



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Т.к. нам надо найти наименьшее abc , то скажем, что числа a, b и c являются степенями 2 и 7 без дополнительных множителей. a_2, b_2, c_2 - степени при 2, a_7, b_7, c_7 - аналогично степени при 7.

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_2 + c_2 \geq 20$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c (\min) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: ~~2^26 * 7^37~~ $2^{26} \cdot 7^{37}$

$$a_7 + b_7 \geq 10$$

$$b_7 + c_7 \geq 17 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \end{matrix}} \right\} a_7 + b_7 + c_7 \geq 27$$

$$\text{но } a_7 + c_7 \geq 37$$

$$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

если бы ab делилось на $(a+b)$, то всю дробь можно было бы сократить на $a+b$, но \rightarrow

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$ — несократима дробь, т.к. $a+b$ не имеет общих делителей ни a , ни b

но член $8ab$ можно сократить еще и на b

то есть если $a+b$ будет делиться на 8 , то и всю дробь можно будет разделить на 8 .

если мы берем $a=3$ и $b=5$, то это работает ($\frac{a}{b}$ — несокр., $a+b$ кратно 8 .)

$\Rightarrow m=8$

Ответ: $m=8$

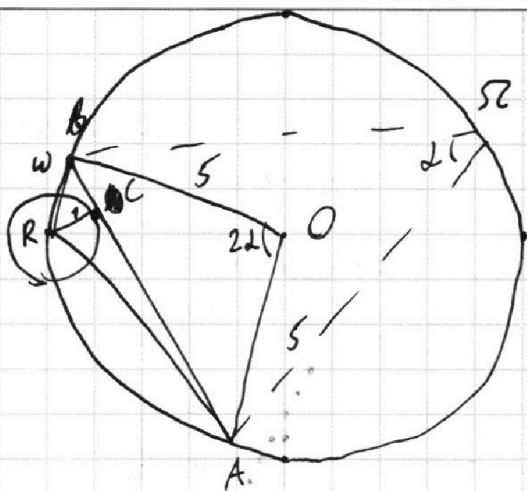
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle AOB = 2\alpha$
 Тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90 - \alpha$
 по \triangle треугольнике.

Пусть $BC = y$. Тогда $AC = 5y$

По т.-ме синусов для $\triangle AOB$:

$$\frac{5}{\sin(90-\alpha)} = \frac{8y}{\sin 2\alpha} \Rightarrow 8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4} \cdot \sin \alpha$$

$\angle BRA$ - вписанный и опирается на дугу, \angle противоположную дуге $2\alpha \Rightarrow \angle BRA = 180 - \alpha$

$$\sin \angle BRA = \sin(\angle BRC + \angle CRA) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+49y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7y}{\sqrt{1+49y^2}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{(1+y^2) \cdot (1+49y^2)}}$$

$$\sin \angle BRA = \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y \cdot 4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8y}{\sqrt{(1+50y^2+49y^4)}} = \frac{4y}{5} \Rightarrow (10)^2 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$49y^4 + 50y^2 - 99 = 0$$

$$y = \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 99 \cdot 49}}{2 \cdot 49}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{21904}}{98}} = \sqrt{\frac{98}{98}} = 1 \Rightarrow AB = 8y = 8$$

Ответ: $AB = 8$

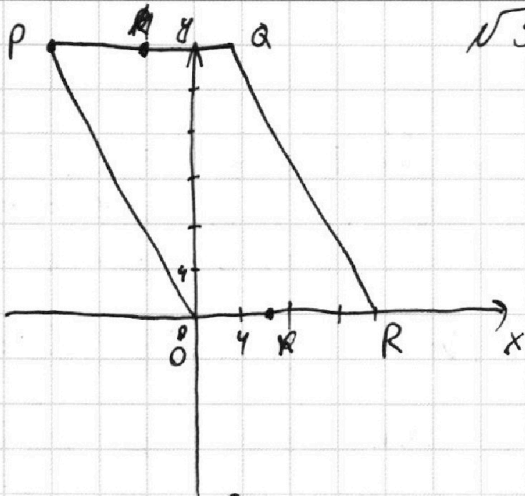
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

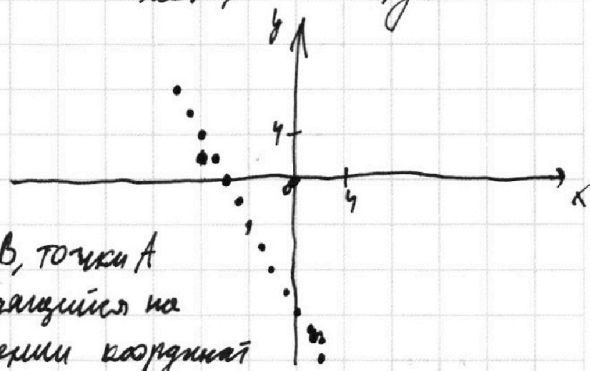
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Поймем, как выглядит $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 - 12 = 0$

Скажем, что $x_2, y_2 = 0$



Относительно точки B, точки A (возможные) образуют ряд, находящийся на прямой $y = -12 - 2x$ (при занулевой координате x, y точки B). Наклон прямой -2 , как и у парал-ли.

⇒ Точки B (возможные) будут находиться в параллелограмме

$R \parallel MQR$, $x_R = x_0 + 6$, $x_M = x_R + 6$
 $y_R = y_0$, $y_M = y_R$

Для каждой из точек B будет доступно ^{или 12} 13^y точек A
 $(y_R - y_0) + 1 = 13$, $\frac{y_R - y_0}{2} = 12$

⇒ Всего пар точек B для которых есть 13 точек A парал-ли: $(x_A - x_M + 1) \cdot (y_A - y_M + 1) = 10 \cdot 13$

⇒ Пар образовано: $10 \cdot 13 \cdot 13 = \frac{1690}{2}$

Количество точек B, для которых 12 пар: $10 \cdot 12 \Rightarrow$
 пар всего: $10 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 13 \cdot 13 = 10 \cdot (144 + 169) = 3130$

Ответ: 3130 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

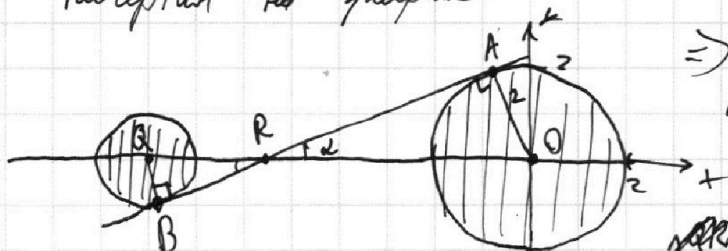
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

Начертим на графике



$y = 10b + ax$ - прямая

\Rightarrow 2 решения только когда прямая касается 2х окружностей

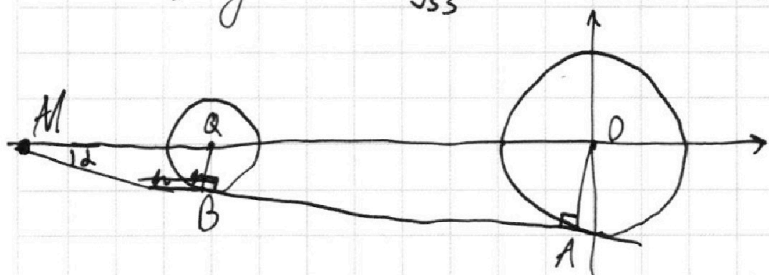
$\Delta QRB \sim \Delta ORA$ по 2м углам

$\Rightarrow \frac{QR}{RO} = \frac{QB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow QR = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = a = \frac{3}{\sqrt{55}}$

аналогично получим $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$



$\Delta MQB \sim \Delta MOA$ по 2м углам

$\Rightarrow \frac{MQ}{MO} = \frac{QB}{OA} \Rightarrow MQ = QO = 8$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

аналогично $a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Rightarrow a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

Ответ: $a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Герань 2:

$$a_2 + b_2 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$2(a+b+c) = 51$$

$$\Rightarrow \min(a+b+c) = 26$$

$$(x \in (1; 5))$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{4}$$

$$(x-1)(2x-3) + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 49x^2 - 28x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 3x + 4$$

$$\Rightarrow -45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3) \dots}$$

$$25x^2(25+81x^2-90x) = 4\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$625x^2 + 2025x^4 - 2250x^3 = (16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

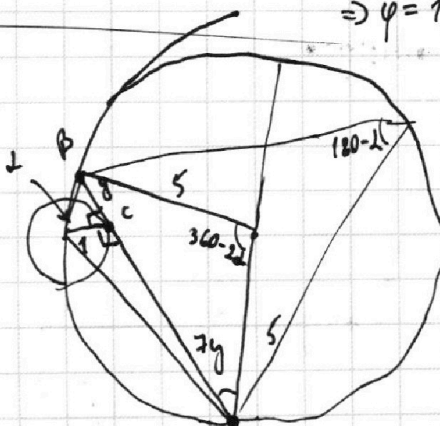
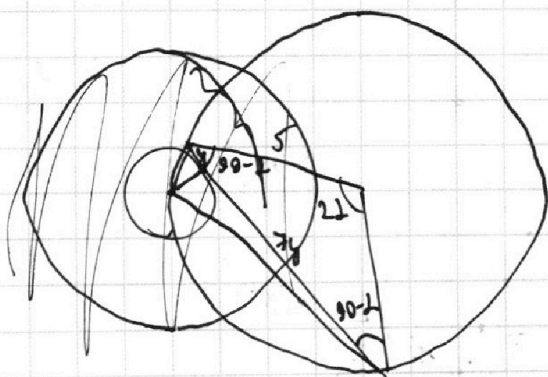
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-6ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$8y$

$$180 - (360 - 2\alpha) =$$

$$= 2\alpha - 180$$

$$\Rightarrow \varphi = 180 - \alpha$$



$$\frac{5}{\cos \alpha} = \frac{8y}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

$$= 10 \cdot \sin \alpha \Rightarrow y = 1.25 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

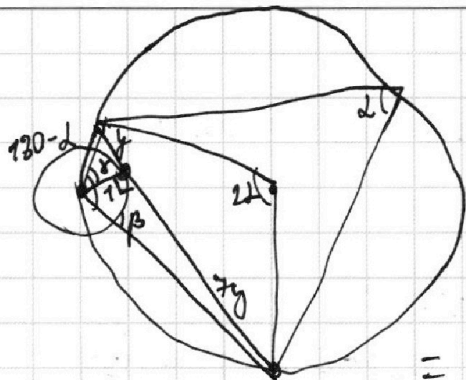
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{5}{4} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin(180-\alpha) = \sin \alpha =$$

$$= \sin(\alpha + \beta) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+7^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7y}{\sqrt{1+7^2y^2}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{1+y^2} \cdot \sqrt{1+7^2y^2}} = y \cdot \frac{4}{5} \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8y}{4}\right)^2 = (1+y^2) \cdot (1+49y^2)$$

$$100 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$0 = -99 + 50t + 49t^2$$

$$t = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49}}{2 \cdot 49} =$$

$$= \frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{98} = 1$$

$$\frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{98} = 1$$

Handwritten calculations for the quadratic equation:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ + 196 \\ \hline 2401 \\ \hline 196 \\ \times 99 \\ \hline 1764 \\ + 17640 \\ \hline 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

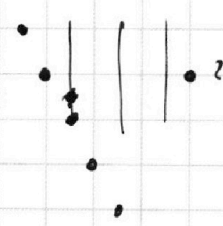
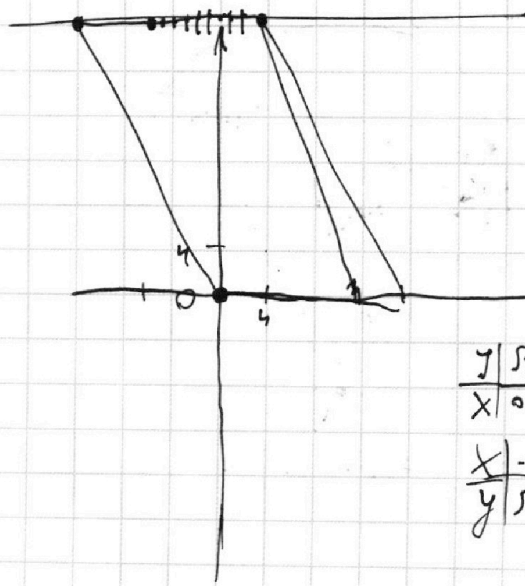
Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times 142 \\ \hline 1784 \\ 992 \\ \hline 148 \\ \hline 24904 \end{array}$$

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times 142 \\ \hline 184 \\ \hline 184 \\ \hline 189 \end{array}$$

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 14400 \end{array}$$


10. ans

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 169 \\ \hline 313 \end{array}$$

12. 12. 10

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} =$$

y	$\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{21}$
x	0	1	2	3	4	-1	-2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$		

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 10b$$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

Упрощения \Rightarrow нули правой и левой части равенства.

$$(x+8)^2 + a^2x^2 + 100b^2 + 20axb = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20x \cdot (ab) = 1 = 0$$

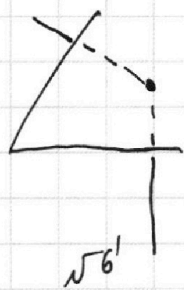
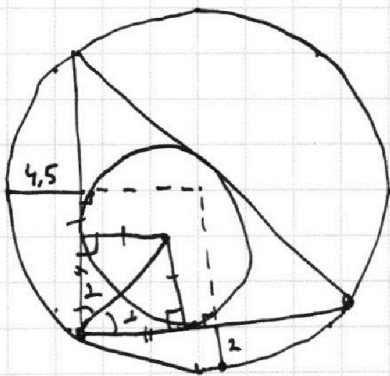
$$x^2 \cdot (1+a^2) + x(16+20ab) + (100b^2+63) = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2-4) = 0$$

$$x = \frac{-(16+20ab) \pm \sqrt{(16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(100b^2+63)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_1 = \frac{-20ab \pm \sqrt{400a^2b^2 - 4(\dots)}}{2(1+a^2)}$$

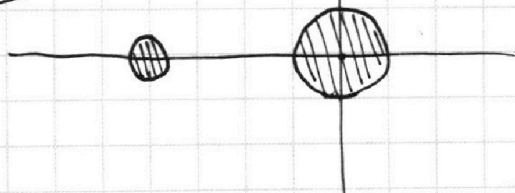
$$x_+ = x_{1+} \Rightarrow \frac{-(16+20ab) + \sqrt{\dots}}{-16 + \sqrt{(16+20ab)^2 - \dots}} = \frac{-20ab + \sqrt{\dots}}{\dots}$$



$$\frac{a}{b} \quad \frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{5 \cdot 8}{5+8}$$

$$y = 10b + ax$$





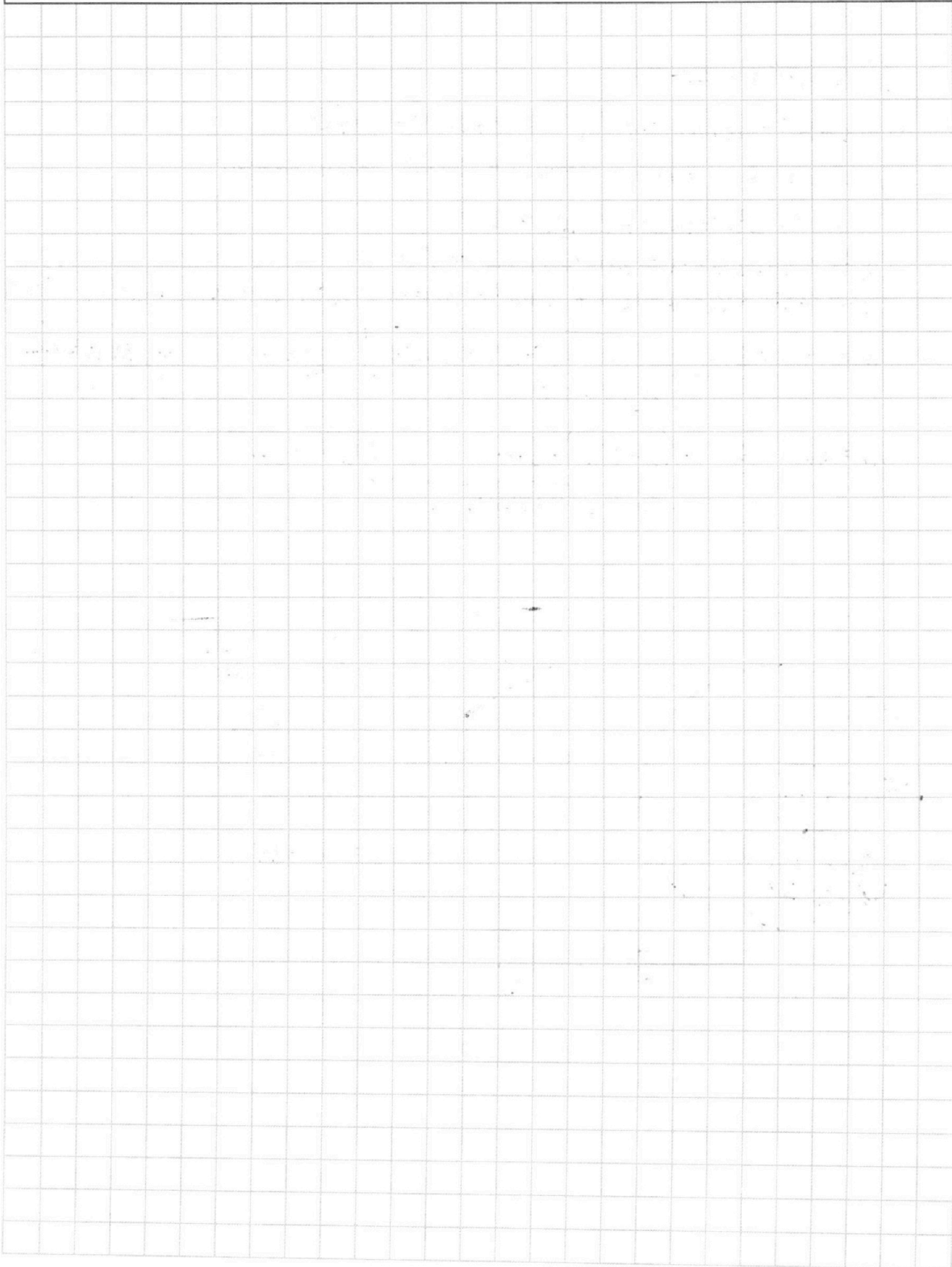
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓