



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

Задача №1 (:-кратно; / - не кратно)

Пусть $a = k_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ (где $k_1/2$ и $k_1/7$)
 $b = k_2 \cdot 2^{\beta_2} \cdot 7^{\delta_2}$ (где $k_2/2$ и $k_2/7$)
 $c = k_3 \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\delta_2}$ (где $k_3/2$ и $k_3/7$)

где $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2 \geq 0$
 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

Тогда $ab = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$
 $bc = k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$
 $ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \delta_2}$

Заметим, что т.к. 2 и 7 - простые числа,
то: $k_1 \cdot k_2/2$ и $/7$; $k_2 \cdot k_3/2$ и $/7$;
 $k_1 \cdot k_3/2$ и $/7$; $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3/2$ и $/7$

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 & (11) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & (21) \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 & (12) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 & (22) \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 & (13) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 & (23) \end{cases}$$

$$a \cdot b \cdot c = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$$

(*) Из условия: (11)+(12)+(13): $2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq \frac{51}{2} \geq 26$ (т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$); $(k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N})$

Приведем пример $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ при которых $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$ и условия (11), (12) и (13) выполняются: $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 6, \delta_1 = 11$.

(**) Из условия: (21)+(22)+(23): $2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \frac{64}{2} = 32$.

Приведем пример $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 32$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. Но из того, что $\beta_2 \geq 0$ и условия (23) следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \alpha_2 + \delta_2 \geq 37$

Приведем пример $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. $\alpha_2 = 20, \beta_2 = 0, \delta_2 = 17$.

Заметим, что т.к. k_1, k_2, k_3 никак не влияют на делимость, то $\min abc \in \mathbb{N}$
 $\ominus 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$ (при $k_1 = k_2 = k_3 = 1$).

Из (*) и (**) видно, что мин. $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$, а мин. $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$.

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37} \quad (a = 2^9 \cdot 7^{20}, b = 2^6 \cdot 7^0, c = 2^{11} \cdot 7^{17})$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.

$$\text{Рассмотрим дробь } \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}.$$

Пусть $(a+b) = km$. Тогда, во-первых $(a+b) \perp$ (вращено по оси c) k , во-вторых

$(a+b)^2 = k^2 m^2 : m$. Так как если наша дробь сократима на m , то её чис-

литель и знаменатель оба кратны m . Это есть $(a+b)^2 - 8ab = k^2 m^2 - 8ab$ - кратно

m . Это возможно только если $8ab : m$. Пусть $8ab = l \cdot m$ ($8ab \perp l$).

И.к. $(a+b) = km$, то $b = km - a \Rightarrow 8ab = 8a \cdot (km - a) = 8aktm - 8a^2 = l \cdot m$.

Это возможно только если $8a^2 : m$. Пусть $8a^2 = n \cdot m$ ($8a^2 \perp n$). Тогда

посмотрим на дробь $\frac{8ab}{8a^2} = \frac{8 \cdot a \cdot b}{8 \cdot a \cdot a} = \frac{a}{a} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$.

При $m > 1$ получаем, что дробь $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$ сократима, это противоре-
чит условию.

При $m = 1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{n}{l}$. И.к. $m = 1$ - максимальное значение m .

~~Пример, когда $m = 1$ подходит, это, например $a = 2, b = 3$. Но очевидно~~

Ответ: $m = 1$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

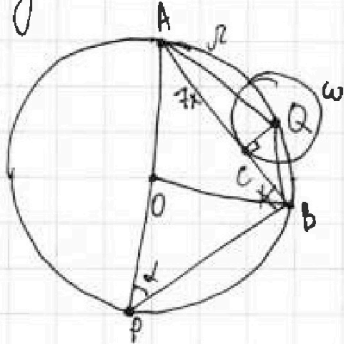
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Портя QR-кода недопустима!

Задача № 3



Пусть $AC=7x$ и $CB=x$.
Продлим AO до пересечения с Ω в т. P .

$$\angle APB = \alpha. \quad \angle ABP = 90^\circ \text{ (AP-диам.)} \quad \text{По т. Пифагора: } PB = \sqrt{AP^2 - AB^2}$$
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AB^2}}{AP} = \frac{\sqrt{100 - 64x^2}}{10} = \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$$

$$\angle AQB = 180^\circ - \alpha \text{ (4-x-угольник APBQ-вып.)}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AQB = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\Rightarrow \text{По т. косинусов для } \triangle AQB: AB^2 = AQ^2 + BQ^2 + 2 \cdot AQ \cdot BQ \cdot \cos \alpha$$

Заметим, что по т. Пифагора у $\triangle AQC$ и $\triangle QCB$:

$$AQ = \sqrt{49x^2 + 1}; \quad BQ = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow (8x)^2 = 49x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$$

$$\Rightarrow 14x^2 - 2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}} \quad \text{- возведем обе части в квадрат}$$

$$(14x^2 - 2)^2 = 4 \cdot \frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}$$

$$25 \cdot (14x^2 - 2)^2 = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим:

$$3136x^6 - 3136x^2 = 0$$

$$x^2(3136x^4 - 3136) = 3136x^2(x^4 - 1) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ - не соотв. условию задачи} \\ x=1. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AB = 7x + x = 8x = 8.$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (4x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (4x^2 - 3x + 3) \quad (*)$$

$$\nexists 4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$. Значит $(4x^2 - 3x + 3) > 0$ при любых x .

Но $-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} \leq 0$ при любых x .

Значит у ур-я $(*)$ нет решений.

Ответ: $x = \emptyset$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$. Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$ ($a \geq 0$) и $\sqrt{2x^2+2x+1} = b$ ($b \geq 0$). Тогда заметим, что $a^2 - b^2 = 2-7x$.

Т.е. $a-b = a^2 - b^2 \Rightarrow (a-b) = (a-b)(a+b)$

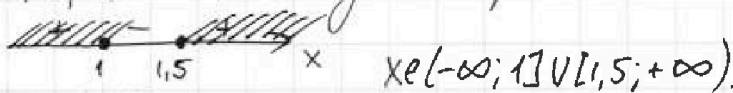
1. ОДЗ: а) $\sqrt{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 0$

✗ (рассмотрим) $2x^2-5x+3=0$

$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$

$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$. Методом интервалов:



б) $\sqrt{2x^2+2x+1}$. $2x^2+2x+1 \geq 0$

✗ $2x^2+2x+1=0$

$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1 > 0$ при любом x .

2. $(a-b) = (a-b)(a+b)$.

Случай 1. $(a-b) = 0$.

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$.

$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$.

$5x+2x = 3-1=2$

$7x=2$

$x = \frac{2}{7}$. — подходит под ОДЗ

Случай 2. $(a-b) \neq 0$

$(a-b) = (a-b)(a+b) \quad | : (a-b)$

$1 = a+b$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$. Возведем обе части в квадрат:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недопустима!

Задача №6

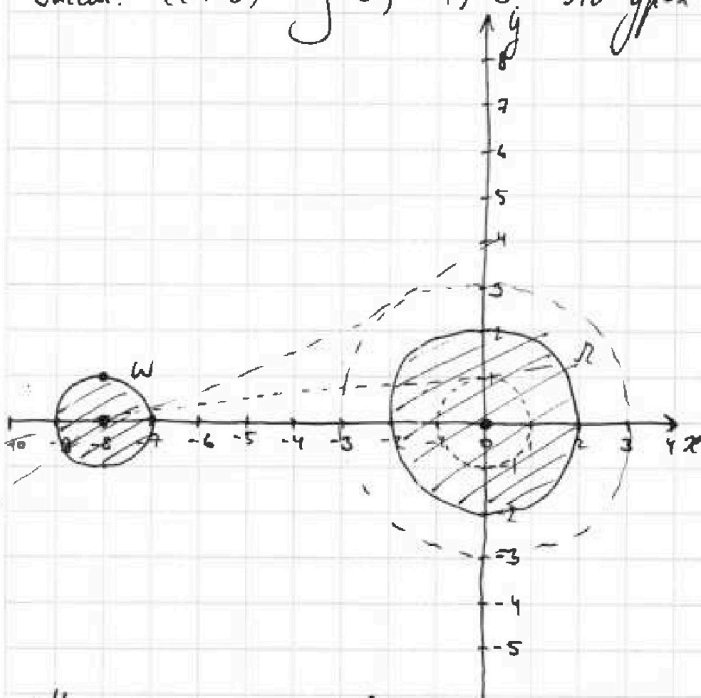
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (\neq) \end{cases}$$

Рассм. $((x+8)^2 + (y-0)^2 - 1) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(-8; 0)$ и радиусом 1.

Рассм. $((x-0)^2 + (y-0)^2 - 4) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

Области внутри и границы окружностей соответствуют неравенству (\neq) .

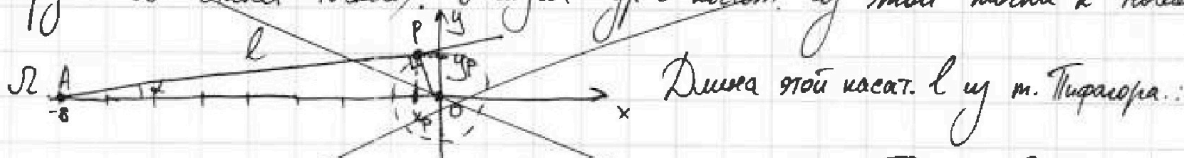
Есть всего 4 прямые, которые пересекут заштрихованную область 2-раза. Это касательные к этим 2-м окружностям.



Каждо найти их уравнение.

1. Внешние касательные. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.

(окруж. W стала точкой). Найдём ур-е касат. l из этой точки к новой



Длина этой касат. l из т. Пифагора.:

$$l = \sqrt{(-8)^2 + (1)^2} = \sqrt{63}. \quad \sin \angle = \frac{OP}{AP} = \frac{1}{8}. \Rightarrow l_y = l \cdot \sin \angle = \frac{\sqrt{63}}{8}. \quad l_x = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

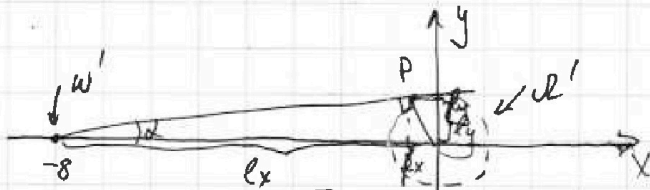
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Внешние касат. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.



Длина этой касат. l по т. Пифагора.

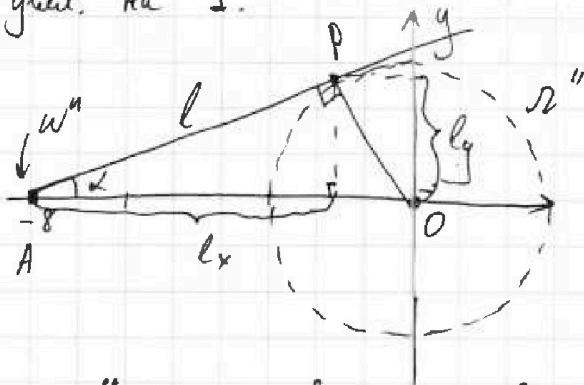
$$l = \sqrt{63}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}, \quad l_x = \frac{63}{8}$$

$$\text{Найдем ур-е: } \begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{63}{8})a + 10b = \frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{63}/63$$

Аналогично: $a = -\sqrt{63}/63$. (реальные касат. получили паралл. переносом на ± 1 вдоль Oy)

2. Внутр. касат. Мысленно уменьшим радиус ω на 1, а рад. Ω увелич. на 1.



$$l = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{45}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{3\sqrt{45}}{8}; \quad l_x = \frac{45}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Найдем } a: \begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{45}{8})a + 10b = \frac{3\sqrt{45}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

Аналогично: $a = -\frac{3\sqrt{45}}{45}$. (реальные касат. получили паралл. переносом на ± 2 вдоль Oy)

Ответ:

$$\pm \frac{\sqrt{63}}{63}; \quad \pm \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

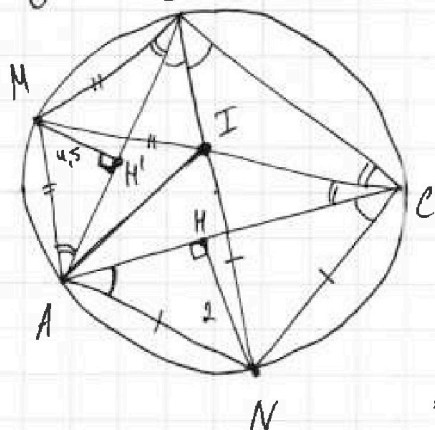
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



AI-?

I - центр. впис. окруж., I - т. пересеч.

BN и CM (бисес. $\angle B$ и $\angle C$)

По лемме о треугольнике $AM=MB=MI$
 $AN=NC=NI$

$\angle ABN = \angle ACN$ (впис., оп-ся на $\overset{\frown}{AN}$)
 $\Rightarrow \angle NAC = \angle ACN = \angle ABN$

$\angle MBA = \angle MCA$ (впис., оп-ся на $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \angle MCA$

Поскольку MN' - выс. в равнобед. $\triangle AMB$. $\Rightarrow MN'$ - медиана $\Rightarrow AN' = N'B$.
 NH - выс. в равнобед. $\triangle ANC$. $\Rightarrow NH$ - медиана $\Rightarrow AN = NC$.

$\Rightarrow NH' -$ ср. линия

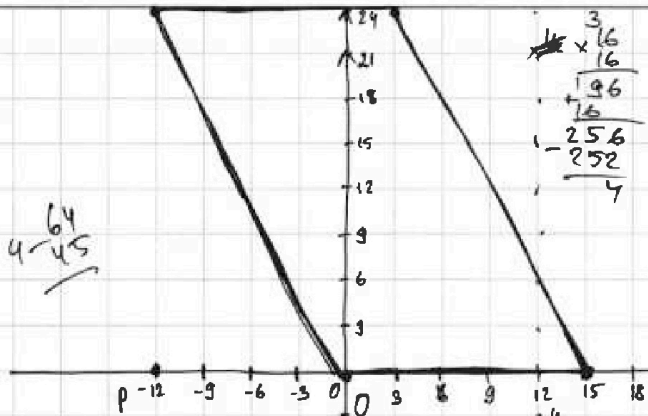
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 196 \\ + 16 \\ \hline 256 \\ \hline 252 \\ \hline 4 \end{array}$$

$(x+8)^2 \leq 1$

$$x^2 + 16x + 64 - 1 = 0$$

$$x^2 + 16x + 63 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 63 = 256 - 252 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 2}{2}$$

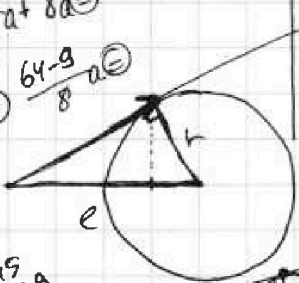
$$x_1 = -9, x_2 = -7$$

$x \in (-9, -7) \cup (-7, -9)$

$$4 - \frac{64}{45}$$

$$\frac{9}{8}a + 8a = 0$$

$$\frac{64-9}{8}a = 0$$



$$\frac{45}{8}a$$

$$\frac{45}{8}a = \frac{5\sqrt{45}}{8} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

$$-8 = a + 10b = 0$$

$$\Rightarrow a = -10b$$

$$0 = -8a + 10b$$

$$y = 10b$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$y^2 = (ax + 10b)^2 = a^2x^2 + 20abx + 100b^2$$

$$y = ax + 10b$$

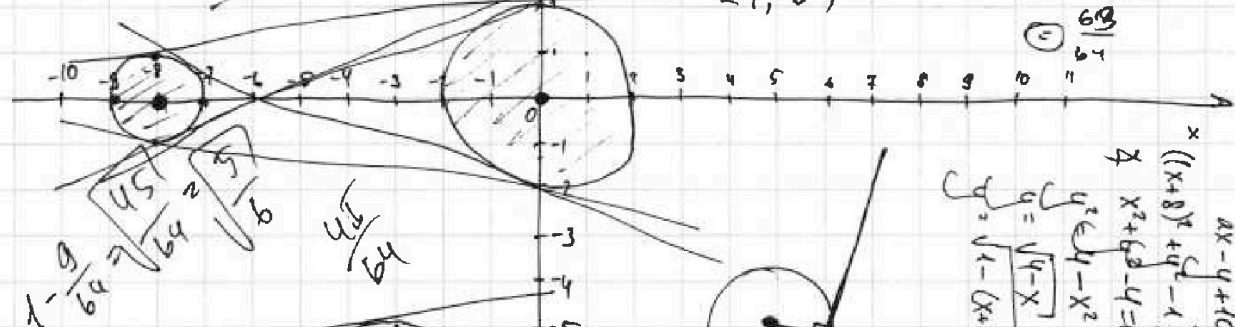
$$\frac{1}{8} + 8a = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{64}$$

$$a = -8, 1$$

$$-9, 5, 0$$

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{64-1}{64} = \frac{63}{64}$$



$$1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$$

$$\frac{45}{64}$$

$$ax - y + 10b = 0$$

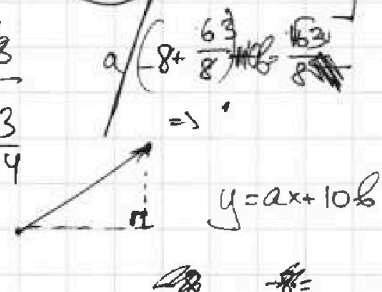
$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - y) \leq 0$$

$$\sqrt{63}^2 - \sqrt{\frac{63}{64}}^2 = 63 - \frac{63}{64}$$

$$\frac{63}{64} \left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{63^2}{64}$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(9 + x) + (h_1 + x)(9 + x) < 0$$

$$h_1 + x > 0 \Rightarrow x > -h_1$$



$$y = ax + 10b$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(1 - h_1 + x) + (h_1 + x)(1 - h_1 + x) < 0$$

$$0 = 10b + h_1 - x$$



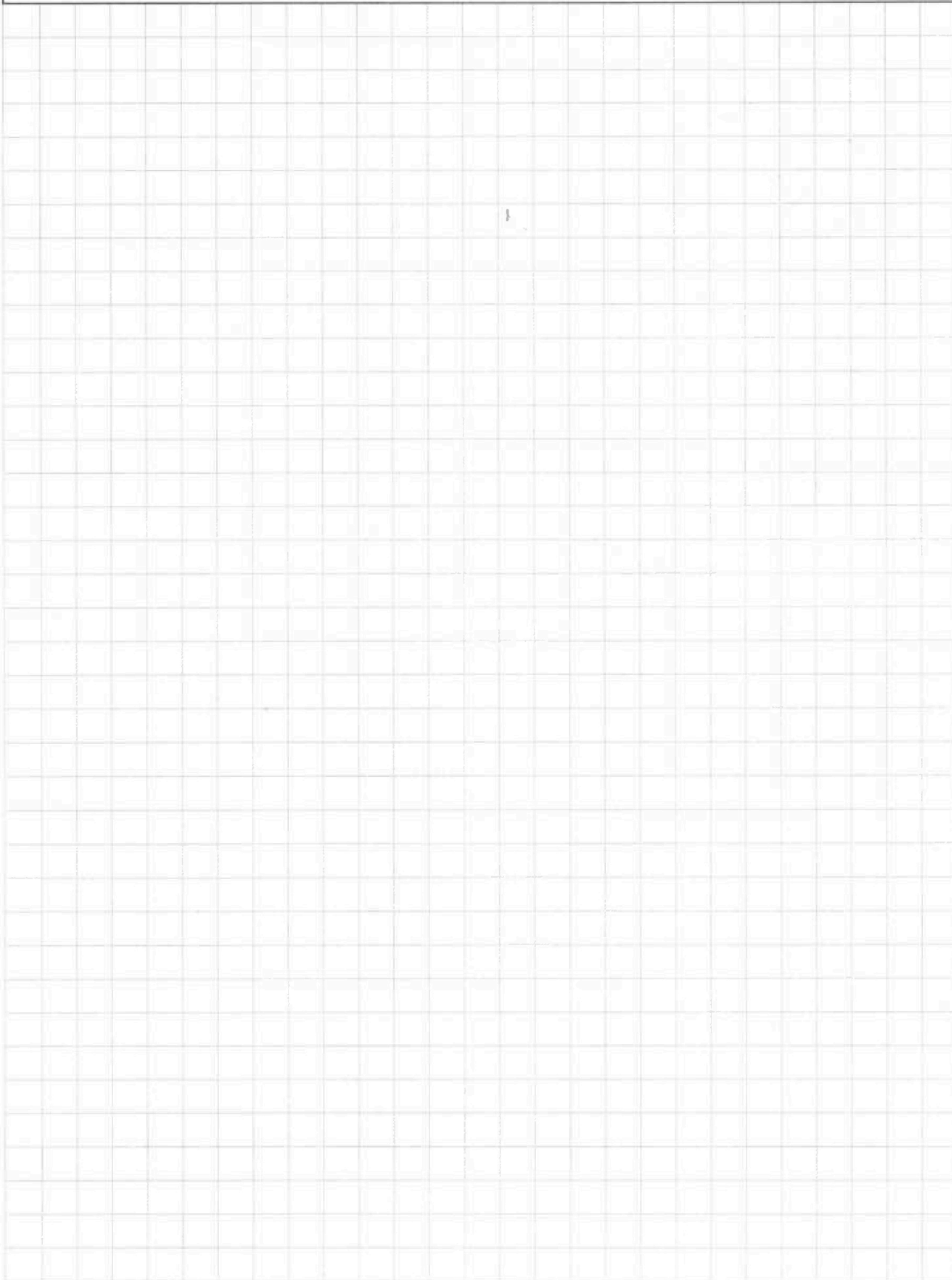
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Нюанс QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- 1 2 3 4 5 6 7
 ✓ ✓ ✓ ✓

13 $-\frac{34}{23}$

$\frac{5}{-23}$

$(a-b)^2(a+b)^2 = (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab) = a^4+a^2b^2-2a^2b+2ab^2+b^4+2a^2b+2ab^2-2a^2b^2-2a^2b^2 = a^4+b^4-2a^2b^2$

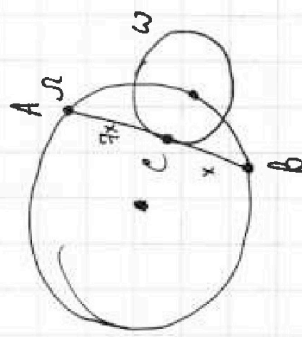
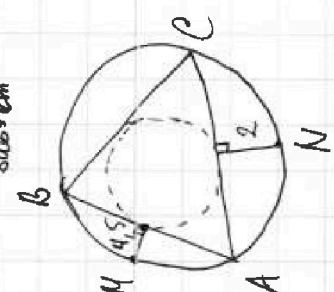
$4-6+9 = 4+9 = 13$
 $13-36 = -23$

$8ab = 8 \cdot a \cdot (km-a) = 8akm - 8a^2 = l \cdot m$ (L ⊥ AB)

$\frac{8ax}{8ab} = \frac{a}{b} = \frac{fm}{lm}$

$\frac{5}{7}$

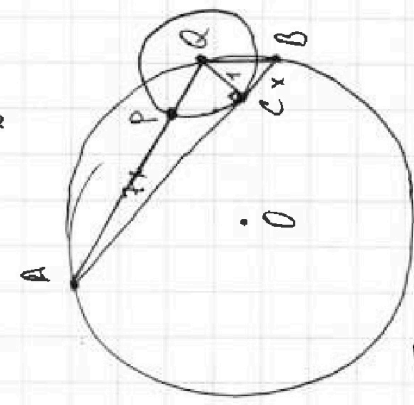
25+49-



$AQ = \sqrt{49x^2+1} = \sqrt{49x^2+1}$

$\Rightarrow AP = AQ - 1$

~~$\Rightarrow AP^2 = 7x^2 = (AQ+1) \cdot AQ (AQ-1) = (AQ^2-1)$~~



$QB = \sqrt{1+x^2}$

$\frac{(a^2+2ab+b^2)-8ab}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2-8ab}{(a+b)}$

$\frac{(a-b)^2-4ab}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)}$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)}$

32

$\frac{a}{b}$ - неопределенно, $a \in N, b \in N$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Пирча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \equiv 0 \pmod{2^{14} \cdot 7^{10}}$

$bc \equiv 0 \pmod{2^{17} \cdot 7^{17}}$

$ac \equiv 0 \pmod{2^{20} \cdot 7^{37}}$

$2^{51} = 2 \cdot 2^{50}$

$\min abc = ? \quad \sqrt{2^{50}} = 2^{25} \quad + \frac{2^4}{51}$

$\begin{matrix} 1 \\ + 14 \\ \hline 15 \\ 51 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ + 10 \\ \hline 17 \\ 37 \\ \hline 64 \end{matrix}$

$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 2^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^7$

$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 2^6 \cdot 7^{10} \cdot 7^{27}$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a \cdot b^2 \cdot c^2 = (abc)^2 = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$\Rightarrow x^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$x = \sqrt{k} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{7} \cdot 7^{32} \Rightarrow \sqrt{k} = n\sqrt{2} \Rightarrow x = n\sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = \sqrt{2} \cdot 2^{26} \cdot 7^{32} \cdot n$

\Rightarrow при $n=1$. $k_1=1, k_2=2, k_3=1$. ~~$ab=2^{14} \cdot 7^{10}$~~
 ~~$bc=2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$~~
 ~~$ac=2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$\frac{14}{31}$

$\frac{10}{37} + \frac{37}{64}$

$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \text{ (1)} \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \text{ (2)} \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 \text{ (3)} \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 \text{ (4)} \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 \text{ (5)} \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 \text{ (6)} \end{cases}$

$4x^2 - 3x + 4$

$\frac{1}{2} \cdot 8x = 4x$

$\frac{8x}{10} = 0,8x$
 $\frac{14}{31} + \frac{17}{37} = \frac{51}{64}$

$\frac{31}{20} + \frac{37}{56}$

$3a = \alpha \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$
 $b = \beta \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$
 $c = \gamma \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$\Rightarrow ab = \alpha \beta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2}$
 $bc = \beta \gamma \cdot 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2}$
 $ac = \alpha \gamma \cdot 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2}$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \cdot ac = x^2 = 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \cdot 2} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \cdot 2}$

$\Rightarrow x^2 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot 2^{2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)} \cdot 7^{2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)}$
 $(1) + (2) + (3) \cdot 2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 51$
 $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq \frac{51}{2} > 25$
 $(2) + (4) + (6) \cdot 2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 64$
 $(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 32$

$\Rightarrow x = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)}$

Ответ: $x = 2^{26} \cdot 7^{32}$

$\frac{20}{17}$

$\frac{37}{56}$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\alpha_2 \geq 10$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$
 $\gamma_2 = 17$

$\beta_1 \geq 3$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$
 $\alpha_1 = 6$
 $\beta_1 = 9$
 $\gamma_1 = 11$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 37$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$
 $\gamma_2 = 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 37$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$
 $\gamma_2 = 17$

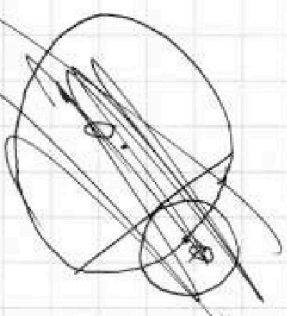
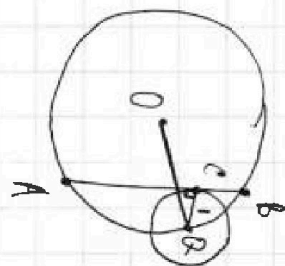
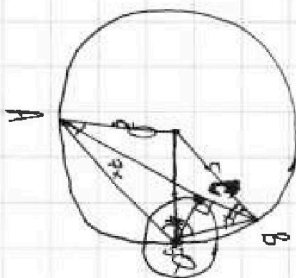
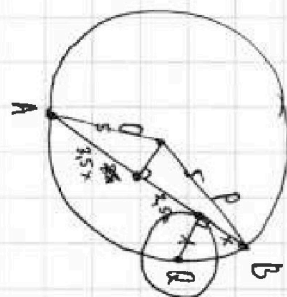
$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$
 $\gamma_2 = 17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\text{ⓐ } 2 - 7x$$

$$\text{ⓑ } a^2 - b^2$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 + 2 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$1. a-b=0$$

$$a=b$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

ⓐ3:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$$

$$4x^2 - 3x + 3 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$-5x - 2x = 1 - 3$$

$$-7x = -2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$64 - 9 = 45$$

