



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$a_1: 2^{15} \cdot 7^{11}$ $b_1: 2^{17} \cdot 7^{18}$ $a_2: 2^{25} \cdot 7^{39}$ т.ч. $a, b, c \rightarrow$

что бы найти минимальное значение произведения, то эти произведения равны, а не делится на эти числа. Нужно из этого и составить систему

a_2 - степень двойки в разложении a_2 $a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$ $a_2, a_7, b_7 \in \mathbb{Z} \geq 0$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 15 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 23 \\ a_7 + b_7 = 11 \\ b_7 + c_7 = 18 \\ a_7 + c_7 = 39 \end{cases}$$

$\rightarrow 2b_2 = 15 + 17 - 23 = 9$
 проверка, что это возможно, потому что тогда b_2 - не целое.

\Rightarrow Нужно увеличить произведение a_2 на 2.

(2-ое мин. число в котором может быть произведение)

Пусть $b_2 = 5$, тогда $2b_2 = 10 > 9$ в этом случае берется то

выполняется a_2 , а минимальное на 2 число a_2 берется, что $b_2 = 7$. Но это не дает произведение $a_2 b_2 = 7$ нужно все брать в виду

но a_2 $b_2 = 5$ является все еще минимальными и не дает нам нужного результата.

$\Rightarrow a_2 = 10$

$c_2 = 13 \Rightarrow b_2 + c_2 = 18 > 17$

можно получить и

$c_2 = 12$

$a_2 = 11$

$a_2 b_2 = 11 > 11$

т.е. $(a_2 + b_2 + c_2 = 28)$

но так в и получается, но лучше $a_2 b_2 c_2$

\rightarrow то же можно получить если

случай в первые 3 др. и получим $a_2 + b_2 + c_2 = \frac{55}{2}$ и округлим до целого аналогично произведем 7 (7 и 2 - взаимно простые числа).

и никак округ на округ не впадают!

~~$a_2 = 11 + 10 = 21$~~

$2c_7 = 39 + 18 - 11 \Rightarrow c_7 = 23$

тогда $a_7 = 39 - 23 = 16$

$\Rightarrow a_7 + b_7 = 11 \Rightarrow$

$16 + b_7 \geq 11$

тогда $\min b_7 = 0$

$23 + b_7 \geq 18$

$b_7 = 0$

$a_7 = 16$

$c_7 = 23$

$b_7 + a_7 + c_7 = 39$

любое натуральное решение системы округлим до делителей и получим a_2 и b_2 и c_2 и a_7 и b_7 и c_7 и $a_2 b_2 c_2$ и $a_7 b_7 c_7$ и $a_2 b_2 c_2 a_7 b_7 c_7$ и $a_2 b_2 c_2 a_7 b_7 c_7$ и $a_2 b_2 c_2 a_7 b_7 c_7$

$\Rightarrow \min abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 7^{a_7 + b_7 + c_7} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

← ответ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2-7ab+b^2 \equiv m \pmod{m} \end{cases} \rightarrow (a+b)^2 - 9ab \equiv m \pmod{m}$$

$$\Rightarrow 9ab \equiv m \pmod{m} \text{ т.е. } m \equiv 9$$

Курсивом пометить, сколько м делится на 9

пусть $m = 9k \quad k \in \mathbb{N} \quad k > 1$

$$\Rightarrow a+b = 9k \quad n \in \mathbb{N}$$

$$ab = kn$$

$$a \cdot b$$

$$\rightarrow a = \frac{kn}{b}$$

получается, что сумма взаимно простых
кратна 9, т.е. они и их произведение,
где их сумма > 9

$$\begin{cases} a+b \equiv 9k \\ ab \equiv k \end{cases}$$

т.к. если $ab = a \cdot b$ - чет, b - нечет, то $a+b$ - нечет, ab - чет

$a = 9k$ и k - одной четности

\Rightarrow возможен только вариант a - чет, b - нечет, тогда

дробь $\frac{a}{b}$ сократится на 2

$$\text{чет} + \text{нечет} = \text{нечет}$$

$$\text{чет} \cdot \text{нечет} = \text{чет} \quad \text{X}$$

\Rightarrow максимальное значение $m = 9$

приведем такой пример: $a = 4 \quad b = 5$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad \text{O}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-25+25} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$\frac{9 \cdot (11)}{-9 \cdot (11)} = -1 \quad \text{O}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

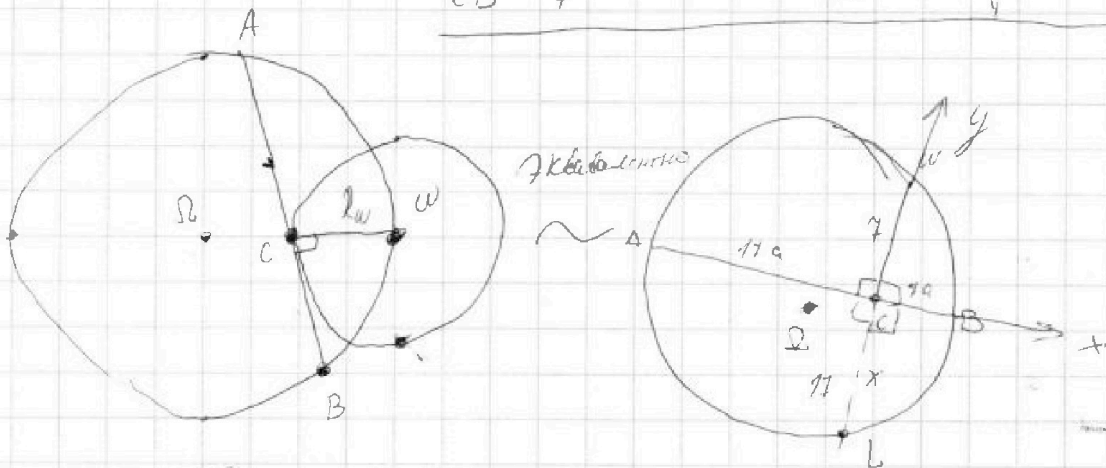
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Задача № 3

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad R_{\omega} = 7 \quad R_{\Omega} = 13 \quad | \quad AB = ?$$



Продолжим прямую ωC до пересечения с окружностью Ω в T .

т.к. это секущая хорды $\Rightarrow \frac{7a}{7a \cdot x} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 17$

$$\Rightarrow \frac{7a}{x} = \frac{x}{7a} \Rightarrow 7a^2 = x$$

везде по оси

$\omega(7a; 7)$ $B(7a; 0)$ $A(-17a; 0)$ - диаметр ω Ω $R_{\omega} = 7$ $R_{\Omega} = 13$

$\rightarrow \omega: (0 - \Omega_x)^2 + (7 - \Omega_y)^2 = 13^2 \Rightarrow \Omega_x^2 = 13^2 - (7 - \Omega_y)^2$ $a = ?$

$B: (7a - \Omega_x)^2 + \Omega_y^2 = 13^2$

$A: (17a + \Omega_x)^2 + \Omega_y^2 = 13^2$

3 крив. 3 ур.

$$\Rightarrow 7a - \Omega_x = 17a + \Omega_x \Rightarrow 2\Omega_x = -10a$$

$$\Omega_x = -5a$$

$$\Rightarrow (7a + 5a)^2 + (7 - \sqrt{25a^2 - 13^2})^2 = 13^2 \Rightarrow 7 - \Omega_y = \sqrt{25a^2 - 13^2} \Rightarrow \Omega_y = 7 - \sqrt{25a^2 - 13^2}$$

$$12^2 a^2 + 49 + 25a^2 - 13^2 - 14\sqrt{25a^2 - 13^2} = 13^2$$

$$\Rightarrow a^2(12^2 + 25) + 49 - 2 \cdot 13^2 = 14 \sqrt{25a^2 - 13^2} \quad \uparrow^2 \quad \text{кв. ур относ } a^2 = 1$$

$$2^2(12^2 + 25) + (49 - 2 \cdot 13^2) = 2 \quad \text{неудачно } a = 2 \Rightarrow AB = 17 + 7a = 24 \cdot 2 = 48$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_a \quad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$\Rightarrow a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b & \text{I} \\ a + b = 1 & \text{II} \end{cases}$$

I $a = b \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Проверка: $\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} \stackrel{!}{=} 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1 - 18 + 54}{27}} - \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0$$

$x = \frac{1}{9}$

II $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 - 9x \end{cases}$ (начальное ур) $\Rightarrow 2b = 9x \Rightarrow b = \frac{9}{2}x \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{9}{2}x^2$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81}{4}x^2 \cdot 4 \Rightarrow (12 - 81)x^2 + 12x + 4 = 0 \Rightarrow -69x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -69x^2 + 12x + 4 = 0 \quad D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot (3^2 + 69)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-12 - 4\sqrt{78}}{-69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}; \quad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

Если ответное число не может быть вычтено лишние корни - возведем в квадрат.

Проверим, чтобы полученное выражение было неотрицательно

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot (36 + 478 + 24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69} + 1 > 0$$

$$3x_2^2 + 3x_2 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3(36 + 478 - 24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6 - 2\sqrt{78})}{69} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1044 - 72\sqrt{78} + 1944 - 44\sqrt{78} + 69}{69} > 0 \quad \Rightarrow \frac{2286 + 69\sqrt{486\sqrt{78}}}{2355 + 486\sqrt{78}} > 0 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$2355 < 486 \cdot 8 < 486 \cdot \sqrt{78}$$

$$\Rightarrow \text{KO}$$

тогда подходит только 1 корень \Rightarrow X

\Rightarrow Ответ: $x = \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

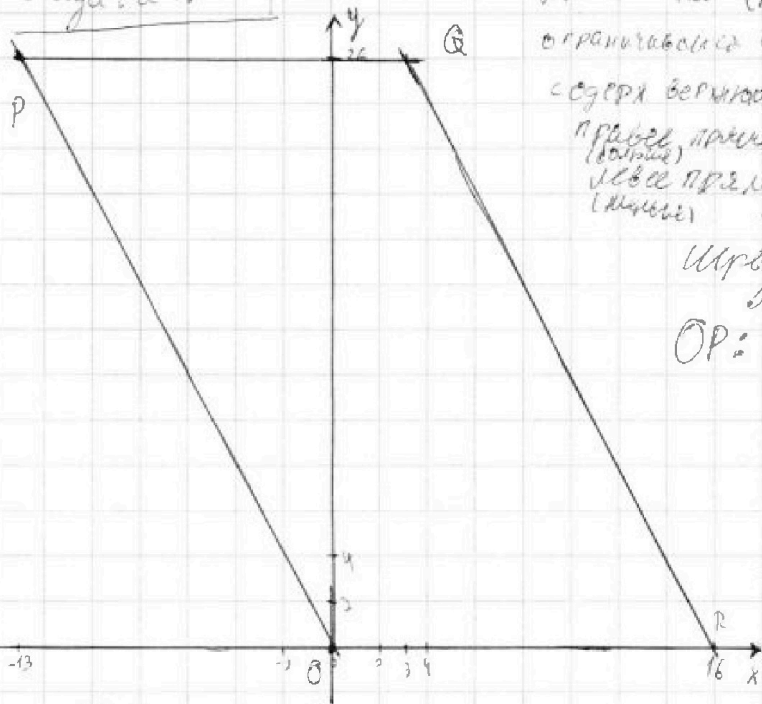
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



Любая точка (x, y) , находящаяся в пар. м. ограничена 4-мя уравнениями. Или прямой, содержащей большую сторону, выше пр. сохрм. накл. и прямой, содержащей меньшую сторону, ниже пр. сохрм. накл. и т.д.

Шаг 1. Кр. пр. и пр. пр. пр. пр.

$OP: 0 = 0 \cdot k + b \Rightarrow b = 0$
 $26 = -13 \cdot k + 0 \Rightarrow k = \frac{-26}{-13} = 2$
 $\Rightarrow y = 2x$

QR имеет такой же наклон, как и OP (пар. м. стороны II)

$\Rightarrow 26 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow$
 $b = 32$
 $\Rightarrow y = -2x + 32$

\Rightarrow По условию имеем

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in [0, 26] \\ y + 2x \in [0, 32] \end{cases}$$

Наша задача найти A, B удовлетворяющие

$2x_2 + y_2 - (2x_1 - y_1) = 14$

т.к. x, y - целые \Rightarrow и каждая из пар $2x_2 + y_2$ принимает целые значения от 0 до 32.

т.е. возможные пары

- 14 - 0 = 14
- 15 - 1 = 14
- 16 - 2 = 14
- ...
- 32 - 18 = 14

\rightarrow от [14 до 32]

19 \rightarrow всего 19 пар \leftarrow ответ.

Удобнее всего т.к. ≤ 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

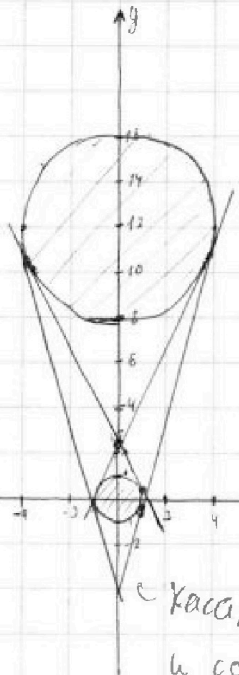
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 66) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8b - ax & \text{— это прямая} \\ x^2 + y^2 \geq 1^2 & \text{— область вне круга } R=1 \text{ с } O(0,0) \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 4^2 & \text{— область внутри круга } R=4 \text{ с } O(0,12) \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 & \text{— область вне круга } R=4 \text{ с } O(0,12) \\ x^2 + y^2 \leq 1^2 & \text{— круг } R=1 \text{ с } O(0,0) \end{cases}$$

далее будет показано, что эти круги ничем не пересекаются т.е. про сто области непересекающихся



Никакая прямая не может иметь 2 точки с кругом. Любая касается 1 точку либо хорда — доказано

⇒ т.е. в нашей системе будет только 2 решения.

Нужно рассмотреть варианты касания касаясь, как тангенс касаясь даст 2 симметричные точки осей

относ осей

касания с разных сторон относительно осей и с одной стороны

Запишем ур. касания, как расстояние от точки центра окружности = радиусу

$$\text{Д1: } \frac{|ax + y_0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \frac{|8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \Rightarrow 8|b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{Д2: } \frac{|ax + y_0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \Rightarrow \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{8|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 8|b| = 13 - 2b = 3b - 2b = 2b - \frac{3}{2}$$

$$\text{① } b \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 8b = 3 - 2b \Rightarrow 10b = 3 \Rightarrow 6b = -3$$

$$\text{② } b \in (0; \frac{3}{2}) \Rightarrow 8b = -2b + 3 \Rightarrow 10b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{10}$$

$$\text{③ } b \leq 0 \Rightarrow -8b = 3 - 2b \Rightarrow -6b = 3 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{8|\frac{3}{10}|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \frac{8|\frac{1}{2}|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 = a^2 + 1 \Rightarrow 7a = a^2 + 1$$

$b = -\frac{1}{2}$
т.к. $b > 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Прямые, $l \neq 0$ и другая прямая с серединой отрезка, никогда не пересекаются~~

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{9 \cdot 32}{50} \Rightarrow a^2 = \frac{12^2}{25} - 1 - \frac{9 \cdot 32}{50} = 288 - 50 -$$

$$a^2 = \frac{12^2}{5^2} - 1 = \frac{119}{5^2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{119}{25}}$$

$$a^2 = 15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{119}}{5}, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \sqrt{15}, -\sqrt{15}$


это 4 прямых, которые мы искали,
других не существует.



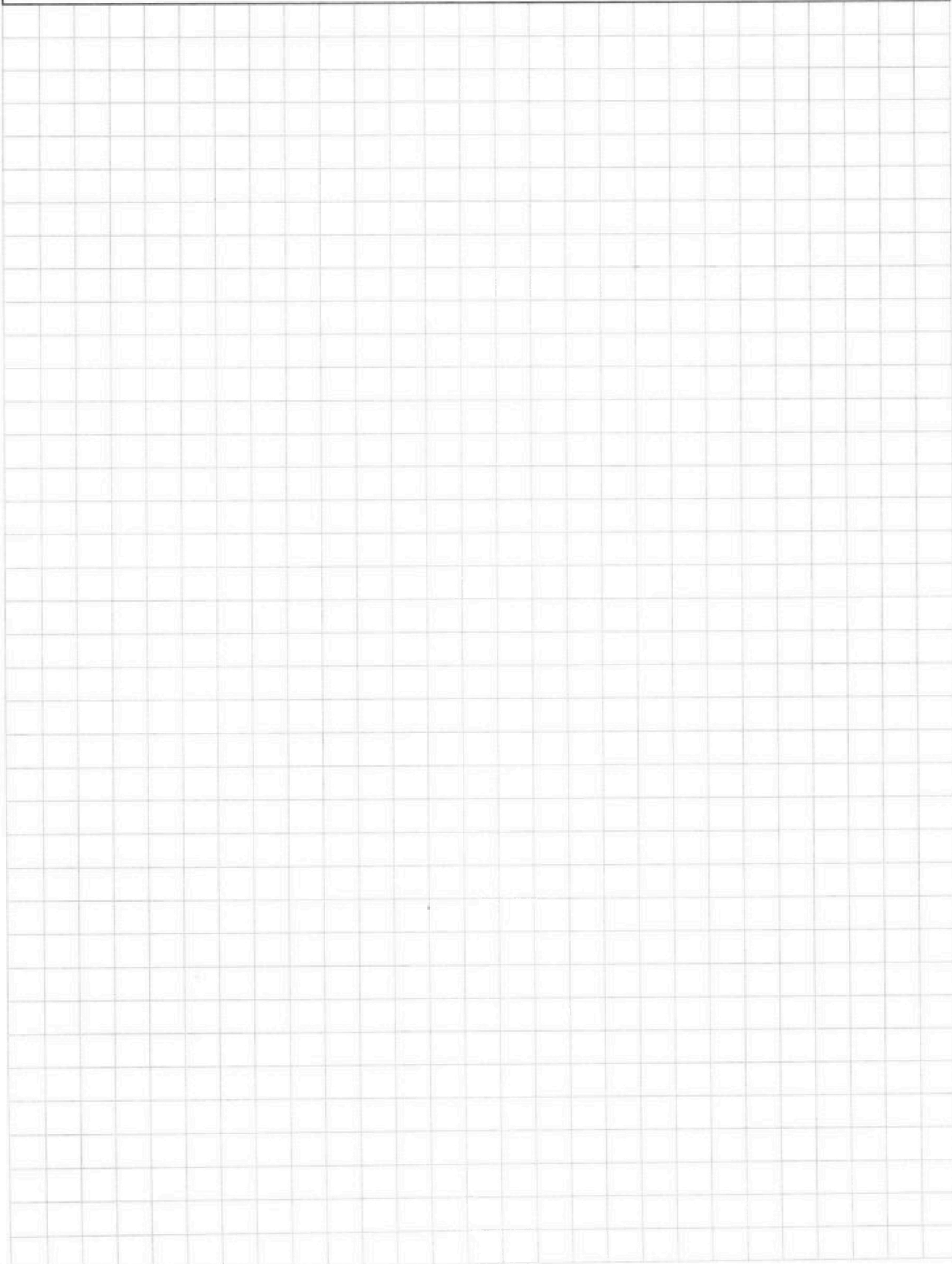
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$t = 0$
 $558 \text{ м} = 9$
 $006 = 900$
 $6 \text{ м} \text{ (1)}$

$20 + 6 \leq 58$

$20 \leq 52$

$6 \leq 26$

$6 \leq 16$

$6 \leq 8$

$9a + b = 14$

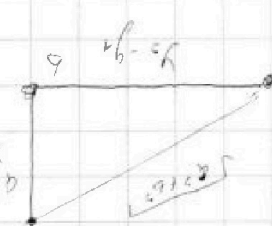
$a \leq 6$
 $b \leq 8$
 $a + b \leq 14$

$= 321 \text{ м}$

$b = 26 \cdot (1 + \frac{13}{2})$

$26 = -\frac{26}{13} \cdot 3 + b$
 $y = -\frac{26}{13}x + b$

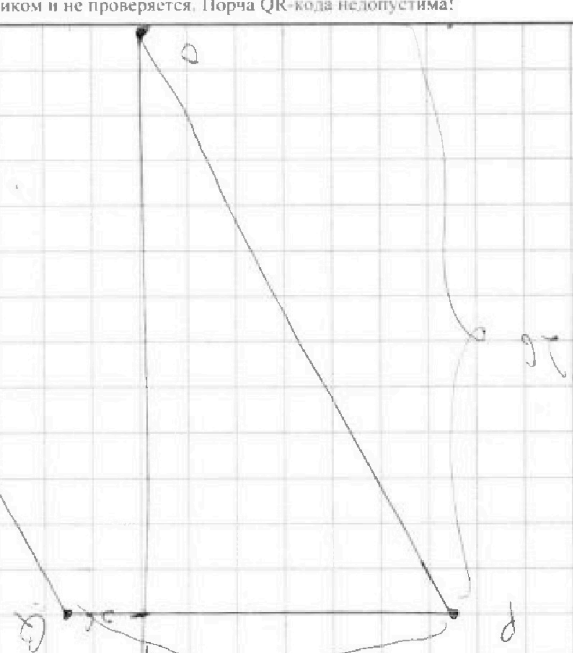
$y = -\frac{26}{13}x$



$2x^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$
 $2(x^2 - x_1) + (y_1 - y_2) = 14$

$y \leq -2x + 32$
 $y_2 \geq -\frac{26}{13}x = -2x$
 $y_1 \leq 26$
 $y_2 \leq 26$
 $2(x^2 - x_1) + (y_1 - y_2) = 14$

$\frac{a^2 - 10a + b^2}{a + b}$
 $\frac{a - 16 + \frac{b^2}{2}}{1}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 2 \\
 73 \\
 \times 73 \\
 \hline
 219 \\
 511 \\
 \hline
 5329
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 63 \\
 \times 63 \\
 \hline
 189 \\
 378 \\
 \hline
 3969
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 67 \\
 \times 67 \\
 \hline
 469 \\
 402 \\
 \hline
 4589
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 69 \\
 \times 4 \\
 \hline
 276 \\
 9 \\
 \hline
 285
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \times 5 \\
 25 \\
 \hline
 35
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 57 \\
 \hline
 = 806
 \end{array}$$

$$ax + y - 8x = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + 1y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{-2 \cdot 69}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{array}{r}
 69 \\
 \cdot 9 \\
 \hline
 78 \quad 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 39 \quad 13 \\
 \cdot 2 \quad 13
 \end{array}$$

$$\frac{-12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x^2 = \frac{6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6 \sqrt{78}}{69^2}$$

$$\sqrt{\frac{3(6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6 \sqrt{78})}{69^2} - \frac{6 \cdot (-6 + 2\sqrt{78})}{69} - 12}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 78 \\
 \times 4 \\
 \hline
 312 \\
 36 \\
 \hline
 398 \\
 \times 3 \\
 \hline
 1044 \\
 + 1242 \\
 \hline
 2286 \\
 + 69 \\
 \hline
 2355
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 18 \\
 \times 69 \\
 \hline
 162 \\
 108 \\
 \hline
 1242
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \\
 69 \\
 \times 6 \\
 \hline
 414 \\
 + 72 \\
 \hline
 6486 \\
 + 8 \\
 \hline
 88
 \end{array}$$