



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Т.к. нам надо найти наименьшее  $abc$ , то скажем, что числа  $a, b$  и  $c$  являются степенями 2 и 7 без дополнительных множителей.  $a_2, b_2, c_2$  - степени при 2,  $a_7, b_7, c_7$  - аналогично степени при 7.

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_2 + c_2 \geq 20$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c (\min) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: ~~2^26 \* 7^37~~  $2^{26} \cdot 7^{37}$

$$a_7 + b_7 \geq 10$$

$$b_7 + c_7 \geq 17 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \end{matrix}} \right\} a_7 + b_7 + c_7 \geq 27$$

$$\text{но } a_7 + c_7 \geq 37$$

$$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

если бы  $ab$  делилось на  $(a+b)$ , то всю дробь можно было бы сократить на  $a+b$ , но  $\rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$  - несократима дробь, т.к.  $a+b$  не имеют общих делителей  $\Rightarrow a+b$  не имеет делителей ни  $a$ , ни  $b$

но член  $8ab$  можно сократить еще и на  $b$

то есть если  $a+b$  будет делиться на  $8$ , то и всю дробь можно будет разделить на  $8$ .

если мы берем  $a=3$  и  $b=5$ , то это работает ( $\frac{a}{b}$  - несокр.,  $a+b$  кратно  $8$ .)

$\Rightarrow m=8$

Ответ:  $m=8$



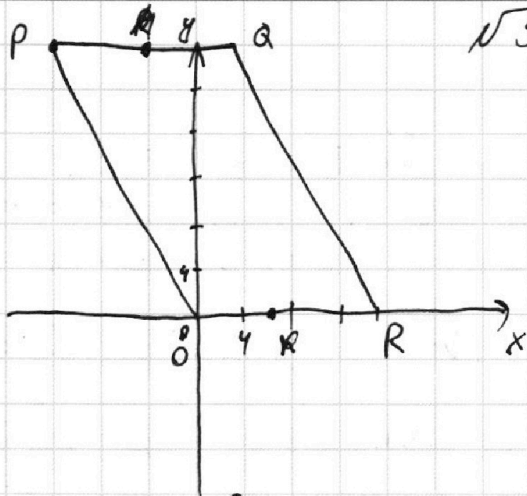
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

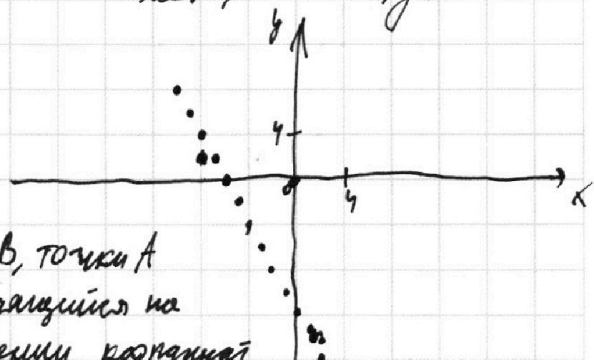
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Поймем, как выглядит  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 - 12 = 0$

Скажем, что  $x_2, y_2 = 0$



Относительно точки B, точки A (возможные) образуют ряд, находящийся на прямой  $y = -12 - 2x$  (при занулевой координате  $x, y$  точки B). Наклон прямой  $-2$ , как и у парал-ли.

⇒ Точки B (возможные) будут находиться в параллелограмме

$R \parallel MQR$ ,  $x_R = x_0 + 6$ ,  $x_M = x_p + 6$   
 $y_R = y_0$ ,  $y_M = y_p$

Для каждой из точек B будет доступно <sup>или 12</sup>  $13^y$  точек A  
 $(y_p - y_0) + 1 = 13$ ,  $\frac{y_p - y_0}{2} = 12$

⇒ Всего пар точек B для которых есть 13 точек A парал-ли:  $(x_a - x_m + 1) \cdot (y_a - y_m + 1) = 10 \cdot 13$

⇒ Пар образовано:  $10 \cdot 13 \cdot 13 = \frac{1690}{2}$

Количество точек B, для которых 12 пар:  $10 \cdot 12 \Rightarrow$   
 пар всего:  $10 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 13 \cdot 13 = 10 \cdot (144 + 169) = 3130$

Ответ: 3130 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

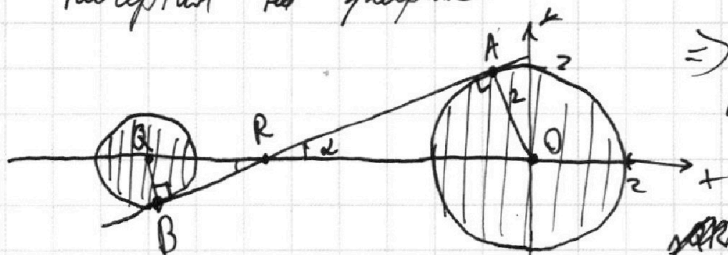
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

Начертим на графике



$y = 10b + ax$  - прямая  
 $\Rightarrow$  2 решения только когда прямая касается 2х окружностей

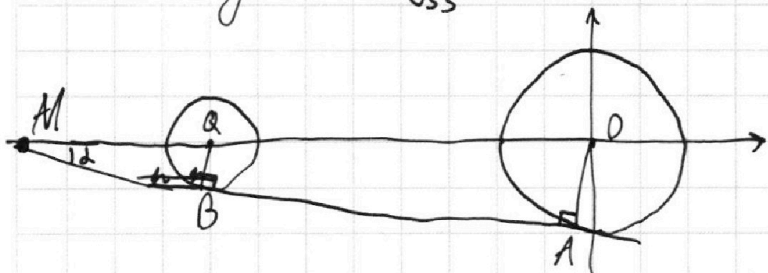
$\Delta QRB \sim \Delta ORA$  по 2м углам

$\Rightarrow \frac{QR}{RO} = \frac{QB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow QR = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = a = \frac{3}{\sqrt{55}}$

аналогично получим  $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$



$\Delta MQB \sim \Delta MOA$  по 2м углам

$\Rightarrow \frac{MQ}{MO} = \frac{QB}{OA} \Rightarrow MQ = QO = 8$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$   
 аналогично  $a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Rightarrow a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

Ответ:  $a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Геронь 2:

$$a_2 + b_2 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$2(a+b+c) = 51$$

$$\Rightarrow \min(a+b+c) = 26$$

$$(x \in (1; 1,5))$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{4}$$

$$(x-1)(2x-3) + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 49x^2 - 28x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 3x + 4$$

$$\Rightarrow -45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3) \dots}$$

$$25x^2(25+81x^2-90x) = 4\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$625x^2 + 2025x^4 - 2250x^3 = (16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

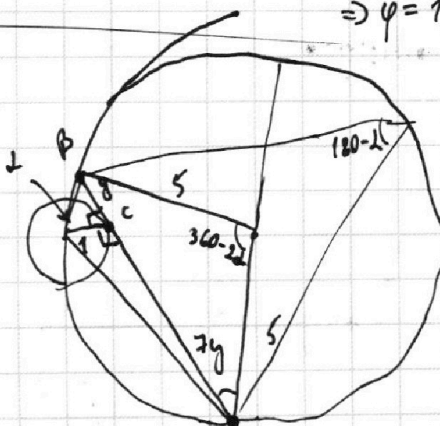
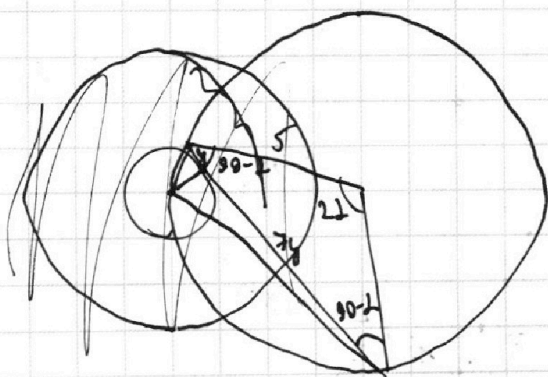
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-6ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$8y$

$$180 - (360 - 2\alpha) =$$

$$= 2\alpha - 180$$

$$\Rightarrow \varphi = 180 - \alpha$$



$$\frac{5}{\cos \alpha} = \frac{8y}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

$$= 10 \cdot \sin \alpha \Rightarrow y = 1,25 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

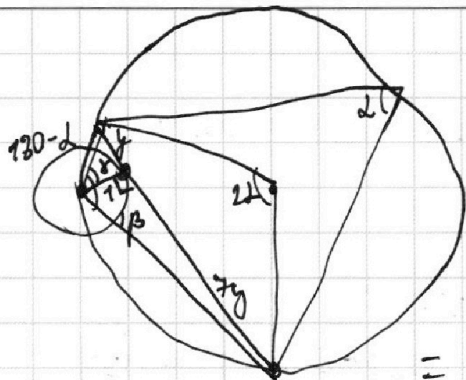
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{5}{4} \cdot \sin d$$

$$\sin(180-d) = \sin d =$$

$$= \sin(\alpha + \beta) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+7^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7y}{\sqrt{1+7^2y^2}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{1+y^2} \cdot \sqrt{1+7^2y^2}} = y \cdot \frac{4}{5} \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8 \cdot 5}{4}\right)^2 = (1+y^2) \cdot (1+49y^2)$$

$$100 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$0 = -99 + 50t + 49t^2$$

$$t = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49} =$$

$$= \frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{98} = 1$$

$$\frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{98} = 1$$

Handwritten calculations for the quadratic equation:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ + 196 \\ \hline 2401 \\ \hline 196 \\ \times 99 \\ \hline 1764 \\ + 17640 \\ \hline 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

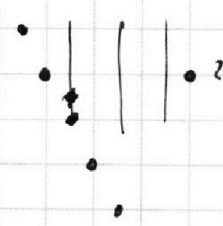
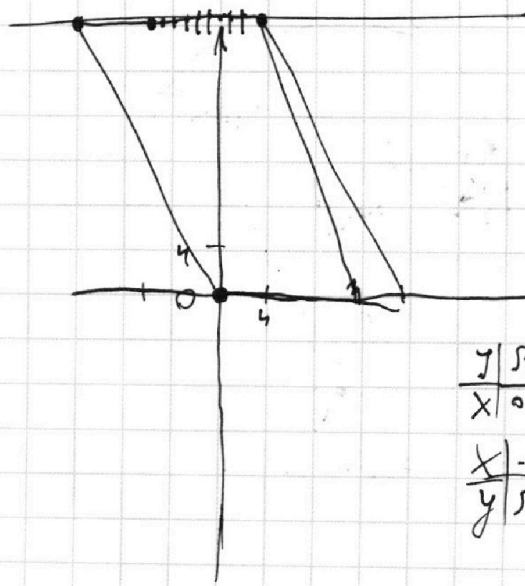
Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times 142 \\ \hline 1184 \\ 992 \\ \hline 148 \\ \hline 24904 \end{array}$$

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times 142 \\ \hline 184 \\ \hline 184 \\ \hline 189 \end{array}$$

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 14400 \end{array}$$


10. ans

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 169 \\ \hline 313 \end{array}$$

12. 12. 10

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} =$$

y	$\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{21}$
x	0	1	2	3	4	-1	-2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$		



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = ax + 10b$$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

Упрощения  $\Rightarrow$  нули правой и левой части равенства.

$$(x+8)^2 + a^2x^2 + 100b^2 + 20axb = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20x \cdot (ab) = 1 = 0$$

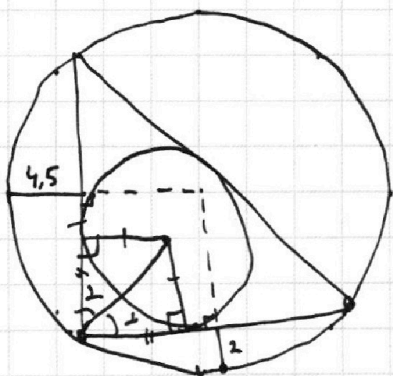
$$x^2 \cdot (1+a^2) + x(16+20ab) + (100b^2+63) = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2-4) = 0$$

$$x = \frac{-(16+20ab) \pm \sqrt{(16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(100b^2+63)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_1 = \frac{-20ab \pm \sqrt{400a^2b^2 - 4(\dots)}}{2(1+a^2)}$$

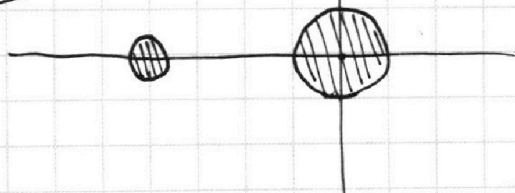
$$x_+ = x_{1+} \Rightarrow \frac{-(16+20ab) + \sqrt{\dots}}{-16 + \sqrt{(16+20ab)^2 - \dots}} = \frac{-20ab + \sqrt{\dots}}{\dots}$$



$$\frac{a}{b} \quad \frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{5 \cdot 8}{5+8}$$

$$y = 10b + ax$$





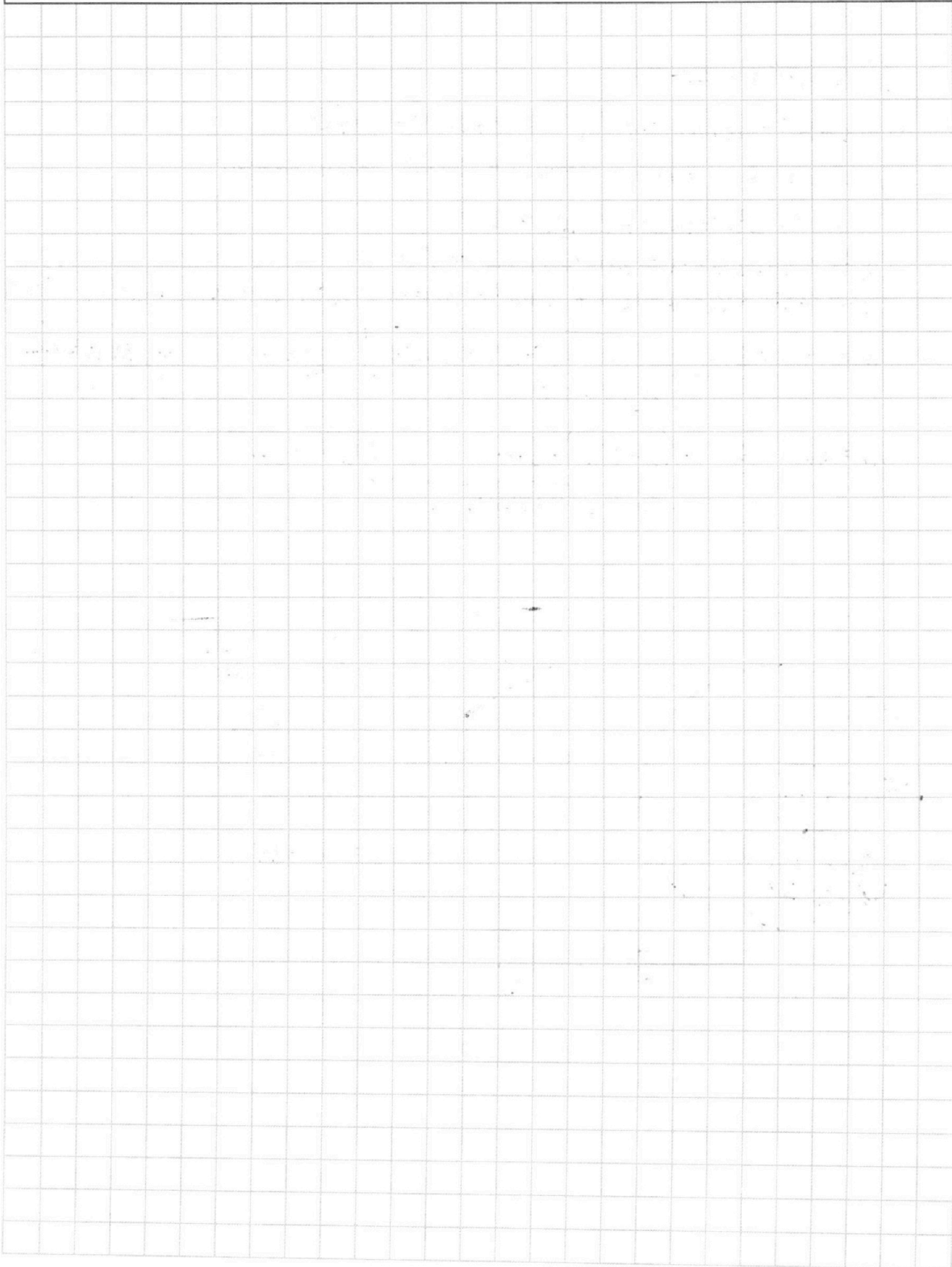
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓