



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть a число 2 входит в степени α_1 , b число 2 в степени α_2 и c число 2 в степени α_3 .

Тогда т.к. $ab : 2^{15} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$ $bc : 2^{17} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$
и $ac : 2^{23} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 15 + 17 + 23 = 55$

Итак $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$

Т.к. a, b, c - натуральные числа то $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должны быть целыми неотрицательными числами

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

Нам нужно найти т.к. нам нужно наименьшее возможное abc
 \rightarrow мы хотим чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ было наименьшим из возможных

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$ При $\alpha_1 = 11$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$ и условия с действительностью выполняются

Пусть 7 входит в число a в степени β_1 ; в число b в степени β_2 и в число c в степени β_3

Также как и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ должны быть целыми неотрицательными числами и:

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$; $\beta_2 + \beta_3 \geq 18$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 39 \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 11 + 18 + 39 = 68$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$ но заметим, что $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$ и $\beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$

Т.к. нам нужно наименьшее возможное abc , то мы хотим

чтобы $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ было наименьшим $\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$
из возможных

При $\beta_1 = 16$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 23$ условия выполняются

Т.к. нам нужно наименьшее abc то a, b и c не должны делиться на какие-то простые числа кроме 2 и 7

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$ Наименьшее возможное $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

и это достигается при $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$ $b = 2^4$ $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

~~Пример~~ $a^2 - 7ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

Если $a+b$ делится на m , то и $(a+b)^2$ делится на m

\Rightarrow Чтобы мы могли сократить на m тогда $(a+b)^2 - 9ab$ делится на $m \Rightarrow$ и $9ab$ делится на m

П.к. нам нужно наибольшее $m \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$

Пусть $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ $b = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_m^{r_m}$ где p_i и q_i это простые числа

П.к. $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то никакое из чисел p_1, p_2, \dots, p_n не равно никакому из чисел q_1, q_2, \dots, q_m

Заметим это тогда m не может делиться ни на какое из чисел

$p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$. Так как:

Пусть m делится на какое-то из этих чисел, без ограничения общности скажем, это на p_1

Тогда п.к. $a+b : m$ то $a+b : p_1$, заметим это $a : p_1$ но тогда и $b : p_1$ а такого быть не может

$\Rightarrow m$ не делится ни на какое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$

П.к. $9ab : m$ и $m \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m \Rightarrow$ наибольшее

возможное $m = 9$

Пример чисел a и b когда $m = 9$ $a = 1$ $b = 8$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{8} - \text{несократимая дробь} \quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{9} \quad \text{в этом случае } m = 9$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

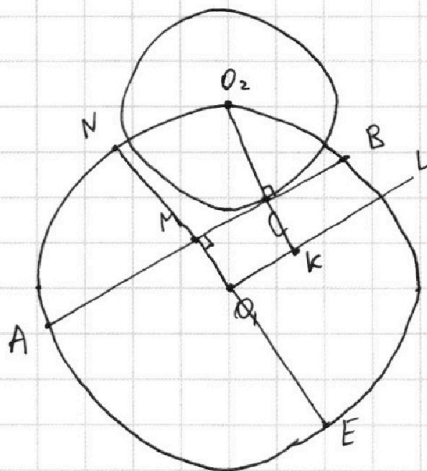
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3.



Пусть $AC = 17x$ и $CB = 7x$

Пусть O_1 центр окружности Ω

O_2 центр окружности ω

$O_2C = 7$

Опустим из O_1 перпендикуляр на AB

получим точку M . т.к. O_1 центр окружности $\Rightarrow AM = BM = \frac{17x + 7x}{2} = 12x$

$\Rightarrow CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для $\triangle O_1MA$

$$AM^2 + O_1M^2 = AO_1^2$$

Проведем из O_1 параллель $l \parallel AB$ Пусть $O_2C \cap l = K$

$O_1K \parallel O_1M \Rightarrow O_1MK$ - прямоугольный $\Rightarrow CK = O_1M = y$ $O_1K = CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для $\triangle O_1O_2K$ $O_1K^2 + O_2K^2 = O_1O_2^2$

$$O_1O_2 = O_1A$$

$$\Rightarrow AM^2 + O_1M^2 = O_1K^2 + O_2K^2 \Rightarrow 144x^2 + y^2 = 25x^2 + 49 + y^2 + 14xy$$

$$\Rightarrow 119x^2 - 14y = 49 \Rightarrow 17x^2 - 2y = 7 \quad y = \frac{17x^2 - 7}{2} \quad x^2 = \frac{7 + 2y}{17}$$

$$\triangle NMA \sim \triangle BME$$

$$\Rightarrow \frac{NM}{BM} = \frac{MA}{ME} \Rightarrow \frac{13 - y}{12x} = \frac{12x}{13 + y} \Rightarrow 144x^2 = 169 - y^2$$

$$y^2 = 289x^2 + 49 - 238x^2 \Rightarrow 576x^2 = 289x^2 - 49 + 238x^2$$

$$\Rightarrow 289x^4 + 338x^2 - 427 = 0$$

$$\Rightarrow 144 \cdot \frac{7 + 2y}{17} = 169 - y^2 \Rightarrow 1008 + 288y = 2873 - 17y^2$$

$$17y^2 + 288y - 1865 = 0 \quad D = 288^2 + 4 \cdot 17 \cdot 1865 = 209764 = 458^2$$

$$y > 0 \Rightarrow y = \frac{-288 + 458}{2 \cdot 17} = \frac{170}{34} = 5$$

$$x^2 = \frac{7 + 2 \cdot 5}{17} = \frac{17}{17} = 1 \quad x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Заметим что $(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$
обозначим $3x^2 - 6x + 2 = a$ $3x^2 + 3x + 1 = b$ ($a, b \geq 0$)

Получим что $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$ $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

Тогда есть 2 случая

1 случай. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

2 случай: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ возведем обе части в квадрат:

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$ возведем обе части в квадрат:

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 16 \cdot 9 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \quad x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

Или получим 3 корня: $\frac{1}{9}$; $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$; $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

Подставив их в выражения $3x^2 - 6x$ проверим будут ли с этими корнями выражения $3x^2 - 6x + 2$ и $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$$3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1 - 18 + 54}{27} = \frac{37}{27} > 0$$

$3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0$ т.к. все слагаемые больше 0

$$3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 2 > 0 \text{ т.к. } 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 > 0 \quad \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$\Rightarrow -6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 0$

$$3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{21} > -1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0$$

Корнями уравнения $3x^2 - 6x + 2$ будут числа $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ и $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$
Заметим что $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ т.к. $3x^2 - 6x + 2$ возраст. функция
 $\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) - 6 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) + 2 < 0 \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$ не подходит

Ответ: $\frac{1}{9}$; $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Найдем функцию для прямой OP и прямой QR
 ~~$y_{OP} = kx + b$~~ $y_{OP} = kx + b$ в точке O $0 \cdot k + b = 0 \Rightarrow b = 0$
в точке P $-13 \cdot k = 26 \Rightarrow k = -2$

$$y_{OP} = -2x$$

т.к. $OPQR$ - параллелограмм $\Rightarrow OP \parallel QR \Rightarrow k_{OP} = k_{QR} = -2$

$\Rightarrow y_{QR} = -2x + b$ в точке R $-2 \cdot 16 + b = 0 \Rightarrow b = 32$

$$y_{QR} = -2x + 32$$

Пусть мы выбрали x, y , тогда выразим $y_2 = -2x_2 + (14 + 2x_1 + y_1)$

$14 + 2x_1 + y_1$ это какое-то число \Rightarrow ~~выразим~~ т.к. коэффициент
при $x_2 = -2$ то прямая на которой будут лежать точки
 x_2, y_2 с заданными x_1, y_1 будет параллельна OP и QR

\Rightarrow т.к. точки лежат внутри параллелограмма или на границе

$$\Rightarrow 0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32 \quad \Rightarrow -14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

Пусть $y_1 + 2x_1 = a$ ~~и $14 \leq a \leq 18$~~ тогда $y_1 = -2x_1 + a$
 $-14 \leq a \leq 18$

Тогда прямая на которой лежат точки x_2, y_2
также параллельна OP и QR т.к. коэффициент при $x_2 = -2$
 $\Rightarrow 0 \leq a \leq 32$ и $-14 \leq a \leq 18 \Rightarrow 0 \leq a \leq 18$

$$\Rightarrow 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \quad y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \Rightarrow 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$26 \geq y_1 \geq 0 \Rightarrow \text{и ~~и~~ } -\frac{13}{2} \leq x_1 \leq 9 \quad 0 \leq y_2 \leq 26 \Rightarrow -6 \leq x_2 \leq 16$$



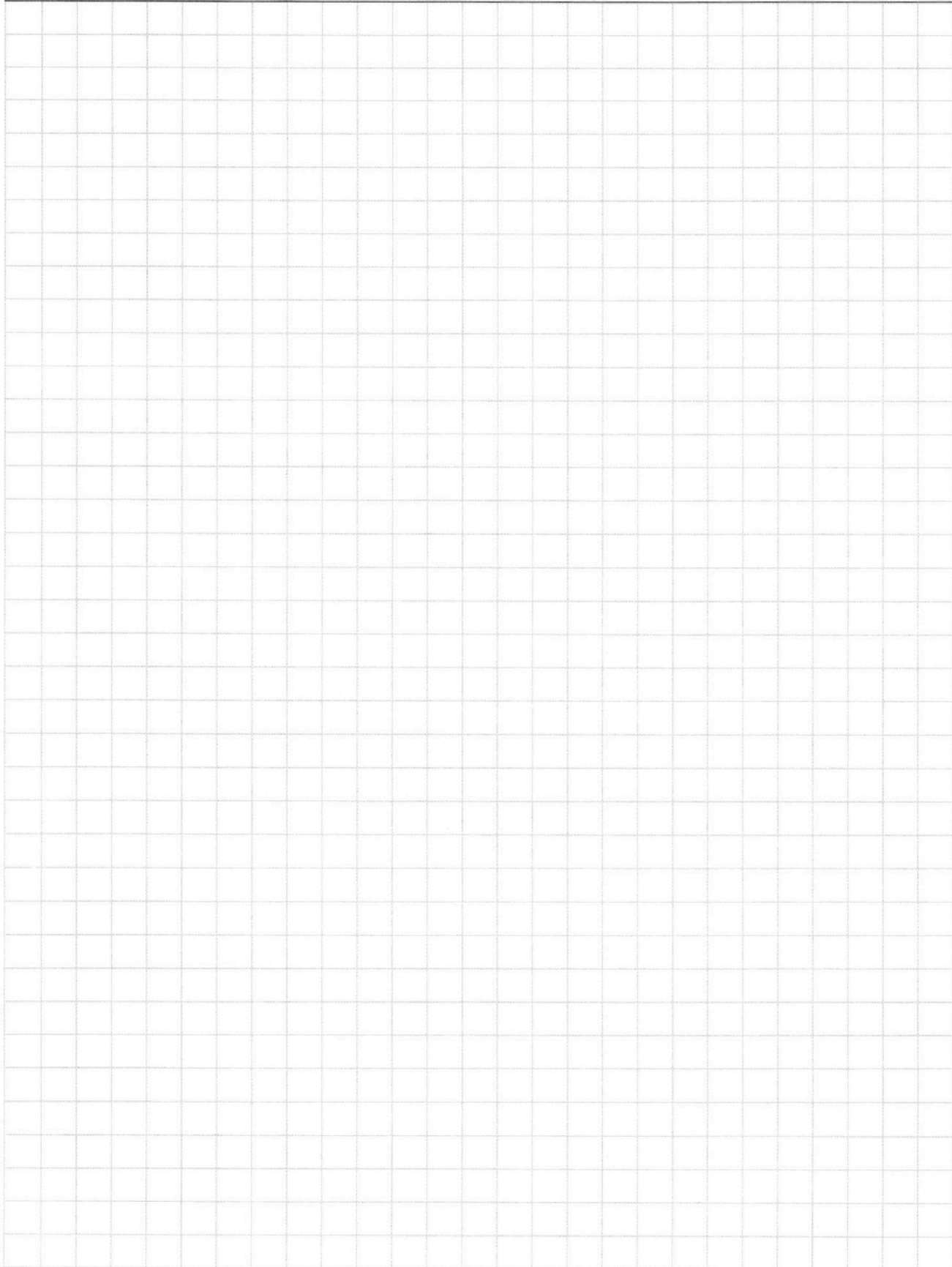
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

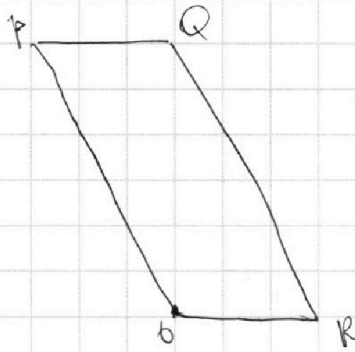


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ + 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha = \frac{25}{50+10x} = \frac{5}{10+2x} = \frac{5}{5+x}$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ \times 17 \\ 238 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 16 \\ 13 \\ \hline 48 \\ \times 16 \\ 208 \end{array} = \boxed{446}$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$y_2 = 14 - 2x_2 \quad \begin{array}{l} 0 \quad 14 \\ 1 \quad 12 \\ 2 \quad 10 \end{array}$$

$$y_2 = \underbrace{(14 + y_1 + 2x_1)}_b - 2x_2 = b - 2x_2$$

$$\begin{array}{l} -2x_2 \quad -2x_2 + 32 \\ 0 \leq b \leq 32 \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ 7 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq 14 + y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \end{array}$$

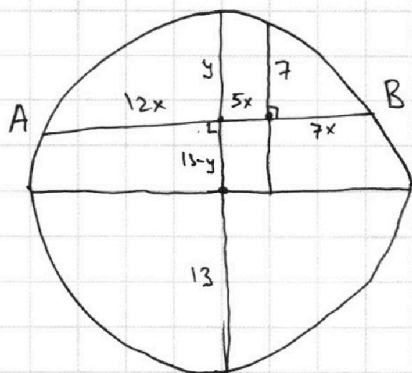
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y}{12x} = \frac{12x}{26-y} \quad 144x^2 = 26y - y^2$$

$$144x^2 + 169 + y^2 - 26y = 25x^2 + 400 + y^2 - 40y$$

$$119x^2 + 14y = 231$$

$$17x^2 + 2y = 33$$

$$y = \frac{33 - 17x^2}{2} \quad 144x^2 = 429 - 221x^2 - y^2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 17 \overline{) 119} \\ \underline{119} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 33 \\ 17 \overline{) 33} \\ \underline{33} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 17 \overline{) 365} \\ \underline{33} \\ 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 17 \overline{) 429} \\ \underline{351} \\ 78 \end{array} \quad 365x^2 - 4$$

$$1089 + 289x^2 - 1122x^2 = 858 - 730x^2 \quad \frac{-1089}{231}$$

$$289x^2 - 392x^2 + 231 = 0 \quad x = t$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 17 \overline{) 231} \\ \underline{231} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{1122} \\ 33 \overline{) 1122} \\ \underline{1122} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 33 \\ 33 \overline{) 1089} \\ \underline{1089} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{429} \\ 2 \overline{) 429} \\ \underline{429} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 365 \\ 2 \overline{) 730} \\ \underline{730} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{392} \\ 392 \overline{) 153664} \\ \underline{784} \\ 75824 \\ \times 3528 \\ \underline{1176} \\ 153664 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{288} \\ 288 \overline{) 82944} \\ \underline{2304} \\ 59904 \\ \times 2304 \\ \underline{82944} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 231 \overline{) 267036} \\ \underline{289} \\ 867 \\ \times 578 \\ \underline{66759} \\ 267036 \end{array}$$

$$6 \cdot \frac{24}{69} =$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 81x^2 - 36x$$

$$3x(x-6) \quad \frac{24}{21} \cdot \left(\frac{24}{69} - 6\right) + 2$$

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{420} \\ 84 \overline{) 176400} \\ \underline{168} \\ 176400 \\ \times 1865 \\ \underline{68} \\ 14920 \\ \times 11190 \\ \underline{126820} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 7 \overline{) 238} \\ \underline{119} \\ 119 \\ \underline{119} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 78 \\ 4 \overline{) 312} \\ \underline{312} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$18 + 6\sqrt{78} > 207 + 69\sqrt{3}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \quad 69 + 21\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{78} + 21\sqrt{3} \quad 73$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{312} - \sqrt{\dots} \\ \dots \\ \underline{576} \\ 238 \\ \dots \\ \underline{338} \\ \dots \\ \underline{458} \\ 170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 7 \overline{) 1008} \\ \underline{1008} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82944 + 126820 \\ \underline{82944} \\ 209764 \end{array}$$

$$209764$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 4 \overline{) 576} \\ \underline{576} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots \\ \underline{400} \\ 160000 \\ \dots \\ \underline{2873} \\ 1008 \\ \dots \\ \underline{1865} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ 458 \overline{) 458} \\ \underline{458} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

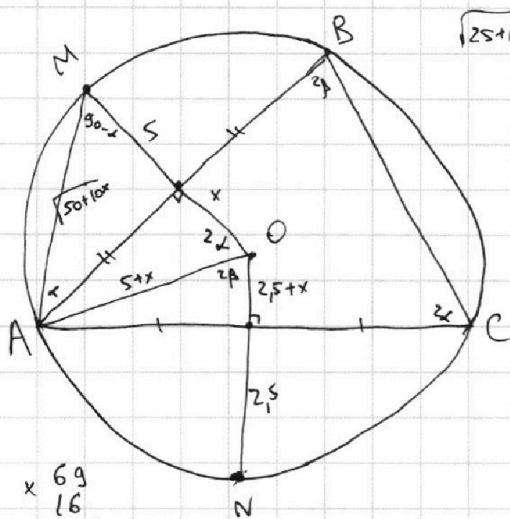
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} x \ 69 \\ 16 \\ \hline + \ 414 \\ \hline 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$

$x = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$

$2 \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$

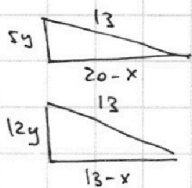
$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$144 + 16 \cdot 69 = 1248$

$16(9 + 69) = 16 \cdot 78$

$4\sqrt{78}$



$x + y \geq 15$

$y + z \geq 17$

$x + z \geq 23$

$x + y + z \geq \frac{55}{2} = 27.5$

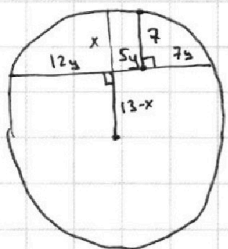
$x + y + z \geq 28$

$kx - 13k = 26$

$k = -2$

$16k + b = 0$
 $3k + b = 26$

$k = -2$
 $b = 32$



$0, 0; -1; 2$

$169 - 144y^2 = 169 + x^2 - 26x$

$x^2 + 144y^2 = 26x$

$y = \frac{\sqrt{x(26-x)}}{12}$

$25y^2 + 400 + x^2 - 40y = 144y^2 + 169 + x^2 - 26x$
 $14x + 119y^2 = 231$

$50 + 2x^2 + 20x - 2$

$(50 + 2x^2 + 20x)(1 - \cos \alpha) = 50 + 10x$

$1 - \cos \alpha = \frac{25 + 5x}{25 + x^2 + 10x} = \frac{5(5+x)}{(5+x)^2} = \frac{5}{5+x}$

$\cos \alpha = \frac{x}{5+x}$

$a, b \geq 0$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b} \quad a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 -$

$a^2 + a - 2\sqrt{ab}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$y_2 = 14 + 2x_1$

$0; 0 \quad 0; 14$

$0; 0 \quad 1; 16$

$x + y + z = 34 \quad z = 23$

$x = 16$

$y = 0$

$x + y = 15$

$y + z = 17$

$z + x = 23$

$ab: 2^{15} 7^{11}$

$bc: 2^{17} 7^{18}$

$ac: 2^{23} 7^{29}$

$2^{23} 7^{29}$

$z - x = 2$

$x - y = 6$

$z - y = 8$

$16k + b = 0$
 $3k + b = 26$

$k = -2$
 $b = 32$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 238 \\ \times 16 \\ 13 \\ \hline 48 \\ \hline 208 \end{array} \quad 446$

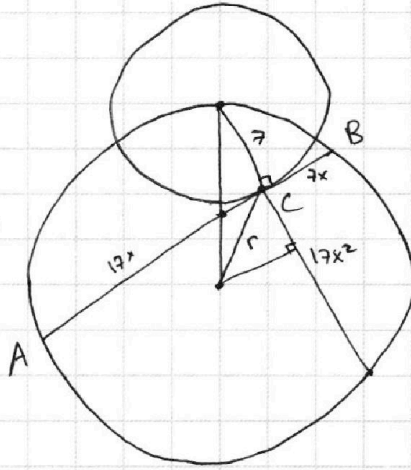
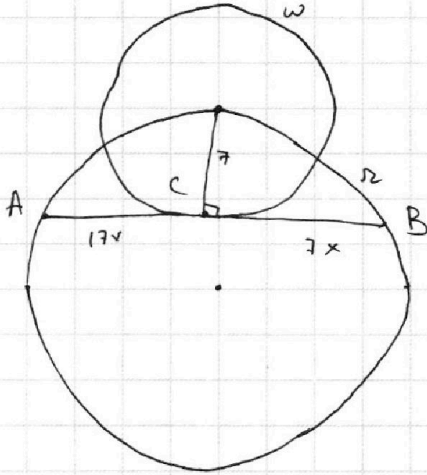
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$17x \cdot 7x = 13^2 - r^2$$

$$r = \sqrt{169 - 119x^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{17x}{7x \sin \alpha}$$

$$\frac{17x - \frac{7}{\tan \alpha}}{26 - \frac{7}{\sin \alpha}} = \frac{(17x - \frac{7}{\tan \alpha}) \sin \alpha}{(26 \sin \alpha - 7) \tan \alpha}$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} : (7x + \frac{7}{\tan \alpha}) = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{\cos \alpha + x \sin \alpha}{x \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{(17x \tan \alpha - 7) \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{49 + 49x^2}}{\sqrt{17x^2 + 17^2x^4}} = \frac{7}{17x}$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = 17x^2$$



$$\frac{1 + 17x^2}{x^2 + 17x^4} = \frac{1}{x^2}$$



$$90 - x = 180 - 2x \quad x = 90$$

$$\frac{7 \cdot 2}{7 + 17x^2} = \frac{y}{13}$$

$$\frac{182}{7 + 17x^2}$$

$$y = 7 + 17x^2$$

$$7^2 + r^2 - 2 \cdot 7r \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 119x^2 - 14r \cdot \cos \alpha = 0$$

$$7 - 17x^2 - 2r \cos \alpha = 0$$

$$2r \cos \alpha = 7 - 17x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{7 - 17x^2}{2\sqrt{13^2 - 119x^2}}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{9}{65 - \frac{72}{56}}$$

$$r^2 + 17^2x^4 + 2r \cdot 17x^2 \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 14r \cos \alpha = 17^2x^4 + 2 \cdot 34r x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$7(7 - 2r \cos \alpha) = 17x^2(17x^2 + 2r \cos \alpha)$$

$$\begin{matrix} \times 14 \\ \times 13 \\ \hline 42 \\ \times 14 \\ \hline 182 \end{matrix}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b \quad 9ab \quad a+b : 9$$

$$a^2 + b^2 - 7ab = a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$