МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a=2^{\alpha}\cdot7^{\beta}$, $b=2^{m}\cdot7^{n}$, $c=2^{x}\cdot7^{y}$

$a\cdot b \vdots 2^{15}\cdot7^{11}$
$b\cdot c \vdots 2^{17}\cdot7^{18}$
$a\cdot c \vdots 2^{23}\cdot7^{39}$

$a\cdot b\cdot c=2^{\alpha+m+x}\cdot7^{\beta+n+y}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+m\geq15\\ m+x\geq17\\ \alpha+x\geq23\\ \beta+n\geq11\\ n+y\geq18\\ \beta+y\geq39\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\geq\frac{21}{2}\\ m\geq\frac{9}{2}\\ x\geq\frac{25}{2}\\ \beta\geq 16\\ n\geq0\\ y\geq23\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha+m+x\geq\frac{55}{2}$, $\beta+n+y\geq39$,

т.к $a,b,c\in N$, $\alpha,m,x,\beta,n,y\in N$

(очевидно, что $a\cdot b\cdot c$ миним. при минимальных a,b,c, т.е в их разложении только 2 и 7)

Ответ: $2^{28}\cdot7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$m=a+b$, если
$9ab \vdots (a+b)$

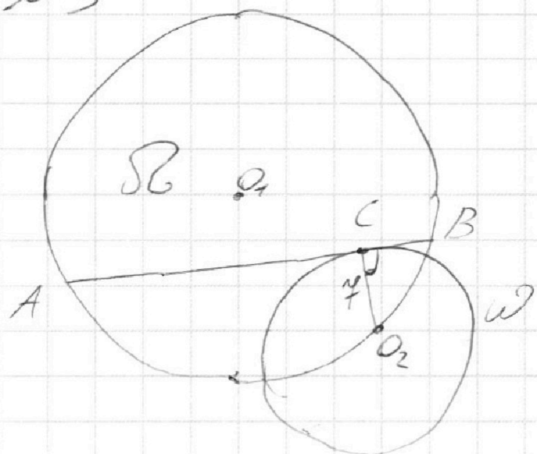
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

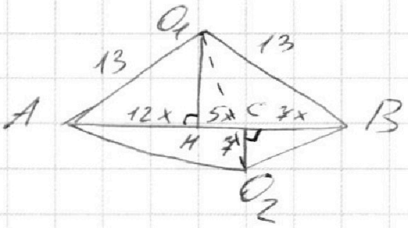
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3





$AO_2^2 = 49+289x^2$

$BO_2^2 = 49+49x^2$

$\cancel{AO_1^2\ O_1H^2 = 13^2 - 289x^2 = 13^2}$

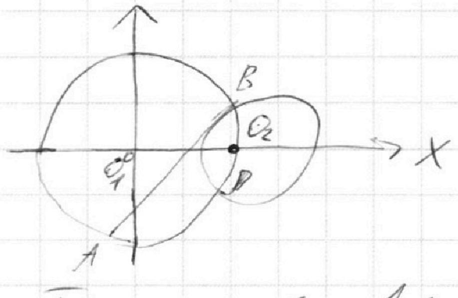
$HO_1^2 = AO_1^2 - AH^2 = \cancel{BO_1^2 - BH^2}$ (~~по т. Пифагора~~)

$\cancel{169 - 144x^2 = 169 - 289x^2}$

$HO_1 = \sqrt{169-144x^2}$, $S_{AO_1B} = \sqrt{(13+12x)\cdot 12x \cdot 12x \cdot (13-12x)}$

$= 12x \cdot \sqrt{169-144x^2}$

Построим сист координат



$O_2(0;13)$

$x^2+y^2=13^2$ — ур-е Ω

$x^2+(y-13)^2=7^2$ — ур-е ω

Пусть $A(m;n)$, $B(k;p)$ тогда

$AB = \sqrt{(k-m)^2+(p-n)^2}$, причём

$\begin{cases} m^2+n^2=13^2 \\ k^2+p^2=13^2 \end{cases}$ и

Найдём уравнение, зад прямую AB, как кос к ω.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y_{AB} = \ell x + C$

$$\begin{cases} n = m\ell + C \\ p = k\ell + C \end{cases} \Leftrightarrow \ell = \frac{p-n}{k-m}$$

$$C = n - \frac{mp - mn}{k-m}$$

№4

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

Пусть $\sqrt{3x^2-6x+2}=t$, $\sqrt{3x^2+3x+1}=k$, тогда

$t-k=t^2-k^2 \Leftrightarrow (t-k)(t+k-1)=0$

I $t=k$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}$

$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$

$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$

II $t+k=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}=1$

$4(9x^4-9x^3-9x^2+2)=36x^4-36x^3+33x^2-12x+4$

$69x^2-12x-4=0$

$\frac{D}{4}=36+4\cdot 69=4\cdot 78$

$x=\frac{6\pm 2\sqrt{78}}{69}$

Ограничения:

$3x-6x^2-2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing \Rightarrow$ корни, получ. во II сл. явл. побочными

$3x^2-6x+2\geq 0$

$3x^2+3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in R$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=8b-ax \\ x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} y=8b-ax \\ x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исходная система задаёт два м-я, в каждом из которых решениями ~~будут~~ являются точки прямой $y=8b-ax$, лежащие внутри окружностей. Тогда система имеет 2 решения только когда $y=8b-ax$ — общая касат. окр-ей $(x^2+y^2=1)$ и $(x^2+(12-y)^2=16)$.
Получим системы, каждая из кот. им. 1 ~~кр.~~ реш.

$$\begin{cases} y=8b-ax \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad x^2(a^2+1)-16abx+64b^2-1=0$$

$$\begin{cases} y=8b-ax \\ x^2+(y-12)^2=16 \end{cases} \quad x^2(a^2+1)-2x(8ab-12a)+64b^2-192b+128=0$$

$$\begin{cases} \frac{D_1}{4}=0 \\ \frac{D_2}{4}=0 \end{cases} : \quad \begin{cases} 64a^2b^2-64a^2b^2+a^2-64b^2+1=0 \\ 64a^2b^2-192a^2b+144a^2-64a^2b^2+192a^2b+128a^2- \\ -64b^2+192b-128=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-64b^2+1=0 \quad (1) \\ 16a^2-64b^2+192b-128=0 \quad (2) \end{cases}$$

$(2)-16\cdot(1)$: $960b^2+192b-144=0$

$20b^2+4b-3=0$

$\frac{D}{4}=4+60=8^2$

$b=\frac{-2\pm 8}{20}$ $\quad b_1=-\frac{1}{2}$, $\quad b_2=\frac{3}{10}$

$\to(1)$: $a^2-16+1=0$ $\quad a^2-\frac{144}{25}+1=0$

$a=\pm\sqrt{15}$ $\quad a=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ: $\pm\sqrt{15}$; $\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$9ab : a+b$

$36x^4-36x^3+33x^2-12x+4$

$69x^2-12x\mp4=0$

$\frac{D}{4}=36+276=312$

$ab : 2^{15}\cdot 7^{11}$, $bc : 2^{17}\cdot 7^{18}$, $ac : 2^{23}\cdot 7^{39}$

$abc - ?$

$(6x^2-3x+2)^2 = 36x^4+9x^2+4+2(12x^2-6x-18x^3)$

$a=2^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$, $b=2^{\gamma}\cdot 7^{\omega}$, $C=2^{n}\cdot 7^{m}$

$9x^4-9x^3-9x^2+2\ge0$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=15 & (1)\\ \beta+\omega=11 & (2)\\ \gamma+n=17 & (3)\\ \omega+m=18 & (4)\\ \alpha+n=23 & (5)\\ \beta+m=39 & (6) \end{cases}$$

$(1)-(3)+(5): 2\alpha=21$

$(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)$

$y(OP)=-2x$

$3x-6x^2-2\ge0$

I $x_B=1$ II $x_B=-\frac{1}{2}$

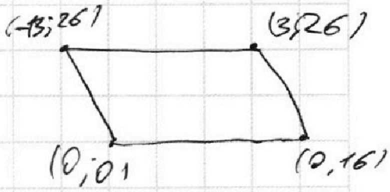
↓↓ ↓↑ ↑↑

4. $t+k=t^2-k^2$

$6x^2-3x+2\le0$

$(t-k)(t+k-1)=0$ $D=9-$

I $t=k$ II $t=1-k$



$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$

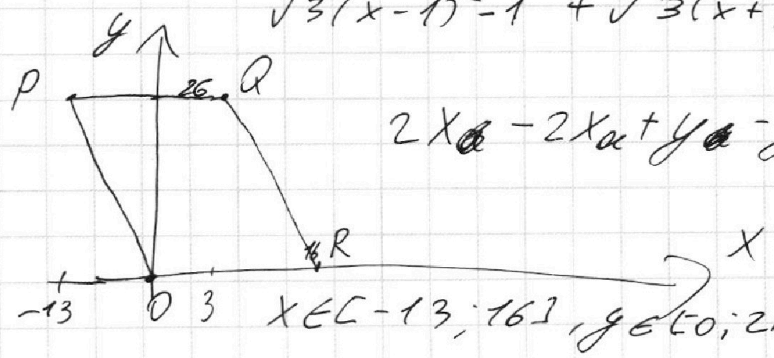
$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$\sqrt{3(x-1)^2-1}+\sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}=1$

$2x_B-2x_a+y_B-y_a=14$



$x\in[-13;16]$, $y\in[0;26]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$ греш $y=8b-ax$

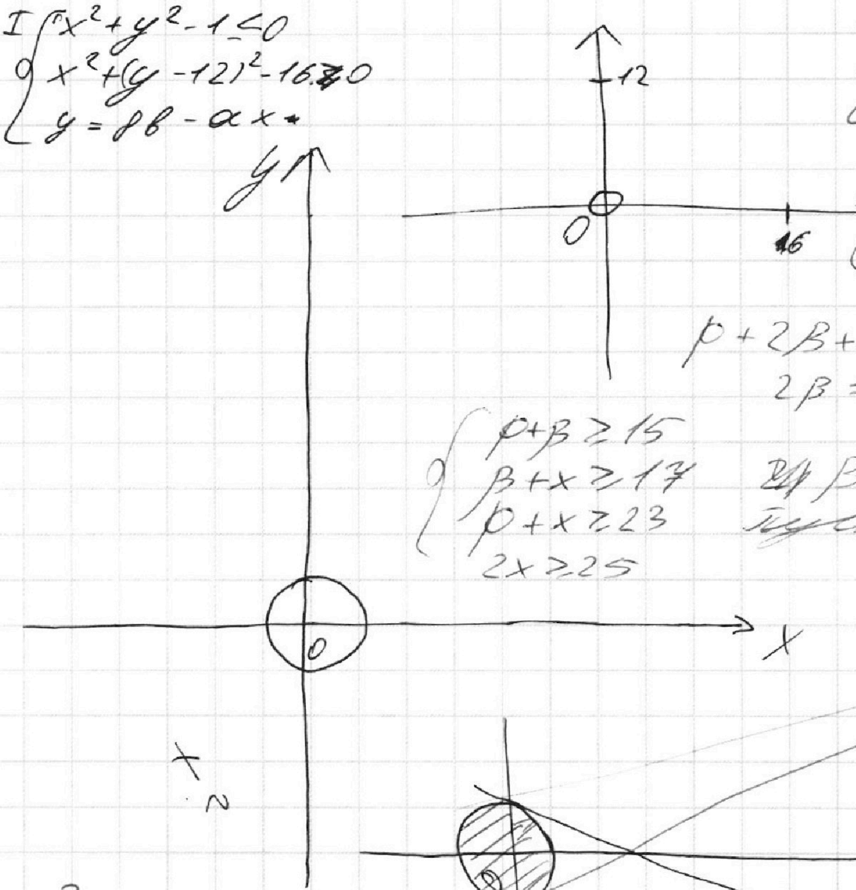
I $$\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0 \\ y=8b-ax \end{cases}$$

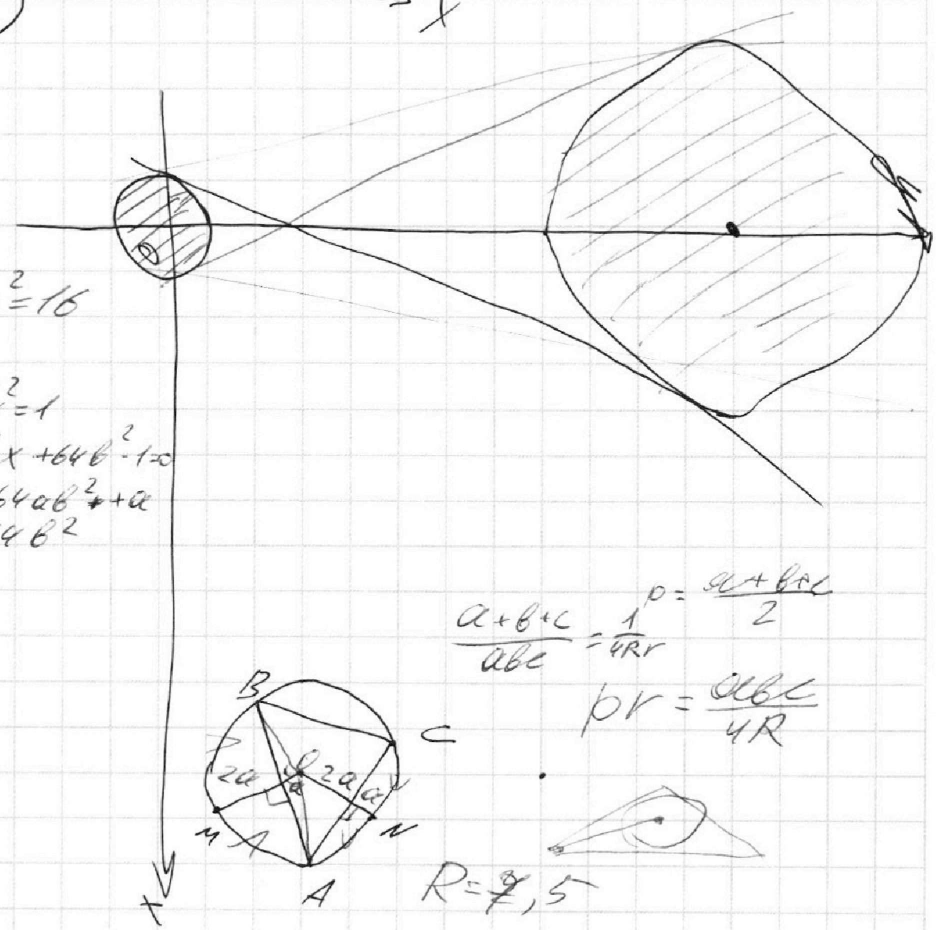
$a=2^p\cdot 7^k$
$b=2^\beta\cdot 7^\delta$
$c=2^x\cdot 7^y$

$$\begin{cases} p+\beta=15 \\ \beta+x=17 \\ p+x=23 \end{cases}$$

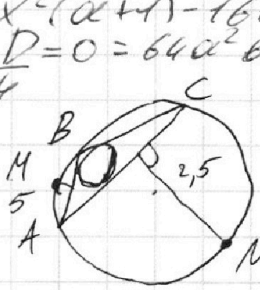
$p+2\beta+x-p-x=15+17-23$
$2\beta=9,\ 2p=21,\ 2x=25$

$$\begin{cases} p+\beta\ge 15 \\ \beta+x\ge 17 \\ p+x\ge 23 \\ 2x\ge 25 \end{cases}$$ $\beta\ge 5$, $\cancel{p\ge 12}$, $\cancel{x\ge 13}$
~~пусть~~ $\beta=5,\ p=10,$



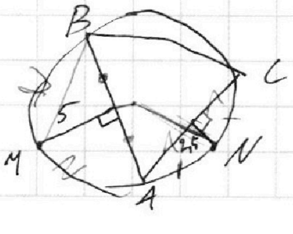


$x^2+(8b-ax-12)^2=16$
$x^2(1+a^2)$
$x^2+64b^2-16abx+a^2x^2=1$
$x^2(a+1)-16ab\cdot x+64b^2-1=0$
$\frac{D}{4}=0=64a^2b^2-64ab^2+a-64b^2$



$\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{4Rr}$ $p=\frac{a+b+c}{2}$

$pr=\frac{abc}{4R}$



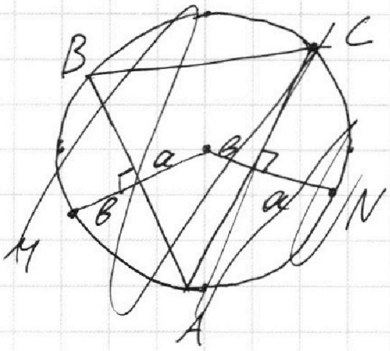
$R=\cancel{9}7,5$

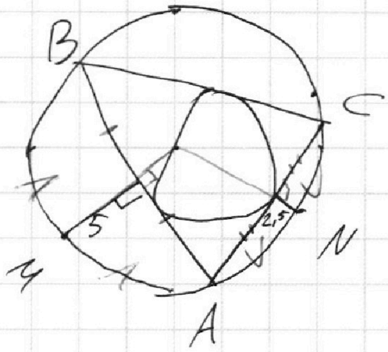
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}$

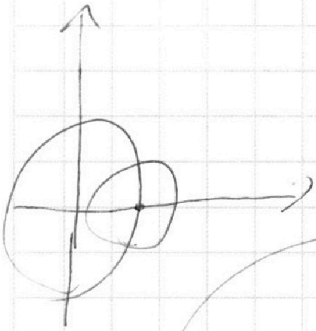
$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$
$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$
$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

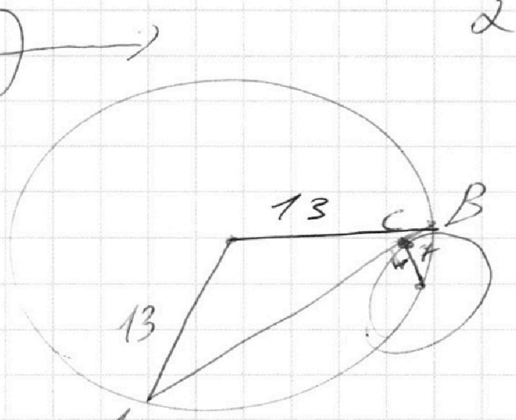
$a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta},\ b = 2^{k} \cdot 7^{m},\ c = 2^{x} \cdot 7^{y}$

$\begin{cases} \alpha + k \geq 15 \\ k + x \geq 17 \\ \alpha + x \geq 23 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha \geq \frac{21}{2} \\ k \geq \frac{9}{2} \\ x \geq \frac{25}{2} \end{cases}$

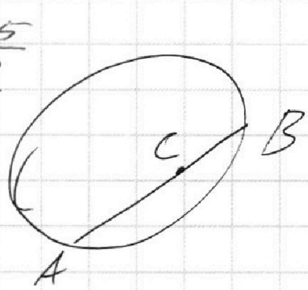
$abc = 2^{28} \cdot 7^{61}$

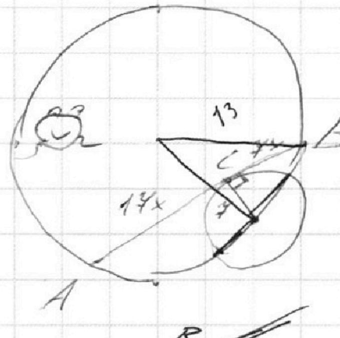
$\alpha + k + x \geq \frac{55}{2}$





$AB - ?$





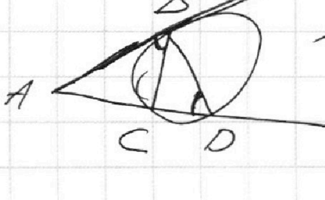
$\times \begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \end{array}$

$\frac{a+b}{a^2+b^2-7ab}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

$9ab \overset{a+b}{=}$

a и b взаимопр



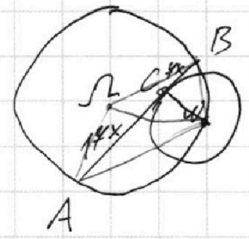
$AB^2 = AC \cdot AD$

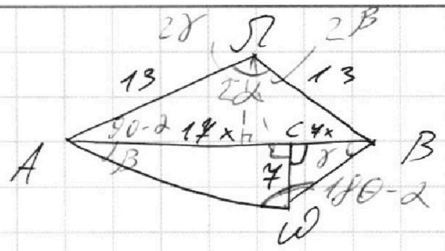
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

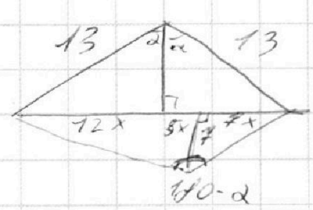
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

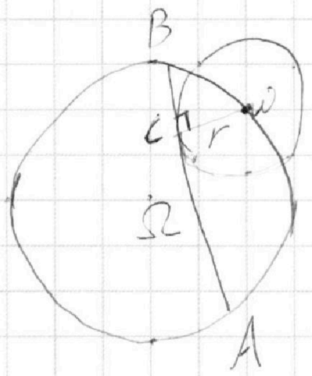
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







$\gamma + \beta = \alpha$



$64a^2b^2 - 64ab^2 - 64b^2 + a + 1 = 0$

$a^2 - a - 1 + \frac{a+1}{64b^2} = 0$

$a^2 - a\left(\frac{64b^2-1}{64b^2}\right) - 1 = 0$

$D=$

$x^2 + (\cancel{\ldots}\, 8b - ax - 12)^2 = 16$

$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 + 2(12ax - 8abx - 96b) = 16$

$x^2(a^2+1) - 2x(8ab - 12a) + 128 - 192b = 0$

$\frac{D}{4} = 0 = 64a^2b^2 - 192a^2b + 144a^2 - 128a^2 + 192a^2b - 128 + 192b$

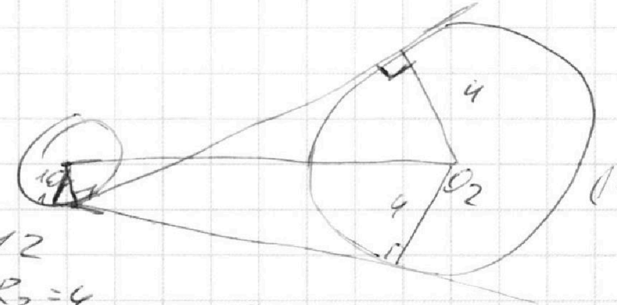
$\begin{cases} a^2(64b^2 + 16) + 192b - 128 = 0 \\ 64a^2b^2 - a(64b^2 - 1) - 64b^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$16a^2 + a(64b^2 - 1) + 64b^2 - 1 + 192b - 128 = 0$

$a^2 - 64b^2 + 1 = 0$

$16a^2 - 64b^2 +$

(0;0)



(0;12)

$O_1O_2 = 12$

$R_1 = 1,\ R_2 = 4$

$960b^2 + 192b - 144 = 0$

$120b^2 + 24b - 18 = 0$

$60b^2 + 12b - 9 = 0$

$20b^2 + 4b - 3 = 0$

64×15: 320, 64, 960

$\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$