



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

abc - миним.? $\sqrt{1}$

a, b, c должны состоять

только из простых множителей 2 и 7,

чтобы abc было минимал., т.к.

иначе другие множит. не

увеличат на величину, услов.

и a, b, c , не увеличат

на abc , тогда - увеличат.

(т.к. любой прост. множ. > 1)

Другой вариант: (т.к. $ab, bc, ac \neq 0$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} 1. ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ 1. bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \\ 1. ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} : \begin{matrix} \text{т.к. } b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^7 \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

$$c^2 = 2^{23} \cdot 7^{44}$$

это невозможно
т.к. $\sqrt{2^{23}} \notin \mathbb{N}$

Представим $\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^z \cdot 7^f \\ c = 2^e \cdot 7^g \end{cases}$, где $x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y \cdot 2^z \cdot 7^f = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^k \cdot 7^l \\ 2^z \cdot 7^f \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^u \cdot 7^v \\ 2^x \cdot 7^y \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^w \cdot 7^r \end{cases}$$

т.к. другой вариант невозможен
то для рав-ва
должны
на 2 и 7
в нуж. стая,
т.к. это
 $x, z, e, y, f, g \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x+z = 14+k \\ y+f = 10+l \\ z+e = 17+u \\ f+g = 17+v \\ x+e = 20+w \\ y+g = 37+r \end{cases}, a \quad abc = 2^{x+z+e} \cdot 7^{y+f+g}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{1}$ (продолжение)

$$\begin{cases} x+z = 14 + k \\ y+f = 10 + l \\ z+e = 17 + m \\ f+g = 17 + u \\ x+e = 20 + o \\ y+g = 37 + r \end{cases}$$

Найти

$$x+z+e \quad y+f+g$$

k, l, m, u, o, r - наименьш. подкод. числа

$$\begin{cases} x+z \geq 14 \\ y+f \geq 10 \\ z+e \geq 17 \\ f+g \geq 17 \\ x+e \geq 20 \\ y+g \geq 37 \end{cases}$$

А как минимум, это все 2 числа

$$\begin{aligned} x+z &\geq 3 \\ x+z &\geq 14 \end{aligned}$$

$$2x \geq 17$$

$$x \geq 8,5$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ (наим. } x)$$

$$9+z \geq 14$$

$$z \geq 5$$

$$z = 5 \text{ (наим. } z)$$

$$5+e \geq 17$$

$$e \geq 12$$

$$e = 12 \text{ (наим. } e)$$

$$x+z+e = 14+12 = 26$$

$$y-f \geq 20$$

$$y+f \geq 10$$

$$2y \geq 30$$

$$y \geq 15$$

$$y = 15 \text{ (наим.)}$$

$$g \geq 37 - y$$

$$g \geq 22$$

$$g = 22 \text{ (наим.)}$$

$$f+g \geq 17$$

$$f \geq -5$$

$$f = 0 \text{ (наим.)}$$

$$y+g+f = 37$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \begin{matrix} 26 & 37 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Σ2

$\frac{a}{b}$ - несократима \Rightarrow НОД $(a, b) = 1$

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

можно
сократить
на m

\Rightarrow Π у нас a, b -
взаимно прот., т.к.
НОД $(a, b) = 1$

$a^2 - 6ab + b^2 =$
 $= 2a^2 - 4ab + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) =$
 $= 2(a-b)^2 - (a+b)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b = xm \not\div a \\ a-b = xm \not\div b \end{cases}$
 $\Rightarrow a \not\div m$
 $b \not\div m$

или

$a^2 - 6ab + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 8ab = (a+b)^2 - 8ab$

$\Rightarrow 8ab \not\div m$

\Rightarrow макс. $m = 8$, т.к. a, b и m
не имеют общих простых
множит.

Пусть $a+b = m \cdot x$, где $m \nmid x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{m \cdot x}{(mx)^2 - 8ab} = \frac{m \cdot x}{m^2 x^2 - 8ab}$

\Rightarrow ответ: $m = 8$.

\Rightarrow чтобы сократить на
 m надо, чтобы

$8ab \not\div m$

Заметим, что

сумма взаимно
простых чисел $\not\div$

на каждое из них, (\because)

ведь чтобы сумма дел. на a ,

надо чтобы каждое слагаемое дел. (\because) на a .

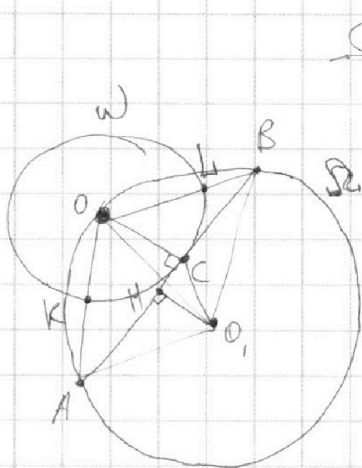
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведем OC — радиус в т. касан.

$\Rightarrow OC \perp AB$ (как радиус у радиуса в т. касан.)

Проведем O_1O , O_1B и O_1A — радиус Ω_2

Соед. AO , OB и CO ,

Проведем $O_1M \perp AB$ ($M \in AB$)

Пусть $CB = x$, тогда $AC = 7x$

O_1M — высота в $\triangle O_1AB$ ($O_1A = O_1B$)
явл. медианой и биссектрисой.

$$\Rightarrow \cancel{MA} = \cancel{MB} = \frac{AB}{2} = \frac{AC+CB}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$$

$$AC : CB = 7$$

r_C — т. касан.

$$R_{\Omega} = 1 = r$$

$$R_{\Omega'} = 5 = R$$

$AB = ?$

блеу. ободьяе.

Пусть $AO \cap \Omega = K$

$OB \cap \Omega = L$

Тогда AK и BL касан. и секущ.

$$AC^2 = AK \cdot (AK + 2r)$$

$$BC^2 = BL \cdot (BL + 2r)$$

$$49x^2 = AK^2 + 2AK$$

$$x^2 = BL^2 + 2BL$$

$$AK_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 49x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + 49x^2} > 0$$

$$\Rightarrow AK = -1 + \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$BL_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2} > 0$$

$$\Rightarrow BL = -1 + \sqrt{1 + x^2}$$

\Rightarrow уг $\angle AOB$ (используем косинусы)

$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1 + 49x^2 + 1 + x^2 - 64x^2}{2 \sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{2-14x^2}{2 \sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1-7x^2}{\sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

Заметим, что

$$\angle AOB = \frac{AOB}{2} = \frac{AOB}{2} = 180 - \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\cos \angle AOB = \cos 180 - \frac{\angle AOB}{2} = -\cos \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\left(\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \end{aligned} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3 (продолжение)

$$\Rightarrow \cos \angle A O_1 B = -\cos \angle A O B$$

Заметим, что $O_1 M$ - бисс. (выше доказано)

$$\Rightarrow \angle A O_1 M = \frac{\angle A O B}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \angle A O_1 M = -\cos \angle A O B$$

$\triangle A O_1 M$ - пр/уг

$$\Rightarrow \cos \angle A O_1 M = \frac{O_1 M}{A O_1}$$

$$\frac{O_1 M}{A O_1} = \frac{7x-1}{\sqrt{49x^2+16x^2}} = \frac{O_1 M}{5}$$

$$O_1 M = \frac{35x^2-5}{\sqrt{1+49x^2+16x^2}}$$

P_0 + Миграция из $\triangle A M O_1$

$$A O_1^2 = A M^2 + O_1 M^2$$

$$25^2 = 16x^2 + \frac{25(7x-1)^2}{(1+49x^2+16x^2)}$$

$$\frac{(25+16x^2)(1+50x^2+49x^4) + 25(7x-1)^2}{(1+49x^2+16x^2)} = 0$$

$$-25 - 25 \cdot 50x^2 - 25 \cdot 49x^4 + 16x^2 + 16 \cdot 50x^4 + 16 \cdot 49x^6 + 204x^4 - 50 \cdot 7x \cdot 25 = 0 \quad | : x^2 (x \neq 0)$$

$$16 \cdot 49x^4 + 16 \cdot 50x^2 - 32 \cdot 50 + 16 = 0 \quad | : 16$$

$$49x^2 + 50x^2 - 100 + 1 = 0$$

$$49x^2 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 49 \cdot 99}}{49 \cdot 2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 49 \cdot 99}}{49} > 0$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \cdot 49 \\ \hline 441 \\ + 4851 \\ \hline 5478 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5478 \cdot 24 \\ \cdot 49 \\ \hline 144 \quad 576 \\ \cdot 49 \\ \hline 936 \end{array}$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x) \quad | \cdot 12$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 7x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x)^2 - 28x + 49x^2$$

$$-5x + 3 - 2x^2 - 7x - 1 - 4 + 28x - 49x^2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1}$$

$$-49x^2 + 21x - 2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} \quad | \cdot 12$$

$$-(7x)^2 + 14x + 1 - 7x + 1 = -((7x - 1)^2 - (7x - 1)) = -((7x - 1)(7x - 1 - 1))$$

$$-(7x - 1)(7x - 2) + 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 0$$

$$(7x - 2)(2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} - (7x - 1)) = 0$$

$$x = \frac{2}{7} \quad 2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 7x - 1 \quad | \cdot 12 \quad \wedge \quad 7x - 1 \geq 0 \quad (7x \geq 1)$$

$$4(2x^2 + 7x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 - 49x^2 + 14x - 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 41 \cdot 3}}{41}$$

~~$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 123}}{41}$$~~

~~$$x_{1,2} = \frac{123 \pm \sqrt{121 + 123}}{244}$$~~

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

Handwritten signature

Проверим $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}} = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}}$$

верно

Проверим

$$1 + (1 + \sqrt{244}) \geq 41 \quad 2(1 - \sqrt{244}) \geq 41$$

$$77 + 2\sqrt{244} \geq 41 \quad -7\sqrt{244} \geq -36$$

$$2\sqrt{244} \geq -36 \quad \frac{15}{16} \geq \frac{16}{16}$$

верно

$$-7.15 < -36$$

$\Rightarrow -7\sqrt{244} < -36$

не верно

\Rightarrow ответ: $\frac{11 + \sqrt{244}}{41}; \frac{2}{7}$

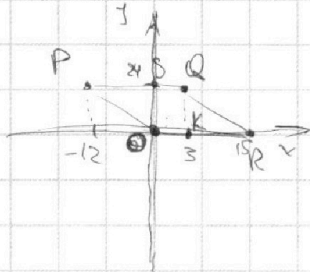
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

Решим т.д и т.к

$$(y_2 - y_1) \in (-24; 24)$$

$$(x_2 - x_1) \in (-15; 15)$$

$$2(x_2 - x_1) \in (-30; 30)$$

$$т.к. x_2, x_1 \in \mathbb{Z}$$

$$то 2(x_2 - x_1) - четное число \in (-30; 30)$$

$$2 + 11 = 13, 4 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1) - четное число \in (-24; 24)$$

$\Rightarrow y_2, y_1$ - одинаки четности

~~$$2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 12$$~~

При $(y_2 - y_1) = 24$

$$2(x_2 - x_1) = -12 \quad 2(x_2 - x_1) \in (-12; 30)$$

$2(x_2 - x_1)$	-12	-10	-8	-6	-4	-2
$x_2 - x_1$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$y_2 - y_1$	24	22	20	18	16	14
				max 15	15, 9	15, 11

$y_2 \in PQ$
 $y_1 \in OR$

$x_1, y_1 \in OQ$

$x_1 \in OQ$
 $Q(3) = 3 + 6 = 9$
 $9 \in OQ$

$\Rightarrow 9$ пар

При макс. y кол-во пар на 1 меньше, чем макс. чет. разряд
А макс. чет. разряд одинаковый и у y_2 и у y_1 пар - макс

При макс. $y_2 - y_1$ макс. на 1
это 2 группы старших
 \Rightarrow увелич. кол-во на 2

3 макс. чет. разряда
5 разрядов

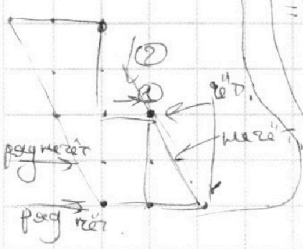
$13 \cdot 3 + 12 \cdot 2 = 39 + 24 = 63$
 $15 \cdot 4 + 14 \cdot 3 = 60 + 42 = 102$
 $15 \cdot 5 + 14 \cdot 4 = 75 + 56 = 131$

$2(x_2 - x_1)$	0	2	4	6	8
$x_2 - x_1$	0	1	2	3	4
$y_2 - y_1$	12	10	8	6	4

наим. кол-во чет. разрядов на 2
 $4 \cdot 15$ $6 \cdot 17$ $7 \cdot 19$ $5 \cdot 21$

$2(x_2 - x_1)$	10	12	14
$x_2 - x_1$	5	6	7
$y_2 - y_1$	2	0	-2
	$7 \cdot 23$	$9 \cdot 25$	$7 \cdot 23$

только точки x_2 и x_1 не меняются



11 и 3
каждому разряду
 $11 + 10 + 11 = 32$ пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2(x_2 - x_1)$	18	18	20	22	24	26	28	30
$x_2 - x_1$	9	9	10	11	12	13	14	15
$y_2 - y_1$	-4	-8	-8	-10	-12	-14	-16	-18
	(547)	(849)	(147)					

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



56

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

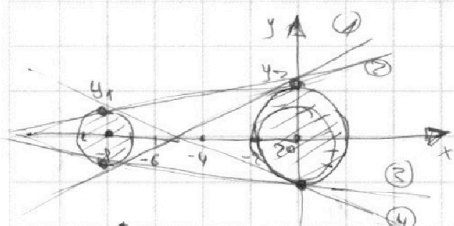
$y = ax + 10b$ — прямая

$y_1, y_2 \leq 0$, где $y_1 = (x+8)^2 + y^2 - 1$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — центр $(-8; 0)$, радиус 1
 $x^2 + y^2 = 2$ — центр $(0; 0)$, радиус $\sqrt{2}$

≤ 0 если y_1 и y_2 — разных знаков
 т.к. y_1 и y_2 — окружности, у которых y — координата
 внутри ≤ 0 , снаружи > 0

Заметим, что окружности не пересекаются.
 \Rightarrow нужны касательные — внутри одной и снаружи другой (там или $y_1 > 0, y_2 < 0$ или $y_1 < 0, y_2 > 0$)



т.к. нам нужны только 2 реш. то это возможно, только если прямая y — касат. к обеим окружностям

есть всего 4 таких прямых (см. на картинке)

для пр. y , а — tg угла наклона пр. y к x

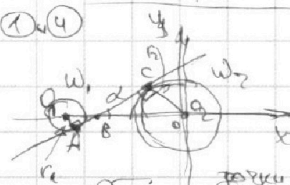
Заметим, что углы α_1 и α_2 равны

также углы α_2 и α_3 равны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_4 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \end{aligned}$$

\Rightarrow Рассмотрим оба случая:

① и ④ нужно найти $\text{tg} \alpha = \alpha_1 = -\alpha_4$



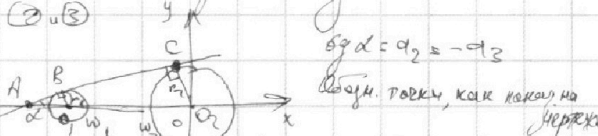
Обозначим точки касания A, B, C, D
 $\Rightarrow AC$ — касат. к ω_1 и ω_2
 $\Rightarrow \triangle O_1AB \sim \triangle O_2CB$ (по \angle и $\angle O_1BA = \angle O_2CB$)
 $\Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B} = \frac{O_1A}{O_2C} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (как стороны сход. тр. $\triangle O_1AB$)

$$\begin{aligned} \Sigma O_1B &= O_2B \\ O_1O_2 = 8 &= O_1B + O_2B = \Sigma O_1B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow O_1B &= \frac{8}{3} \\ \Rightarrow \text{из } \triangle O_1AB \text{ — по теореме Пифагора} \\ AB &= \sqrt{O_1B^2 - O_1A^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{tg} \alpha = \text{tg} \angle O_1BA = \frac{O_1A}{AB} = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \frac{3\sqrt{55}}{55} = \alpha_1 = -\alpha_4$$

Второй случай



$\text{tg} \alpha = \alpha_2 = -\alpha_3$
 Обозн. точки касания A, B, C, D
 $\Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle ACO_2$ (по \angle и \angle)

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AO_2} = \frac{BO_2}{AO} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma AO &= AO_2 + O_2O \\ AO &= O_2O = 8 \end{aligned}$$

(↑↑) (продолж.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$ (продолжение)

$\Rightarrow \triangle ABO_1$ - пр/гр (или было сказ. выше)
 BO_1 - высота

$$AB = \sqrt{AO_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

$$\tan \alpha = \tan \angle BAO_1 = \frac{BO_1}{AO_1} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65} = \frac{\sqrt{7}}{21} \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$$

\Rightarrow При данных a можно будет подобрать l так, что

прямоугольник xy будет касат. к обеим окружностям,
в частности это будет касат. по Oy и Ox .

(1) / (2) / (3) / (4) и Oy (на это совсем другая история)

Ответ: $-\frac{\sqrt{55}}{55}$; $-\frac{\sqrt{7}}{21}$; $\frac{\sqrt{7}}{21}$; $\frac{\sqrt{55}}{55}$.



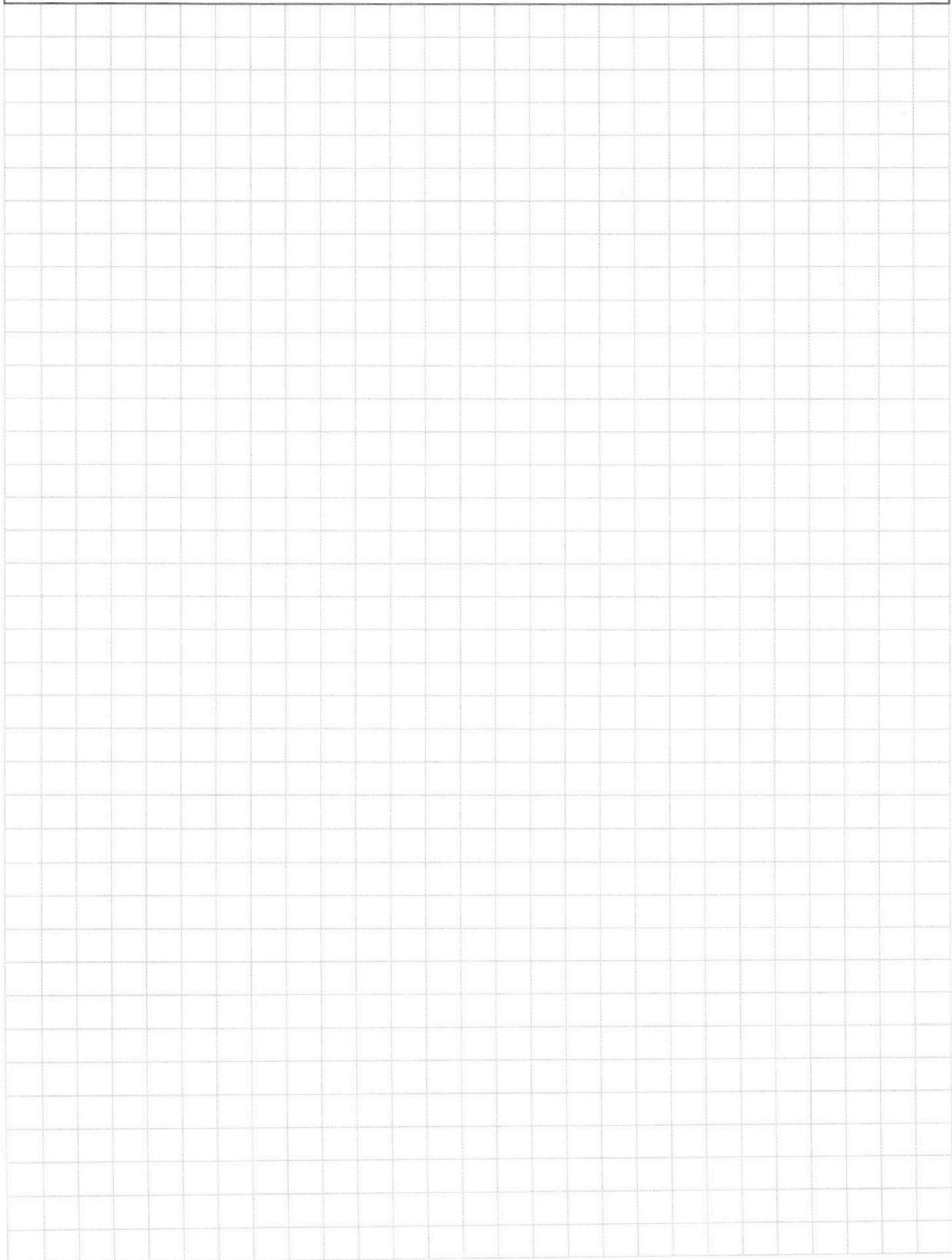
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



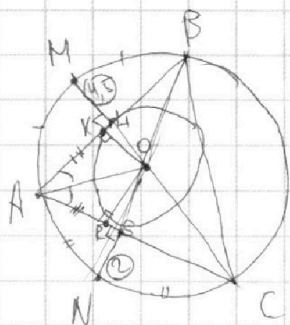
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



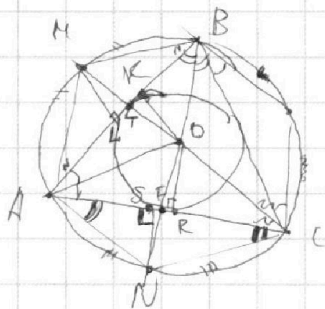
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AO = ?$

$AS = SC$
 $AL = LB$

~~$AK = TL$~~
 ~~$AR = TS$~~



$AO^2 = AR^2 + OR^2 = AR^2 + \left(\frac{FR \cdot NS}{SF}\right)^2 =$

$= AR^2 + \left(\frac{KT}{TL}\right)^2 \cdot ML^2$

$\frac{KT}{TL} \cdot ML = \frac{FR}{SF} \cdot NS$

$\triangle AML \sim \triangle COR$

$\Rightarrow \frac{ML}{OR} = \frac{AL}{RC} = \frac{AK}{R}$

$\triangle MBT \sim \triangle OKT$

$\Rightarrow \frac{MB}{OK} = \frac{BT}{TK}$

$\frac{MB}{OR} = \frac{LT + TK + KB}{RC}$

$\triangle KOB \sim \triangle SNA$

$\Rightarrow \frac{SN}{OK} = \frac{AS}{KB}$

$\triangle NSF \sim \triangle ORF$

$\Rightarrow \frac{NS}{OR} = \frac{SF}{FR}$

$\frac{OT}{TN} \cdot ML = \frac{FO}{FN} \cdot NC$

$\because N \in \text{бисс. } \angle ABC \text{ т.ч. } AN = NC \Rightarrow \angle ANM = \angle NBC$

$\because M \in \text{бисс. } \angle ACB \text{ т.ч. } AM = MB \Rightarrow \angle ACM = \angle MCB$