



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

Решение:  $abc : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37} (1)$ . Пусть  $\alpha$  - степень

вхождения 2 в  $a$ ,  $\beta$  - степень вхождения 2 в  $b$ ,

$\gamma$  - степень вхождения 2 в  $c$ . Тогда  $\alpha + \beta \geq 14$

( $ab : 2^{14}$ ),  $\beta + \gamma \geq 17$  ( $bc : 2^{17}$ ),  $\alpha + \gamma \geq 20$  ( $ac : 2^{20}$ ).

Следовательно,  $2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 14 + 17 + 20 = 51 \Rightarrow$

$\alpha + \beta + \gamma \geq 26$ . То есть  $abc : 2^{26} (2)$ . Из (1) и

(2) имеем, что  $abc : 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

Пример:  $a = 2^9 \cdot 7^{20}$ ,  $b = 2^6$ ,  $c = 2^{11} \cdot 7^{17}$ .  $ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^7 = 2^8 \cdot 7^{20}$ ,

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} = 7^{17}$ ,  $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} = 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Из условия следует, что  $(a, b) = 1$ . А  
требуется найти максимально возможное  
значение  $(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$ . Имеем  $(a+b,$   
 $a^2 - 6ab + b^2) = (a+b, a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2) = (a+b,$   
 $-8ab) = (a+b, 8ab)$ . Так как  $(a+b, a) = (a, b) = 1$   
и  $(a+b, b) = (a, b) = 1$ , то  $(a+b, 8ab) = (a+b, 8)$ .  
Тогда понятно, что  $m \leq (a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$   
 $= (a+b, 8) \leq 8$ . Пример:  $a=7, b=1$ . Тогда  $a+b=8$ ,  
а  $a^2 - 6ab + b^2 = 7^2 - 6 \cdot 7 + 1 = 7 + 1 = 8$  — оба числа  
делятся на 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

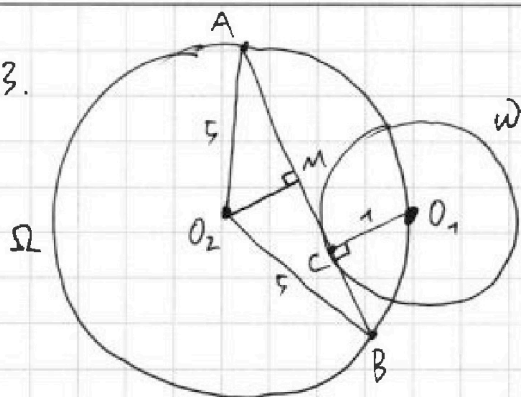
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 3.



Пусть  $O_1$  - центр  $\omega$ ,  
 $O_2$  - центр  $\Omega$ ,  $M$  - середина  $AB$ .  $O_2AB$  - равнобедренный  $\Rightarrow O_2M$  - высота, медиана и биссектриса в нем, Пусть  $\angle AO_2M = \angle MO_2B = \lambda$ . Ясно, что  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от  $AB \Rightarrow \angle AO_1B = 180 - \lambda$ . Кроме этого,  $O_1C \perp AB$ , т.к.  $AB$  касается  $\omega$  в точке  $C$ , а  $O_1$  - центр  $\omega$ .

Пусть  $BC = x$ . Тогда  $AC = 7x$ ,  $AB = 8x$ ,  $AM = MB = 4x$ .

$$AO_1 = \sqrt{AC^2 + CO_1^2} = \sqrt{49x^2 + 1}, \quad O_1B = \sqrt{BC^2 + O_1C^2} = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \cos \angle AO_1C = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}, \quad \sin \angle AO_1C = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}, \quad \cos \angle CO_1B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \sin \angle CO_1B = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Тогда  $\sin \angle AO_1B = \sin(\angle AO_1C + \angle CO_1B) =$

$$\sin \angle AO_1C \cdot \cos \angle CO_1B + \sin \angle CO_1B \cdot \cos \angle AO_1C = \frac{7x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} = \frac{7x + x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \Rightarrow \sin \lambda = \sin(180 - \lambda) = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}}$$

Кроме этого,  $\sin \lambda = \sin \angle AO_2M = \frac{AM}{O_2A} = \frac{4x}{5}$ . Следовательно

$$\text{но, } \frac{4x}{5} = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1}} \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1} = 10 \Rightarrow (x^2 + 1)$$

$$(49x^2 + 1) = 100 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot$$

$$(x^2 + \frac{99}{49}) = 0 \stackrel{x^2 + \frac{99}{49} > 0}{\Rightarrow} x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 1. \text{ Тогда } AB = 8x = 8. \text{ Ответ: } 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sim 4. \text{ OДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ x^2 + (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty).$$

Решение: делим обе части уравнения на

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ . Получим:

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow 2 = 7x \Rightarrow x = \frac{2}{7}. \quad \frac{2}{7} < 1 - \text{подходит по ОДЗ}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = 1$$

$$4x^2 - 7x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -4x^2 + 3x - 3$$

При условии, что  $-4x^2 + 3x - 3 \geq 0$  (1) возводим  
обе части в квадрат:

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 + 24x^2 - 18x$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

Условие (1) равносильно,  $x \in \left[ \frac{-3 + \sqrt{57}}{-8}; \frac{-3 - \sqrt{57}}{-8} \right]$ .

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} < \frac{22 + 4\sqrt{64}}{82} = \frac{54}{82} < 1 = \frac{3+5}{8} = \frac{3 + \sqrt{25}}{8} < \frac{3 + \sqrt{57}}{8}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} > 0 = \frac{-3+3}{-8} > \frac{-3 + \sqrt{57}}{-8}$$

корень  $\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82}$  подходит и по  $ODZ$  и по условию 1.

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} < \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} < 1 < \frac{3 + \sqrt{57}}{8}$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} > \frac{22 - 4\sqrt{64}}{82} = \frac{22 - 32}{82} = \frac{-10}{82} > \frac{-10}{80} = -\frac{1}{8} > -\frac{4}{8} =$$

$$= \frac{3-7}{8} > \frac{3 - \sqrt{57}}{8}$$

корень  $\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$  также подходит по  $ODZ$  и условию 1.

Ответ:  $\frac{2}{7}, \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82}, \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$

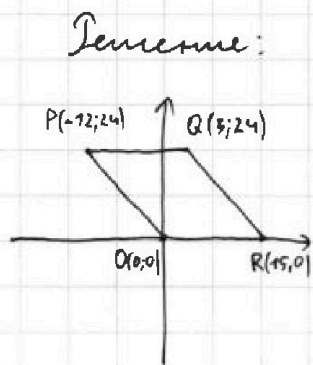
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение: Зафиксируем точку A с координатами  $(x_1; y_1)$  ( $x_1, y_1$  - целые) внутри параллелограмма.

Рассмотрим одну из точек B( $x_2; y_2$ ), которая образует с A искомого пару.

Тогда  $y_2 = -2x_2 + (12 + 2x_1 + y_1)$ , т.е.

B лежит на прямой, заданной уравнением

$y = -2x + (12 + 2x_1 + y_1)$ . Пусть  $t = 12 + 2x_1 + y_1$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )

Заметим, что уравнение прямой PO:  $y = -2x$ ,

уравнение прямой QR:  $y = -2x + 30$ . Поэтому,

t - целое от 0 до 30. При этом, если t - четно,

то пару с A образуют 13 точек (с ординатами

0, 2, ..., 24), иначе 12 точек (с ординатами 1, 3, ..., 23).

~~Решение~~ Ответ. Найдем сколько точек A удо-

влетают  $12 + 2x_1 + y_1 = t$ . Тогда эти точки

лежат на прямой  $y = -2x + t - 12$ . Как ранее

$t - 12 \in [0; 30]$ . Поэтому t на самом деле прини-

мает целые значения от 12 до <sup>30</sup> 24. Из них

<sup>10</sup> четных и <sup>9</sup> нечетных. При этом t-12

удовлетворяют 13 точек (с ординатами 0, 2,

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

..., 24). При этом тогда ~~каждый~~  $t$ -ично и  $y$   
них в паре по 13 точек. Всего:  $10 \cdot 13 \cdot 13$  пар.

При нечетном  $t - 12$  удовлетворяют 12 точек (с  
ординатами 1, 3, ..., 23). При этом тогда  $t$ -  
ично и  $y$  них в паре по 12 точек: Всего  
пар:  $9 \cdot 12 \cdot 12$ . Тогда ~~еще~~ удвоенное число пар:

(пара  $A, B$  считается как  $A, B$  так и как  $B, A$ )

$$10 \cdot 13 \cdot 13 + 9 \cdot 12 \cdot 12. \text{ А искомое: } \frac{10 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12^2}{2} =$$

$$= 5 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12 \cdot 6 = 5 \cdot 169 + 108 \cdot 6 = 1493.$$

Ответ: 1493.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

УЧ №6. На самом деле требуется найти  
угловые коэффициенты уравнений касатель-  
ных к окружности с центром  $(-8, 0)$  и  
радиуса 2 и центром  $(0, 0)$  радиуса 2.

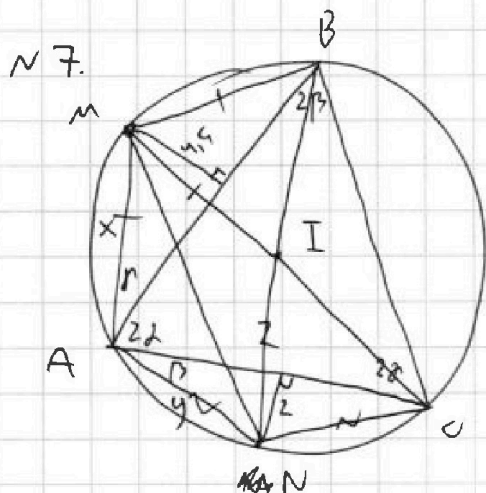
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $I$  - центр, по  
лемме о трезубце:

$$BM = MA = MI = x, NA = NI =$$

$$= NC = y. \text{ Пусть } \angle ABC = 2\beta,$$

$$\angle BAC = 2\alpha, \angle ACB = 2\gamma. \text{ Тогда}$$

$$\angle MAB = \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{4,5}{x}.$$

Также  $\angle CAN = \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{z}{y}$ . По т. синусов

$$\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{AN}{\sin \angle ABN} \Leftrightarrow \frac{x}{\sin \gamma} = \frac{y}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4,5} = \frac{y^2}{z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{4,5}{z} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x = 3y. M, I, C \text{ лежат}$$

на биссектрисе  $\angle C$ ,  $N, I, B$  лежат на биссектрисе  $\angle B$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (-4x^2 + 3x - 3)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 18x + 24x^2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) =$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 16x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 18x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$22^2 - 4 \cdot 41 \cdot 6 = 22^2 - 41 \cdot 24 < 0$$

$$22^2 + 12 \cdot 41$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$x_1, y_1$

$$y_2 = 2x_2 + \text{const}$$

$$30 \geq 12 - 2x + y \geq 0$$

$$2x \geq y - 18$$

$$2x \leq 12 + y$$

$x_1, y_1, x_2, y_2$

$$\begin{aligned} 2x_2 + y_2 &= 12 + 2x_1 + y_1 \\ y_2 &= -2x_2 + (12 + 2x_1 + y_1) \end{aligned}$$

от 0 до 30

$$12 + 2x + y = b \quad b \in [0; 30]$$

$$y = -2x + (b - 12)$$

$$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3 = \frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49} > 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$22 + 4\sqrt{61} \leq 81$$

$$4\sqrt{61} \leq 59$$

$$61 \cdot 16 \leq 59 \cdot 59$$

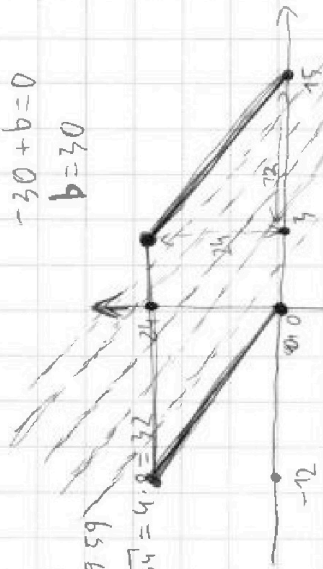
$$4\sqrt{61} < 4\sqrt{64} = 4 \cdot 8 = 32$$

$0 \leq b - 12 \leq 30$  по условию  
 $12 \leq b \leq 30$   
19 значений

$$-2x + b$$

$$-30 + b = 0$$

$$b = 30$$



на картинке 25 точек

