МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

Рассмотрим наименьшие степени вхождения в разложении на множители числа abc у чисел 2 и 7.

~~Пусть~~ Обозначим как a_1, b_1 и c_1 степени вхождения числа 2 в числа ab, bc и ca, а числа a_2, b_2 и c_2 степени вхождения ~~числа~~ числа 7 в те же числа, все они натуральные. Так как при перемножении степени вхождения числа складываются, то можно составить систему:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geqslant 15 \\ b_1 + c_1 \geqslant 17 \\ a_1 + c_1 \geqslant 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(a_1+b_1+c_1) \geqslant 55 \\ a_1+b_1+c_1 \geqslant 28 \end{array}$$

Нетрудно подобрать решение: $a_1 = 10$, $b_1 = 5$, $c_1 = 13$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geqslant 11 \\ b_2 + c_2 \geqslant 18 \\ c_2 + a_2 \geqslant 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(a_2+b_2+c_2) \geqslant 68 \\ (a_2+b_2+c_2) \geqslant 34 \end{array}$$

Так как $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$, и $c_2 + a_2 \geqslant 39$, то
$$a_2 + b_2 + c_2 \geqslant 40$$

Нетрудно подобрать решение:
$a_2 = 11$, $b_2 = 1$, $c_2 = 28$;

Тогда мы знаем, что
$abc \vdots 2^{28} 7^{40}$, а такое минимальное число равно $2^{28} 7^{40}$

Ответ: $2^{28} 7^{40}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2

a и b - взаимнопросты

$$\begin{cases} a+b \,\vdots\, m \\ a^2-7ab+b^2 \,\vdots\, m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \,\vdots\, m \\ (a+b)^2-9ab \,\vdots\, m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \,\vdots\, m \\ 9ab \,\vdots\, m \end{cases}$$

$m = НОД(a+b; 9ab)$

Так как a и b взаимнопросты, то

$НОД(a+b; a) = НОД(a+b; b) = 1$, тогда

$НОД(a+b; 9ab) = НОД(a+b; 9)$, $m \leq 9$,

пример для $m=9$: $a=4$, $b=5$

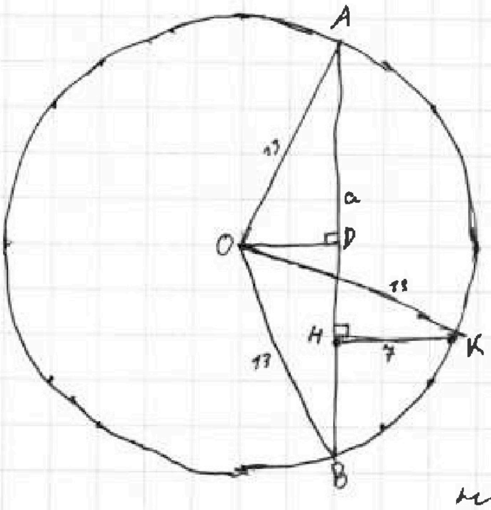
~~Ответ: 9~~

Пример подойдёт, так как знаменатель равен

$16-140+25=-99 \neq 0$, неопределённости нет.

Ответ: наибольшее значение $m=9$

Задача №3



O, K — центры окружностей Ω, ω; $AB = a$ (искомое)
KH — перпендикуляр на AB, ω проходит через H по условию, т.к. ω касается AB.
$KH = 7$; OD — перпендикуляр на AB; $AH = \frac{17a}{24}$; $HB = \frac{7a}{24}$

Решение:

$AD = BD$, т.к. OD — перпендикуляр на хорду AB; $AD = \frac{a}{2}$;

$OD^2 = OA^2 - AD^2 = 13^2 - \frac{a^2}{4}$; $DH = a - \frac{a}{2} - \frac{7a}{24} = \frac{5a}{24}$;

~~Перенесём OD на вектор DH,~~
~~получив O', тогда $\triangle OO'K$ — прямоугольный,~~
~~$O'H = OD$; $DH = OO'$; $OO'^2 + O'K^2 = OK^2$;~~
~~$\left(\frac{5a}{24}\right)^2 + \left(7 + \sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = 13^2$; ОДЗ: $a \le 26$;~~
~~$b = \frac{a}{4}$;~~
~~$\frac{25b^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13^2 - 4b^2} + 13^2 - 4b^2 = 13^2$~~
~~$\frac{25b^2}{36} + 49 - 4b^2 = 14\sqrt{13^2 - 4b^2}$;~~
~~$-\frac{119b^2}{36} + 49 = 14\sqrt{13^2 - 4b^2}$; $-\frac{17b^2}{36} + 7 = \sqrt{13^2 - 4b^2}$; $b^2 \le \frac{36 \cdot 7}{17}$~~

~~Треугольник ODB прямоугольный; $OD^2 + BD^2 = OB^2$;~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Перенесём O на вектор DH получив O', тогда $\triangle OO'K$ – ~~равнобедренный~~ прямоугольный, $O'H = OD$, $DH = OO'$, $(OO')^2 + (O'K)^2 = OK^2$;

$\left(\frac{5a}{24}\right)^2 + \left(7 + \sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = 13^2$, $a \leq 26$; $b = \frac{a}{4}$;

$\cancel{\frac{25b^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}} + 13^2 - \frac{a^2}{4}}$

$\frac{25b^2}{36} + 49 + 14\sqrt{13 - 4b^2} + \cancel{13^2} - 4b^2 = \cancel{14\sqrt{13^2 - 4b^2}}\ \cancel{13^2}$

$\frac{25b^2}{36} - 4b^2 + 49 = -14\sqrt{13 - 4b^2}$;

$-\frac{119b^2}{36} + 49 = -14\sqrt{13 - 4b^2}$;

$\frac{17b^2}{36} - 7 = 2\sqrt{13 - 4b^2}$; $c = \frac{b}{6}$; $c = \frac{a}{24}$;

$17c^2 - 7 = 2\sqrt{13 - 24c^2}$; $c \geq \sqrt{\frac{7}{17}}$, $\boxed{c^2 \geq \frac{7}{17}}$ ОДЗ

$289c^4 - 238c^2 + 49 = 26 - 48c^2$;

$289c^4 - 190c^2 + 23 = 0$; $D = 190^2 - 4 \cdot 289 \cdot 23 = 36100 - 26588 = 9512$;

$c^2 = \frac{190 \pm \sqrt{9512}}{289}$, $c^2 = \frac{190 + \sqrt{9512}}{289}$, т.к. первый случай не удовлетворяет ОДЗ.

Тогда $a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9512}}}{17} \cdot 24$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{190 + \sqrt{9512}}}{17} \cdot 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$D = 9 - 3\cdot4\cdot1 = -3 < 0$ (значение всегда положительно)

$D = 36 - 4\cdot3\cdot2 = 12;$

$x \notin \left(\frac{6-2\sqrt3}{2\cdot3}; \frac{6+2\sqrt3}{2\cdot3}\right) \Rightarrow \boxed{x \notin \left(1-\frac{\sqrt3}{3}; 1+\frac{\sqrt3}{3}\right)}$ ← ОДЗ

Так как значение второго корня всегда >0, то мы можем домножить обе части на сопряжённые, то есть на $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}$;

$$(3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1) = (1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$1-9x = (1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-9x=0 \Rightarrow x=\frac19 \\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \end{array}\right.$$

~~$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{6} = -\frac12$~~

~~$y_B = 3\cdot\frac14 - 3\cdot\frac12 + 1 = \frac14 = \left(\frac12\right)^2$~~

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$3x^2-6x+1 \le 0$ $\qquad$ $3x^2+3x \le 0;$

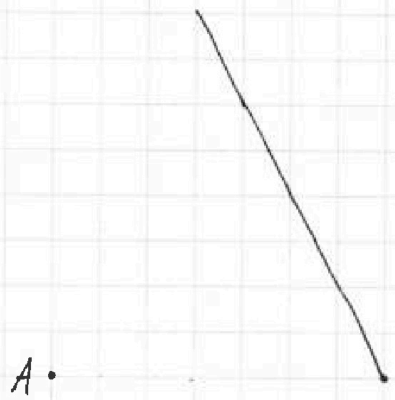
$x \in \left(1-\frac{\sqrt6}{3}; 1+\frac{\sqrt6}{3}\right)$ $\qquad$ $x^2+x \le 0;\ x \in (-1;0)$

$1-\frac{\sqrt6}{3} > 0 \Rightarrow x \in \varnothing$; Остаётся единственный корень $x=\frac79$; $\frac79 < 1-\frac{\sqrt3}{3}$, так как $-\frac89 < -\frac{\sqrt3}{3}$, так как $(8)^2 = 64 > 27 = (\sqrt3\cdot3)^2$

Ответ: $x = \frac79$

Возьмём заданную A. Тогда возможное ГМТ точки B имеет вид прямой с наклоном −2.

$$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$$



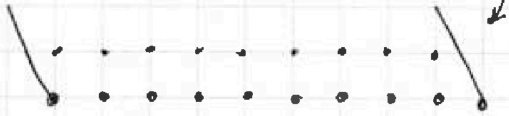
Точка A, у которой есть хоть одна пара B лежит не выше прямой $y=-2x+18$ (подобрал по крайней точке ~~A~~ $A(9;0)$; Все прямые с уклоном −2 пересекают одинаковое количество точек в параллелограме, т.к. верхняя и нижняя сторона параллелограма параллельны оси Ox, а боковые — прямой $y=-2x$, прямые с таким уклоном всегда пересекают $\frac{h}{2}+1$ точек (h − высота) $=\frac{26}{2}+1=14$;

~~Всего положений A~~ ~~всего~~

~~A может лежать на прямых y~~

~~На~~ при $y_1\in[2n;2n+1]$ ~~всегда~~ всего положений точки $A=10+(10-1)=19$, на $y_1=26\to 10$ точек;

}19 точек $\quad 13\cdot19+10=247+10=257$



Для каждой A ровно 13 вариантов B →
ответ равен $13\cdot257=3341$

Ответ: 3341

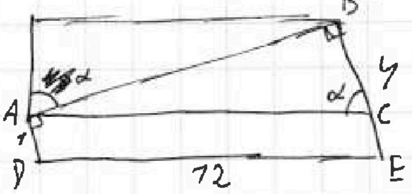
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и она тоже является ответом системы.

Построим 2 случая (D, E – центры окружностей)

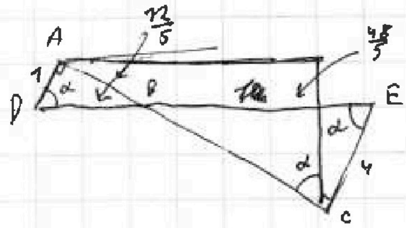


$tg\alpha = a$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$; $AB^2 + 3^2 = 12^2$;

$AB = \sqrt{144-9} = 3\sqrt{15}$; $tg\alpha = \frac{3\sqrt{15}}{3}$,

$a = \pm\sqrt{15}$



$DB = 12 \cdot \frac{1}{5}$; $BE = 12 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$;

$AB^2 = DB^2 - DA^2 = \frac{144}{25} - 1 = \frac{119}{25}$,

$AB = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $tg\alpha = \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$,

Получаем $a = \left\{\pm\sqrt{15};\ \pm\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

Ответ: $a = \left\{\sqrt{15};\ -\sqrt{15};\ \frac{\sqrt{119}}{5},\ -\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

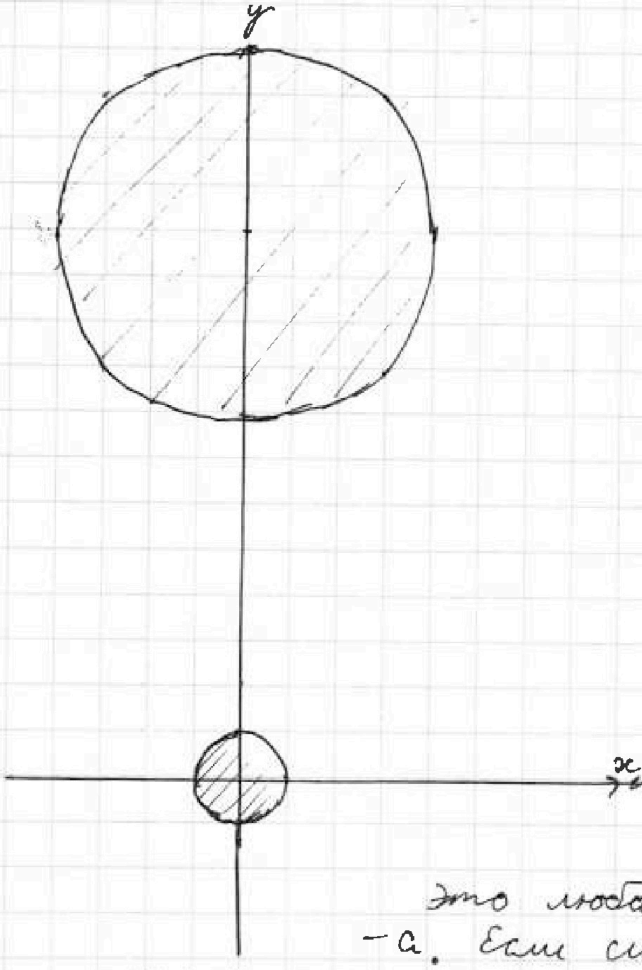
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Рас~~
Задача №6

Рассмотрим выражение $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0$, а точнее фигуры в скобках; ~~первая~~ обе скобки — формула кругов с координатами $(0;0)$ и $(0;12)$ и радиусами $\sqrt{1}=1$ и $\sqrt{16}=4$ соотвественно.



Круги не пересекаются, так что мы можем изобразить начальное выражение как множество точек, лежащих в ~~кругах~~ внутри окружностей и на окружностях.

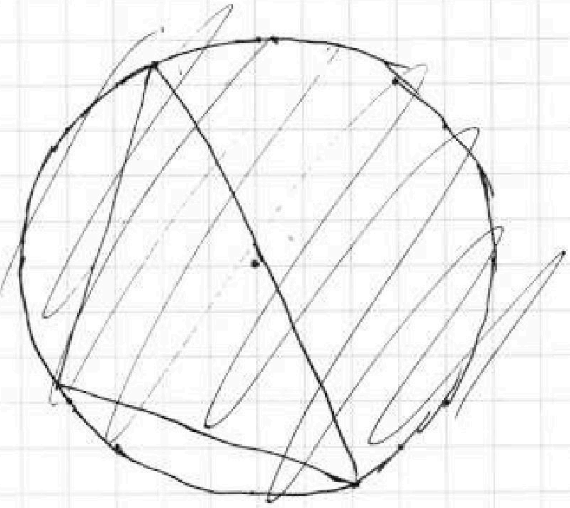
Тем временем $ax+y-8b=0$ — формула прямой ~~углом~~ $y=-ax+8b$, с наклоном $-a$. Т.к. b может принимать любые значения, то для заданного a это любая прямая с углом наклона $-a$. Если система имеет 2 решения, то прямая — общая касательная двух окружностей, ~~это~~ так как рисунок симметричный, то для ответа a у ~~касательная~~ касательной с углом наклоном $-a$ есть пара — симметричная касательная с наклоном a,

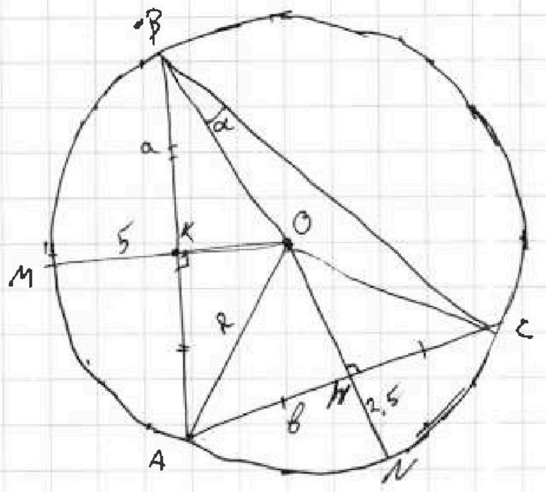
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$BK = AK;\ AH = HC;$

$MK = 5;\ NH = 2{,}5;$ ~~$\angle BOC = \alpha$~~; $BK = a;\ AH = б;$

$\angle OBC = \alpha;$

Решение:

$$\begin{cases} AO^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = (R-5)^2 + a^2 \\ AO^2 = AK^2 + KO^2 \Rightarrow R^2 = (R-2{,}5)^2 + б^2 \\ \cancel{\frac{2б}{2\sin(\alpha+}} \\ \frac{AC}{2\sin B} = R \\ \frac{BA}{2\sin C} = R \end{cases}$$

$^{*}\angle B = \alpha + \arccos\left(\frac{a}{R}\right)$

$^{*}\angle C = \alpha + \arccos\left(\frac{б}{R}\right)$

$^{*}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

Система из 4 неизвестных (α, R, a, $б$) с 4 уравнениями решается

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

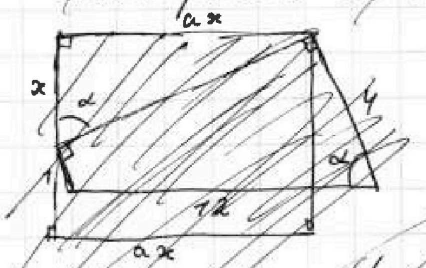
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~и она тоже является ответом системы.~~

~~Построим 2 случая~~

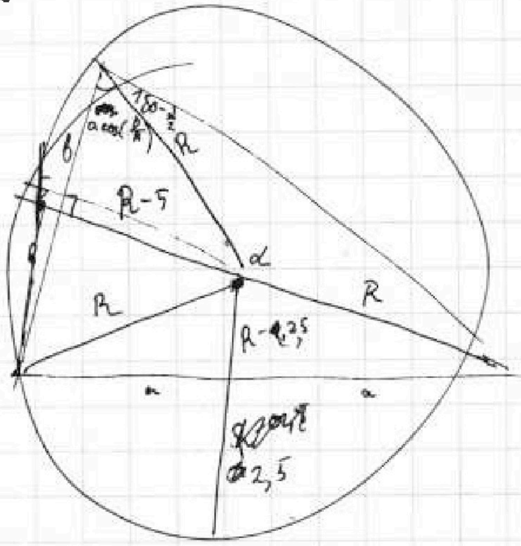


~~$tg\alpha = a$; $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1^2+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1^2+a}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+a^2}}$~~

~~$\begin{cases} x = 4\sin\alpha - 1\sin\alpha = 3\sin\alpha = \frac{3a}{\sqrt{1^2+a}}; \\ ax = 12 - (4\cos\alpha + 1\cos\alpha = 12 - 3\cos\alpha = 12 - \frac{3}{\sqrt{1^2+a^2}}; \end{cases}$~~

~~$\Downarrow$ $x \cdot a = ax$~~

~~$\frac{3a^2}{\sqrt{1^2+a}}$~~



$15^2 = 225$

$16^2 = 256$

$17^2 = 289$

$99^2 = 121 \cdot 81$

121

$\times 968$

9801

98

$\times 98$

$(100^2 - 99^2) = 199 \cdot 1$

$2 \cdot 198 = 496$

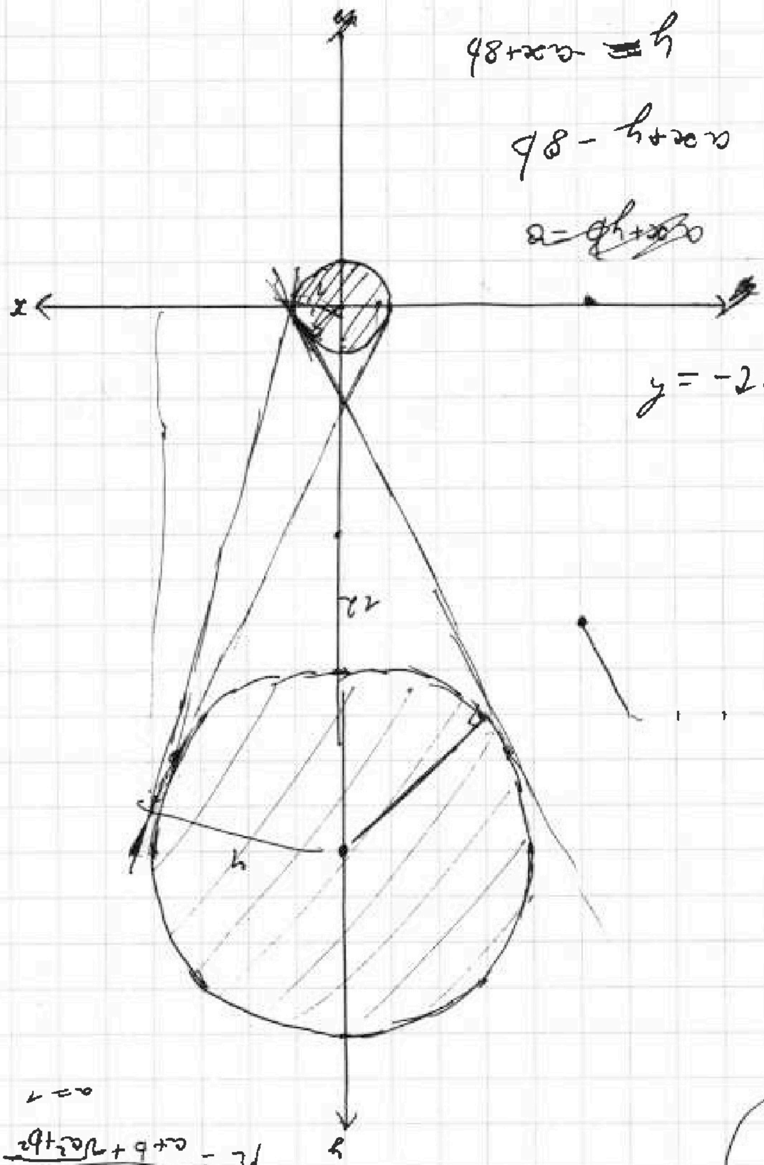
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$x^2+y^2=1$~~



$98+x^2 = h$

$98 - h + x^2$

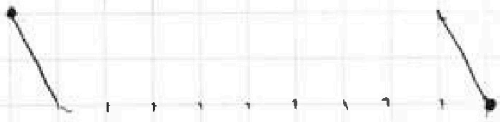
$y = -2x$

$2570 +$

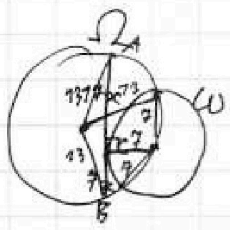
$+257 \cdot 3 =$

$= 2570 + 771 =$

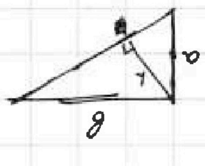
$= 3341$



$13 \cdot 20 - 13 = 260 - 13 = 247$



$S = pr$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{15}7^{11}$

$bc : 2^{17}7^{18}$

$ac : 2^{23}7^{39}$

$a_1 + b_1 \geq 15$

$b_1 + c_1 \geq 17$

$a_1 + c_1 \geq 23$

$a_1 + b_1 + c_1 = ?$

$\frac{23+17+15+1}{2} = 28$

$a+b \,\vdots\, m$

$(a+b)^2 - 9ab \,\vdots\, m \Rightarrow 9ab \,\vdots\, m$, $a+b \,\vdots\, m$

$m = 9$

$a+b+c = 27{,}5$

$a_1 - b_1 = 6$; $b_1 = 5$; $a_1 = 10{,}5$

$a_1 + b_1 = 15$; $c_1 =$

$a_2 - b_2 = 21$

$a_2 + b_2 \geq 11$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$

$a_2 + 2b_2 + c_2 \geq 29$

$c_2 + a_2 \geq 39$

$\frac{4+5}{16+25-7\cdot 20} = \frac{4+5}{41-140} = \frac{4+5}{-99}$

$4756 = 2378 \cdot 2 =$

$= 1189$

$3x^2$

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 114$

361

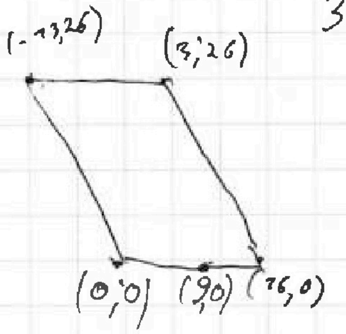
$\times 112$

$\times 92$

289

98

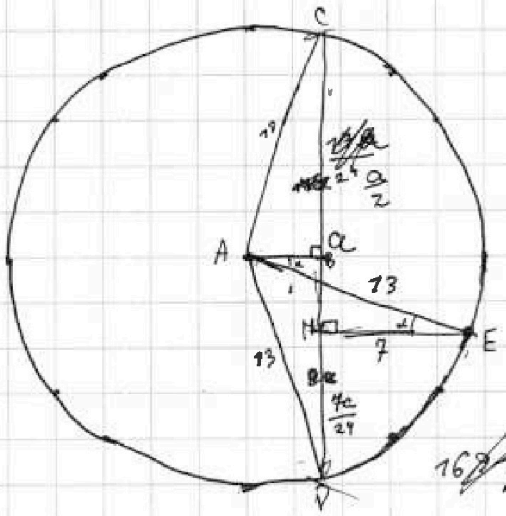
2658



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB^2 = 13^2 - \left(\frac{17a}{24}\right)^2$$

$$BH = \frac{5}{24}a$$

$7 +$

$36 \cdot 4 = 120 + 24 = 144$

$25 - 144$

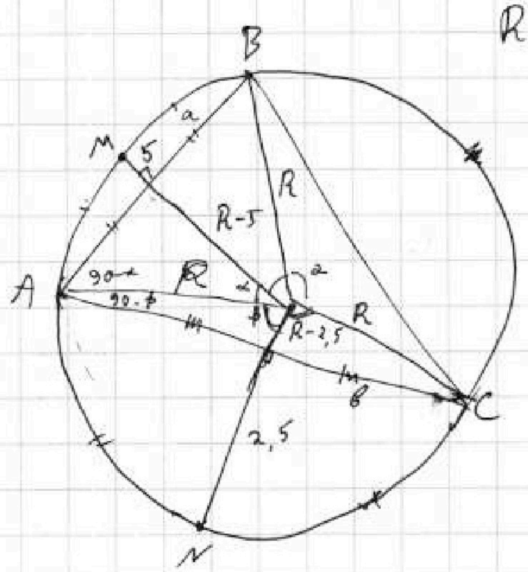
$$\frac{36 \cdot 7}{17}$$

$OD =$

$$\left(\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{7}\right)^2 = 13$$

$$R = \frac{4abc}{S}$$

$$(R-5)^2 + a^2 = R^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!