр. с центром } (0; 0), R=2.$$

Тогда очев., что эти окр. не имеют общих точек \Rightarrow если в третьей в совокупности

выражении скобки должны быть разного знака, то это области внутри одной и вне другой окружностей \Rightarrow просто области внутри окр.

т.о. график:



$$2) y = ax + 10b$$

график - прямая, угл уша наклона = a, пересек. ось Oy в т. $(0; 10b)$.

По усл. должно быть ровно 2 рещ. \Rightarrow ровно 2 общие точки этой пр. и построенных окр. 4 их внутр. обл. Если пр. пересект какую-то окр., то общих точек сразу станет бесконечное мн-во.

Значит, она может их только касаться. Но тогда всего с каждой окр. по ≤ 1 общ. т. \Rightarrow всего

$\leq 2 \Rightarrow$ т.к. нужно 2, то пр. кас. обеих окр. \Rightarrow мн-во подходящих пр. - ~~н~~ общие касат. окр. сн. продолжение на другой листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Всего 2 внешние и 2 внутр. кас. Линии центров окр.
плет. на оси $Ox \Rightarrow$ внеш. кас. симм. относит. Ox
и внутр. тоже симм. отн. $Ox \Rightarrow$ найдем углы
наклона 1 внутр. и 1 внеш. кас, а через
них из симметрии найдем др. фрунз кас.
Проведем эти кас. на графике, пусть m и n .
 A и B - центры окр., т. кас. и пересел. обознач. на
рис.

• m : $BL = 2$, $BL \perp m$; $AK = 1$, $AK \perp m$ (рад. в т. кас.), $\angle LPB = \alpha$
- общ. $\Rightarrow \triangle PKA \sim \triangle PLB$ по 2 углам. $AB = 8$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{BL}{AK}$$

$$\frac{PA+8}{PA} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{8}{PA} = 1 \Rightarrow PA = 8$$

~~$$\frac{AB}{PA} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$~~ по т. Пиф. $PK = \sqrt{PA^2 - AK^2} = 3\sqrt{7}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{PK} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

• n : аналог. $AQ = 1$, $AQ \perp n$; $BZ = 2$, $BZ \perp n$, $\angle QHA = \angle ZHB = \varphi$
(вертик) $\Rightarrow \triangle QHA \sim \triangle ZHB \Rightarrow \frac{BZ}{AQ} = \frac{BH}{AH}$

$$\frac{2}{1} = \frac{8-AH}{AH} \Rightarrow \frac{8}{AH} = 3 \Rightarrow AH = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пиф. } QH = \sqrt{AH^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{AQ}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{т.о. } \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}, \quad \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{21}, \quad \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{3\sqrt{55}}{55},$$

$\varphi = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$. Т.к. только в таких углах
какая-то касат., а коэф. сов. осев.
подбирается, чтобы подвигать пр. вверх/вниз
и попасть в касание.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{21}$, $-\frac{\sqrt{7}}{21}$, $\frac{3\sqrt{55}}{55}$, $-\frac{3\sqrt{55}}{55}$.

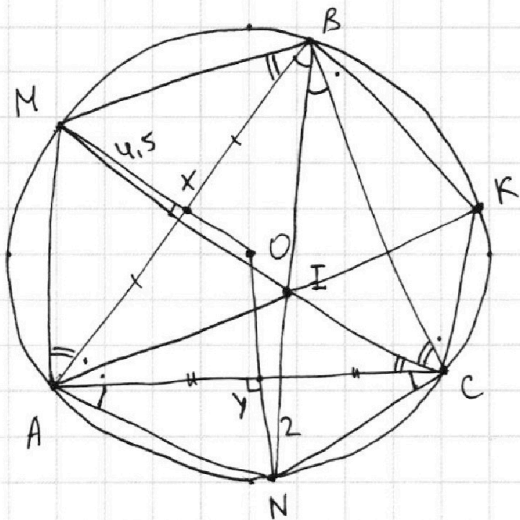
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. M и N - середины $\angle AB$ и $\angle AC$, то перп. из M и N на AB и AC совпад. авт. сев. пер-ах и пересек. в центре опис. окр. т. O . $OA = R$ опис.

Пусть I - центр $\triangle ABC \Rightarrow BI$ попадает в т. N , сг в т. M . По лемме о треугольнике $IN = AN = NC$, $IM = MA = MB$, $IK = BK = CK$.

По т. Пифаг $\triangle OAY$ и $\triangle OAX$: $AY^2 = R^2 - (R-2)^2$, $AX^2 = R^2 - (R-4,5)^2$
 $AY = \sqrt{4R-4}$, $AX = \sqrt{9R-4,5^2}$
 $AC = 2\sqrt{4R-4}$, $AB = 2\sqrt{9R-4,5^2}$

$\triangle ANY$ и $\triangle AMX$: $AM^2 = AX^2 + 4,5^2 = 9R$, $AN^2 = 4R$
 $AM = 3\sqrt{R}$, $AN = 2\sqrt{R}$

Отсюда т. I : $AI \cdot IK = IB \cdot IN = IC \cdot IM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$(-8; 0), R=1$

1) граница обеих
2) разного знака

$$x^2 + y^2 = 4$$

$(0; 0), R=2$

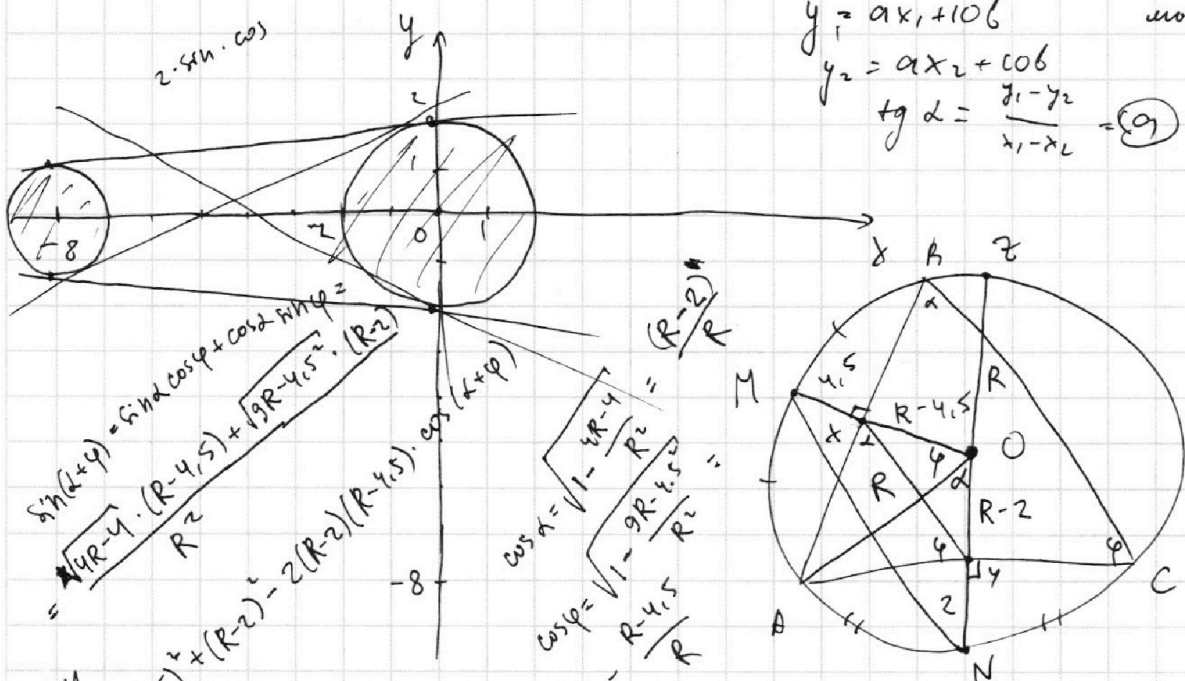
$\alpha < \beta$ $\alpha > \beta$
 $\alpha \leq \beta - 1$ $\beta = 3$

$y = \alpha x + 10\beta$
проход через $(0; 10\beta)$, крутится

$$\begin{aligned} 2+3 &= 5 \\ 2^2+3^2-6 \cdot 2 \cdot 3 &= \\ &= 4+9-36 \neq 5 \end{aligned}$$

больше не можем выпр.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 10\beta \\ y_2 &= \alpha x_2 + 10\beta \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \textcircled{0.9} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \\ &= \frac{\sqrt{4R-4} \cdot (R-4.5) + \sqrt{9R-4.5^2} \cdot (R-2)}{R^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{4R-4}{R^2}} = \frac{(R-2)}{R} \\ \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{9R-4.5^2}{R^2}} = \frac{R-4.5}{R} \end{aligned}$$

$$xy = (R-4.5)^2 + (R-2)^2 - 2(R-2)(R-4.5) \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

$$\frac{b^2 - 6b + 1}{b^2 + b} \quad \left| \frac{b+1}{b-7} \right.$$

$$\begin{aligned} &-7b+1 \\ &-7b-7 \\ \hline &8 \end{aligned}$$

$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)(b-7a) + 8$$

$$(a+b)(b-7a) + 8a^2$$

576+9

$$4R-4 = (2R-2) \cdot 2$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{9R-4.5^2}}{R}$$

8, $R^2 - 4R + 4$

$$\begin{aligned} AY^2 &= R^2 - (R-2)^2 = \\ &= 4R-4 \\ AY &= 2\sqrt{R-1} = \sqrt{R^2 - 9R + 9.5^2} \\ AX^2 &= R^2 - (R-4.5)^2 = \\ &= 9R - 4.5^2 \end{aligned}$$

24
24
48
576

