



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что степени вхождений 2 в abc никак не входят на степени вхождений \Rightarrow в abc. Поэтому сможем найти макс. степень вхон. 2-ки.

ab: 2^{14} ; bc: 2^{13} ; ac: 2^{20} Перемножим

$(abc)^2 : 2^{51}$ Заметим, что степень вхон.

в квадрат любого пролого числа четна \Rightarrow

$(abc)^2 : 2^{52}$ Пример = $a = 2^{14}$ $b = 2^{13}$ $c = 2^{20}$

макс. степень вхожд. 2 в a это ~~14~~ 9

b в это 6 ~~вхожд.~~ c > 10 ~~11~~

Теперь разберемся с 7. Пусть x_i - степени вхождений 7 в число i.

Тогда:

$$\begin{cases} x_a + x_b = 10 + k_1 \\ x_b + x_c = 17 + k_2 \\ x_c + x_a = 37 + k_3 \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 \geq 0$$

Ух сумма

$$x_a + x_b + x_c = \frac{32 + k_1 + k_2 + k_3}{2}$$

$$x_b \cdot x_a + x_b + x_c - x_c - x_a = -10 + k_1 + k_2 - k_3$$

$$x_b = -5 + \frac{k_1 + k_2 - k_3}{2}$$

Заметим, что $x_b \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{k_1 + k_2 - k_3}{2} \geq 5 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \geq 5 \quad (\text{т.к. } k_3 \geq 0) \Rightarrow$$

$$x_a + x_b + x_c \geq 37$$

Пример $x_a = 15$; $x_b = 0$; $x_c = 22$

Итого: Пример сбалансированного

$a = 2^{15} \cdot 7^{15}$; $b = 1 \Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$b = 2^6$
 $c = 2^{17} \cdot 7^{22}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

u2

$$\text{Пусть } \begin{cases} a+b = mk_1 \\ a^2 - 6ab + b^2 = mk_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = mk_1 \\ (a+b)^2 - 8ab = mk_2 \end{cases}$$

$\rightarrow 8ab : m$. Заметим, что если $a : m$,

то так $a+b : m$ ~~то~~ $b : m$, то a и b взаимно
просты, аналогично $b : m$. Тогда образы

$b : m$. Пример на $m=8$

$$a=1; b=7$$

$$\frac{1+7}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

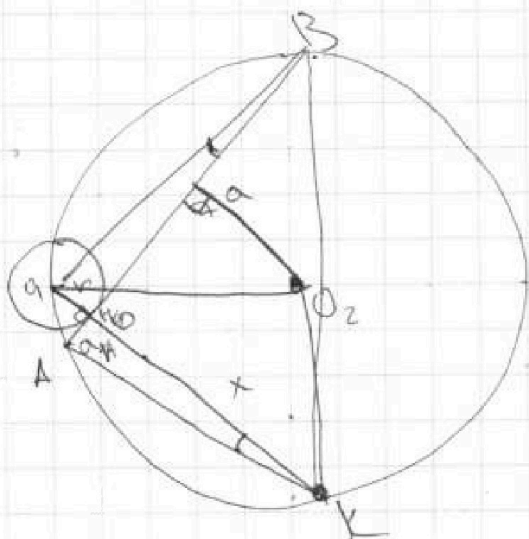
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



13



Стенки
 O_1, O_2 - центры окружностей.
 H - точка касания
 Пусть продолжим AO_1 до пересечения с Ω в точке K .
 Пусть $HK = x$.

стенки точки O_1, O_2 . И: $r \cdot x = R^2$

где $AB = R$

AK - диаметр

$$x + r = \sqrt{2} R$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

ОГЗ:

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1,5 \end{array} \right\}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; \infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \text{ — корней нет} \Rightarrow \text{всегда больше 0.}$$

Возведем в квадрат.

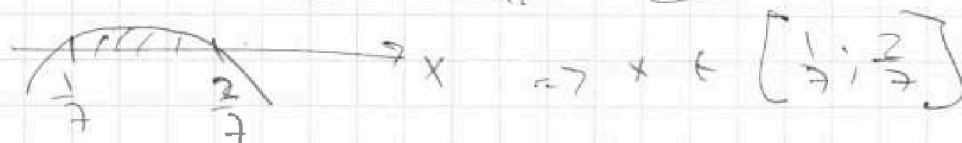
$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (7x - 1)(2 - 7x)$$

$$(7x - 1)(2 - 7x) \geq 0$$

$$28x^2 - 26x + 2 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{24}}{56}$$



$$\Rightarrow 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2(2 - 7x)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

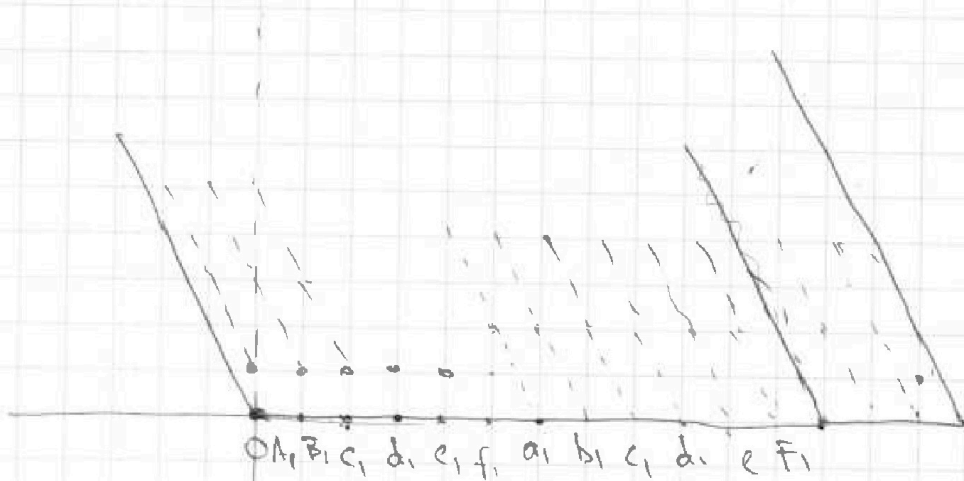


- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р 5



Закфиксируем x_1 и y_1 . Тогда все пары (x_2, y_2) это прямая $y_2 = 12 + x_1 + y_1 - x_2$.
 Возьмем точку (x_1, y_1) как $x_1 = 0, y_1 = 0$.
 Для каждой точки найдем в паре ей прямая с мин. решеткой (через 6 кл. вправо от нее). И на каждой этой прямой будет на x -оси 13 точек решетки.
 А на y -оси $10 \cdot 13$. Возьмем теперь точку $(x_1, y_1) = (1, 0)$. Тут аналогично будет для левых точек в паре с прямой с 13 решетками решетки. Однако теперь будет на y -оси меньше -22 9 т.к. уменьшилась x_1 . И на этой прямой будет $9 \cdot 13$ точек.
 На прямой $y = 2$ ситуация будет аналогичная где макс. уровень $y = 29$. \Rightarrow больше уровней будет 9 точек на x -оси 13 и 10 на y -оси. На паре уровней решеткой будет $13(9+10)$. Уровней 1 пар уровней будет 12 . А на y -оси еще $10 \cdot 13$ точек.
 Что и суммарно $130 + 12 \cdot 13 + 10 = 3184$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

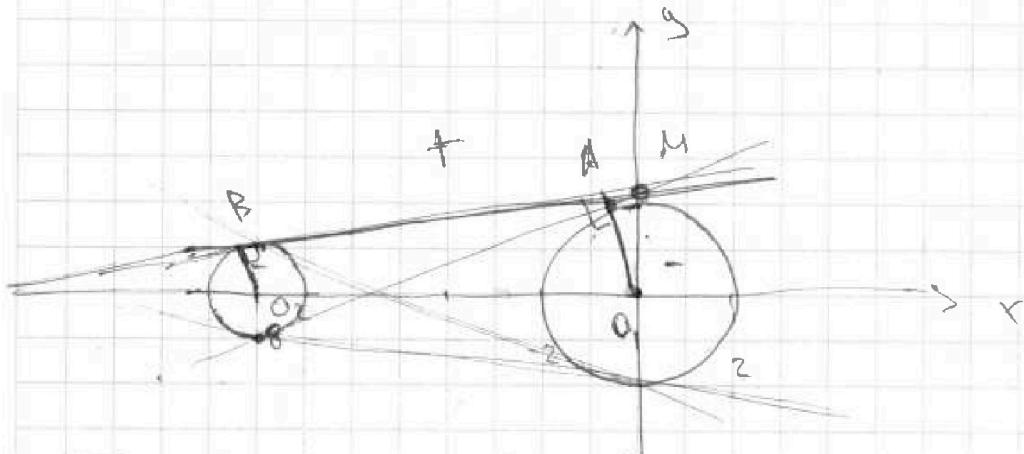


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решим уравнения

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Это 2 окружности.



Тогда когда (x, y) находится на ней
 она имеет выражение $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$
 принимает 0, а когда "проходит" между окруж.
 имеет знак. Поэтому внутри окр. отриц.
 значение произведения, а вне полож.
 Так мы увидим когда прямая имеет
 равно 2 точки пересечения, то это будет
 общ. касат. Все можно провести и
 касат. Но достаточно найти а у 2-х верхн.
 или нижн. дуги, или между и на дуги
 обходятся только так. Рассмотрим более
 подробно касат. Пусть она касается в точке
 A и B. Тогда $O_2O_1 = 8 \Rightarrow$ Пусть прямая касат.
 пересекает ось x в точке C. \Rightarrow из подобия
 $O_2C = O_2A = 8 \Rightarrow CO_1 = 16$. Пусть эта же
 касат. пересекала ось y в точке M. Тогда:

~~$\frac{O_2C}{O_2A} = \frac{CO_1}{O_1M}$~~ \rightarrow их стороны не равны

$$a_1 = \frac{O_1M}{O_1C} = \frac{O_1A}{AC} = \frac{2}{\sqrt{16^2 - 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{252}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

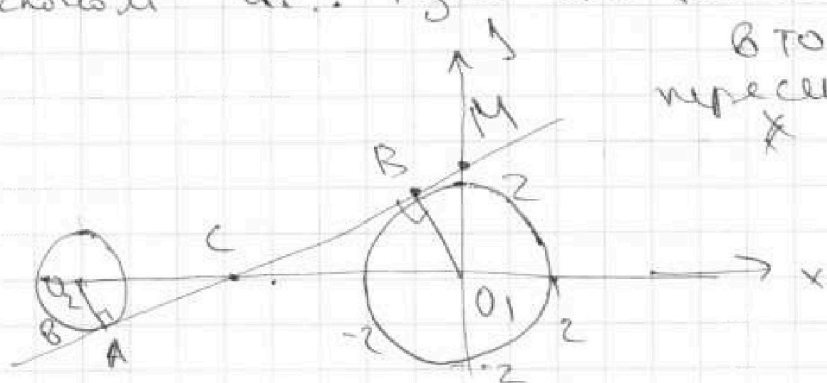
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим касательную к окружности в точке A . Пусть эта касательная l в точке A и B пересекает ось x в T .
 Вторую касательную l_2 к окружности O_1 в точке B проведем. Пусть она касательная l_2 в точке B пересекает ось x в T_2 .
 Пусть ось y в T_1 .



$$\Delta O_2 \nabla (r \nabla O_1 B C) \Rightarrow O_2 C = \frac{8}{3} \Rightarrow CO_1 = \frac{16}{3}$$

$$CB = \sqrt{\frac{256}{9} - 4} = \frac{\sqrt{220}}{3} ; a_2 = \frac{O_1 M}{CB} = \frac{O_1 B}{CB} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{220}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}} ; a_2 = \frac{6}{\sqrt{55}} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{\sqrt{63}} ; a_4 = -\frac{6}{\sqrt{55}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{63}} ; -\frac{1}{\sqrt{63}} ; \frac{6}{\sqrt{55}} ; -\frac{6}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

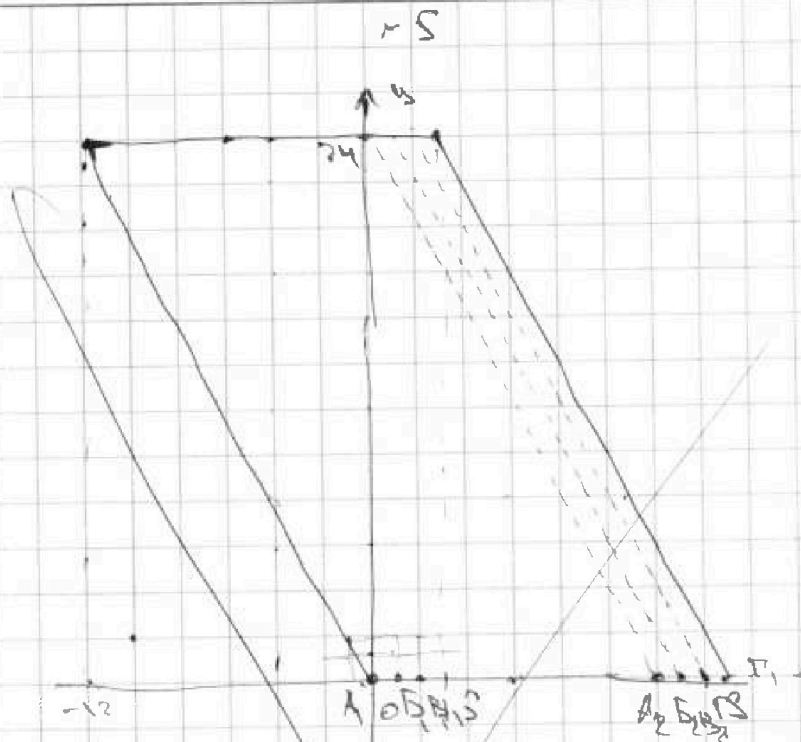
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



Зафиксируем точку (x_1, y_1) где y_1 и найдем
мн. точек (x_2, y_2) удовлетв. условиям задачи
Пусть $x_1 = 0; y_1 = 0$
 $\rightarrow 2x_2 + y_2 = 12 \rightarrow y_2 = 12 - 2x_2$. То есть
для фиксированной точки x_1, y_1 в \mathbb{Z}
то есть пары (x_2, y_2) на прямой $y_2 = 12 - 2x_2 + y_1 - 2x_1$
Тогда выберем минимальную границу. На ней
можно найти и точки $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$
 $(0,0); (1,0); (2,0); (3,0)$ каждой из
которых соответствует и \mathbb{Z} мн. точек-пар.
(с приликами) на каждой прямой находим
13 ~~целых~~ точек \rightarrow для каждой границы
будет $24 \cdot 4$ пар. Подумавшая на следующей
пару целых чисел (по $x=1$). Там аналогично
и приликами на каждой из которых 13 решений.
При этом пары не повторяются, итого всего пар
 $4 \cdot 24 \cdot 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b = mk_1$$

$$(a-b)^2 - 4ab = mk_2$$

$$(a+b)^2 - 8ab = m$$

$$8a+b = m$$

$$8a+b = m$$

$$8a+b = m$$

$$(8a+b)$$

$$8a = m$$

$$8a+b = m$$

$$b = m$$

$$(b-7a-1) = m$$

$$8 = m$$

$$13 \ 5$$

$$5 \ 3$$

$$3 \ 4 \ 6 \ 1 \ 5$$

$$10 \ 8$$

$$2 \ 5 \ 9$$

$$100 + 64$$

$$80 \ 6$$

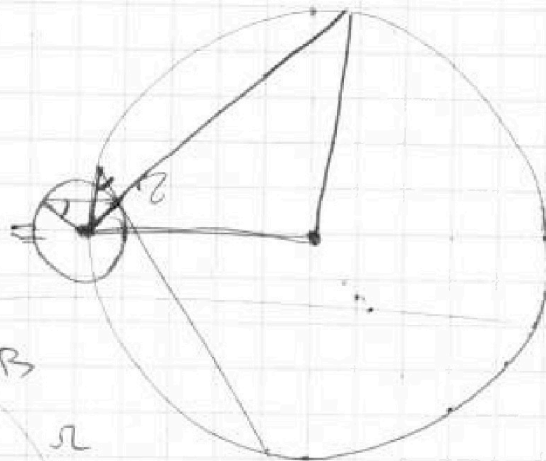
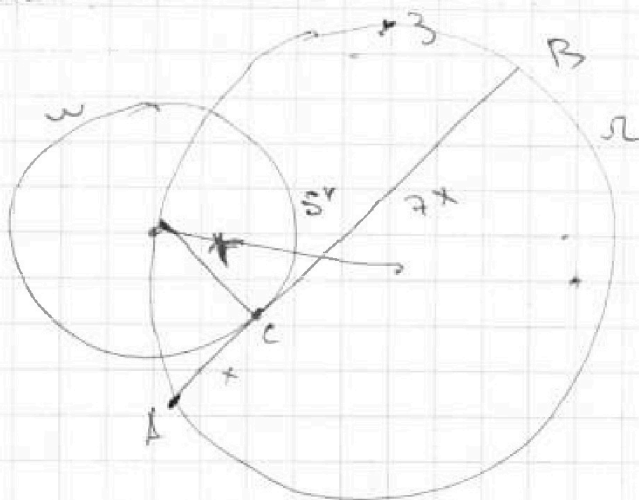
$$7 \ 1$$

$$5 \ 0 \ 4 \ 2$$

$$7 \ 1$$

$$7 + 1$$

$$4 \ 9 \ 1 \ 4 \ 2$$



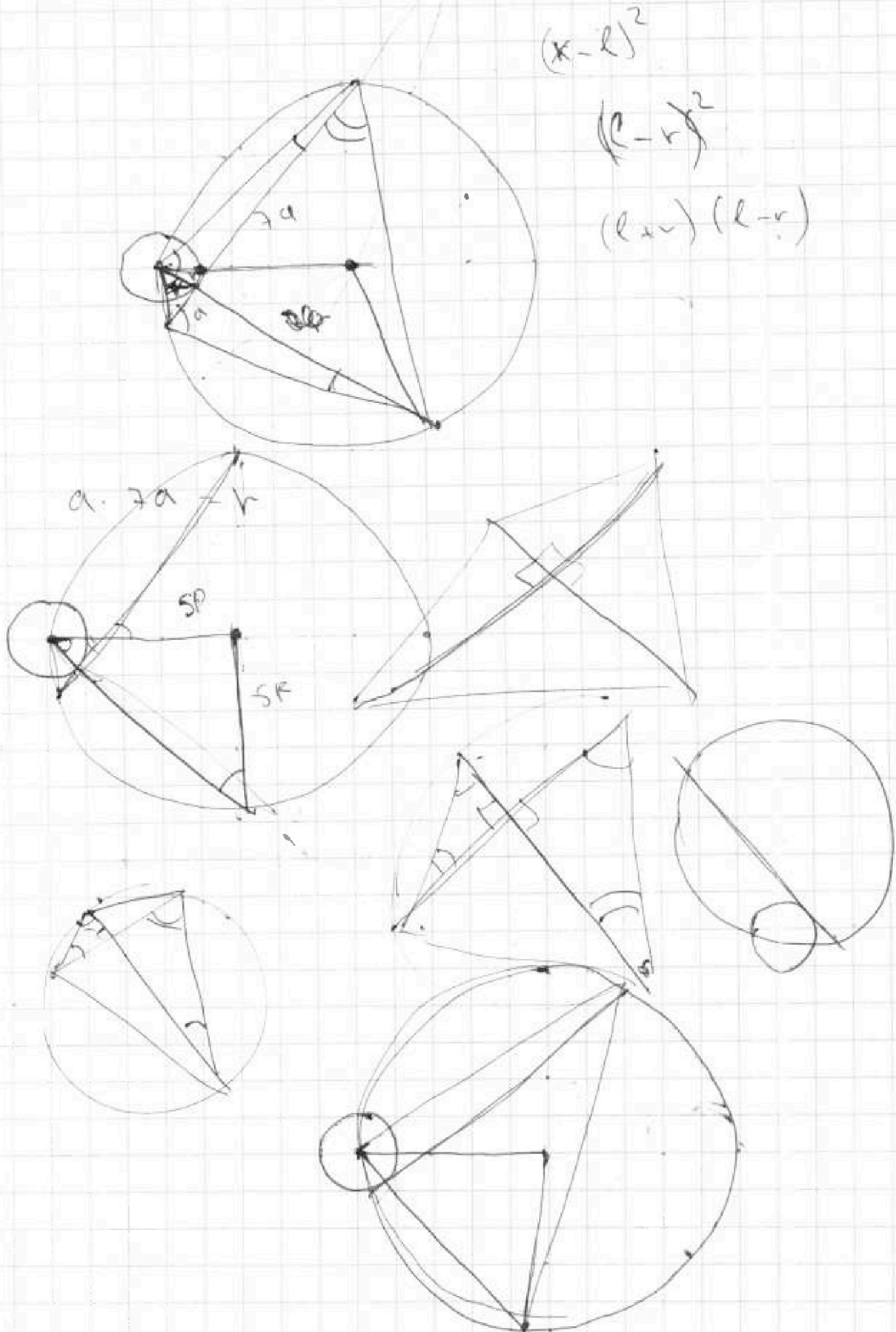
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~a = 2^10~~
~~c = 2^10~~

b = 2^6

a = 2^9 c = 2^10 b = 2^6



64-1

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$

x+1

~~a+b~~ ~~(a-b)^2-4ab~~

(x-1)(2x-3)

a+b: m a^2+b^2-6ab

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$



~~2x^2-5x+3 = 0~~

~~$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$~~



$\sqrt{(x+1)(2x-3)} = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2-7x$

$2x^2+2x+1 \geq 0$

$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4}$

$2-7x - 2\sqrt{\dots} = (2-7x)^2$

(2-7x)(1-7x)

~~$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = ((2-7x)(1-7x))^2$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_1$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_2$

$ac = 2^{30} \cdot 7^{37} \cdot k_3$

$(abc)^2 = 2^{61} \cdot 7^{64} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$

$2^{32} \cdot 7^{64}$

$\frac{2^{32} \cdot 7^{64}}{64}$

62

31

~~$b: 2^{17} \cdot 7^{17}$~~

$a = 2^{10} \cdot 7^5$

$b = 2^4 \cdot 7^5$

~~$a = 2^{10} \cdot 7^{10}$~~

$\frac{10}{2} = 5$

~~$x_a + x_b = 14$~~

~~$x_b + x_c = 17$~~

~~$x_c + x_a = 30$~~

$\frac{x}{2}$

$k_1 + k_2 - k_3 \geq 10$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 14 \\ x_b + x_c = 17 \\ x_c + x_a = 30 \end{cases}$$

$x_c = 22$

$a^2 = 2^{27} \cdot 7^{30}$

~~$a^2 = 2^{44} \cdot 7^{17}$~~
 ~~$a = 2^{22} \cdot 7^8$~~
 $a = 2^2 \cdot 7^{15}$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 7^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 7^2}$

$a = 2^{14}$

$c = 2^{17}$

$x_a + x_b \geq 10 + k_1$

$x_b + x_c \geq 17 + k_2$

$x_c + x_a \geq 37 + k_3$

$2x_c = 44 - k_2 + k_3 - k_1$

$2x_a = 30 - k_3$

$2x_b = -10 + k_1 + k_2 - k_3$

$y = ax + b$

~~2x~~

$2x_b + x_a + x_c \geq 27$

$x_c + x_a \geq 37$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



12.13

13.19.12

13-10

19
12

$$\begin{array}{r} 20 \\ 12 \\ \hline = 240 \\ - 12 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ ax_0 - by_0 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ - 12 \\ \hline 38 \\ 19 \\ \hline 228 \end{array}$$



$$13(228 + 6) = 13 \cdot 238$$

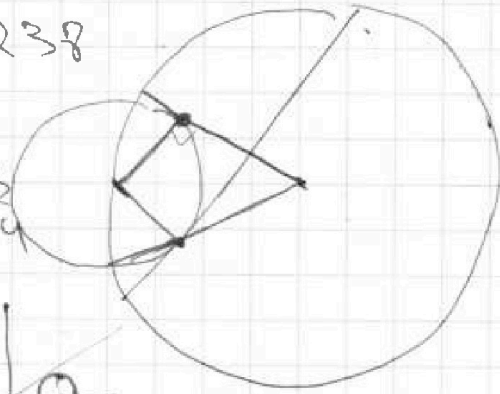
2380

+ 704

3184

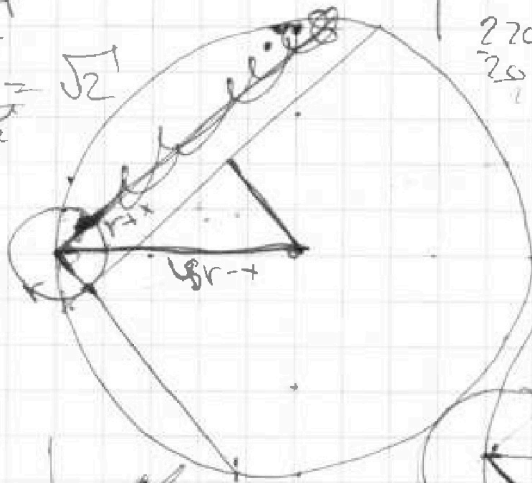
$(ax_0 + by_0 + c)$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 704 \\ \hline 3184 \end{array}$$



$$\sqrt{r_1^2 + b^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a+b}$$



$$\begin{array}{r} 2204 \\ 25759 \end{array}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$\sqrt{a}$$

16

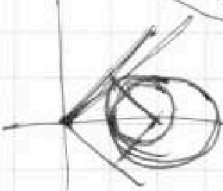
2

32

64

256

4



$$\sqrt{a+b}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 36 \\ \hline 220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25214 \\ 2416 \\ \hline 12 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

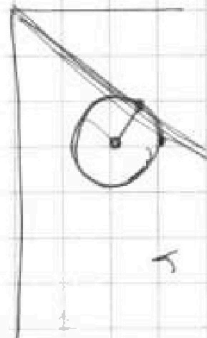
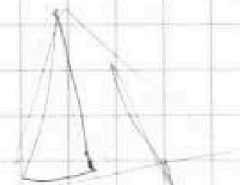
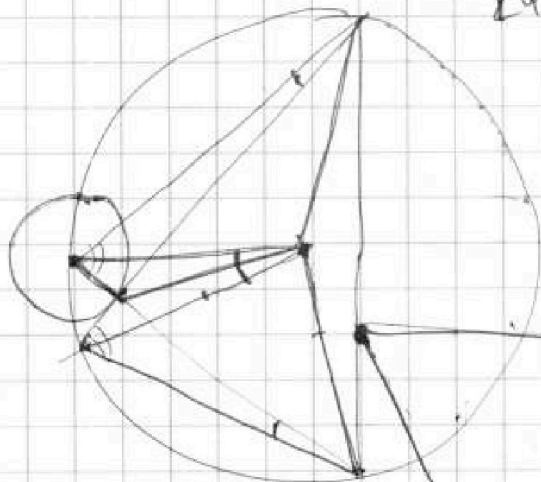


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24x - 49x^2 - 2 \pm 2x$$

$$x_{1,2} = -21 \pm \dots$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$

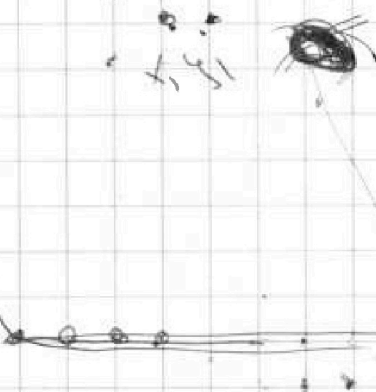
$$y = ax + b$$

$$a = \frac{y_0 - x_0}{b}$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$

$$ax + b = y_0 - x_0$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

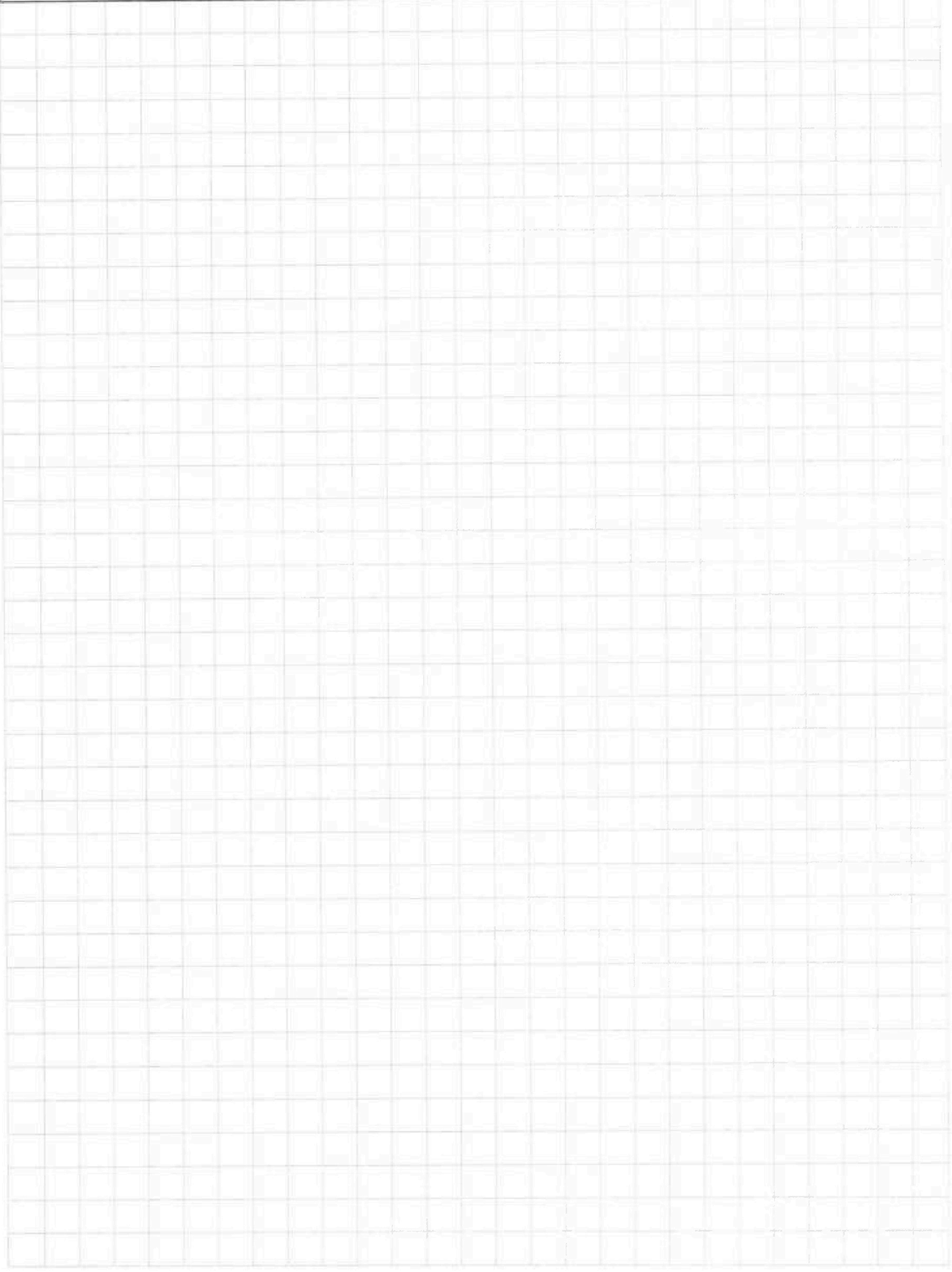
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

