МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

$ab \vdots 2^{14}\, 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\, 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc \vdots ab, \quad abc \vdots bc, \quad abc \vdots ac \Rightarrow abc \vdots \text{НОК}(ab, bc, ac)$

$abc \vdots 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$

Предположим, что $abc = 2^{20}\, 7^{37}$

Пусть $a = 2^{\alpha} \cdot \ldots$, $b = 2^{\beta} \ldots$, $c = 2^{\gamma} \ldots$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 14 \\ \beta + \gamma \geq 17 \\ \alpha + \gamma \geq 20 \\ \alpha + \beta + \gamma = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 41 \\ \alpha+\beta+\gamma = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma \geq 20{,}5 \\ \alpha+\beta+\gamma = 20 \end{cases}$$

— противоречие

Попробуем следующее число $\vdots\, 2^{20}\, 7^{37}$ — это число $2^{21}\, 7^{37}$

Достаточно привести пример a, b и c таких, что

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}\, 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}\, 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}\, 7^{37} \\ abc = 2^{21}\, 7^{37} \end{cases}$$

Пример: $a = 2^{8}\, 7^{10}$
$b = 2^{6}\, 7^{0}$
$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$

Ответ: $2^{21}\, 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a, b \in N$

$НОД(a+b, |a^2-6ab+b^2|)_{max}$ - ?

$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab \;\vdots\; m$

$a+b \;\vdots\; m$

$\Rightarrow 8ab \;\vdots\; m$ (если первое слагаемое делится на m, ~~то~~ а сумма делится на m, то и второе слагаемое делится на m)

$\begin{cases} 8ab \;\vdots\; m \\ a+b \;\vdots\; m \end{cases}$

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow НОД(a,b) = 1$

$НОД(a,b) = НОД(a+b, b) = НОД(a+b, ab) = 1$

У ab и $a+b$ нет ни одного общего множителя больше ед. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} ab \not\vdots\, m \\ a+b \not\vdots\, m \end{array} \right.$

$8 \;\vdots\; m \Rightarrow m_{max} = 8$

Пример: $a = 3$, $b = 5$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-6\cdot3\cdot5+25} = -\frac{8}{56}\,7 \quad m=8$

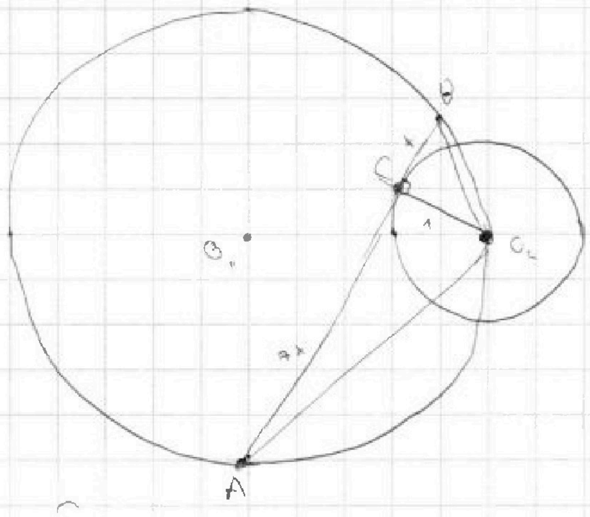
Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано:
$\Omega(O_1, R=5)$
$\omega(O_2, r=1)$
AB - хорда Ω
AB кас. ω в т. C

Найти: AB

Решение:
Пусть $AB = 8\cdot x$
Тогда $BC = x$ $AC = 7x$
По т. Пифагора ($\angle BCO_2 = \angle ACO_2$, т.к. AB - кас.)
$BO_2 = \sqrt{x^2+1}$
$AO_2 = \sqrt{49x^2+1}$

$\sin BAO_2 = \sin CAO_2 = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

По т. синусов
$2\cdot R = \frac{BO_2}{\sin BAO_2}$

$10 = \sqrt{49x^2+1}\sqrt{x^2+1}$

$(49x^2+1)(x^2+1) = 100$
Пусть $t = x^2 > 0$
$(49t+1)(t+1) = 100$
$49t^2 + 50t - 99 = 0$
$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{99}{49} \text{ - не подх.} \end{array}\right.$
$x^2 = 1$
$x = 1$
$AB = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \qquad ОДЗ: \begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\infty,\tfrac{1}{2}\right]\cup[3;\infty)$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1} \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+3=2x^2+2x+1 \\ \begin{cases} \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \\ 2-7x=\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x=2 \\ 2\sqrt{2x^2-5x+3}=3-7x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ 8x^2-20x+12=49x^2-42x+9 \end{array}\right.$$

2) $41x^2-22x-3=0$

$$D_1=121+123=244=4\cdot 61$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41} \\ x=\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41} \text{ — не уд. ОДЗ} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41} \\ x=\dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41};\ \dfrac{2}{7}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$, $R(15;0)$

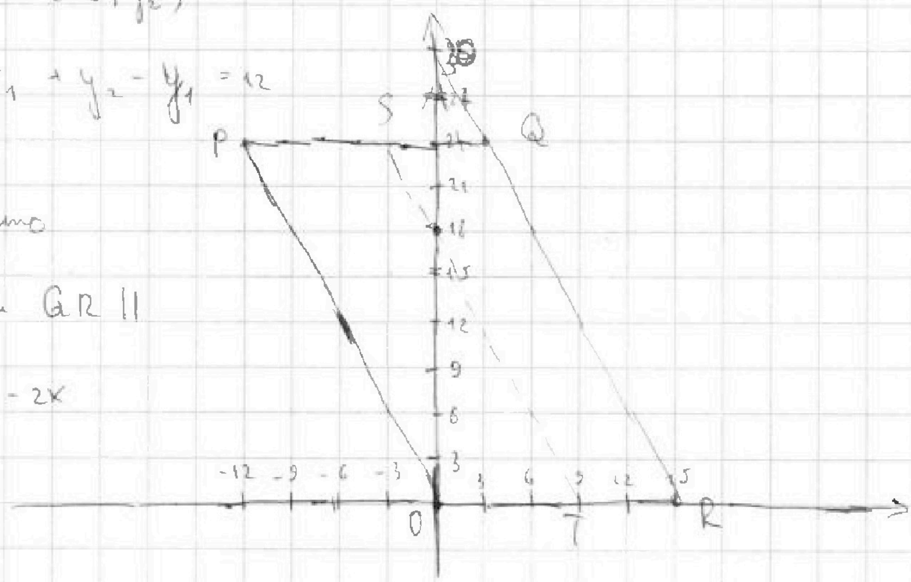
$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

Заметим, что

прямые PO и $QR \parallel$

прямой $y = -2x$



Пусть точка A фиксирована

Тогда все возможные точки B лежат на прямой

$y = 12 + 2x_1 + y_1 - 2x \parallel y = -2x \parallel PO \parallel QR$

Чтобы точка B лежала внутри PQRO, требуется

$0 \le 12 + 2x_1 + y_1 \le 30$ (на каждой прямой будет находиться $\frac{24}{2} + 1 = 13$ точек B, удовлетв. условию)

$-12 - 2x_1 \le y_1 \le 18 - 2x_1$

Возможные точки A лежат в п-ме PSTO

Таких точек $\left(\frac{24}{2} + 1\right) \cdot 10 + \cancel{120}\ 12 \cdot 8 =$

$= 130 + 96 = 226$

Значит, всего пар $226 \cdot 13 = \cancel{1690}$

$$\begin{array}{r} 226 \\ \times\ 13 \\ \hline 678 \\ +\ 226\ \ \\ \hline 2938 \end{array}$$

Ответ: ~~1690~~ 2938

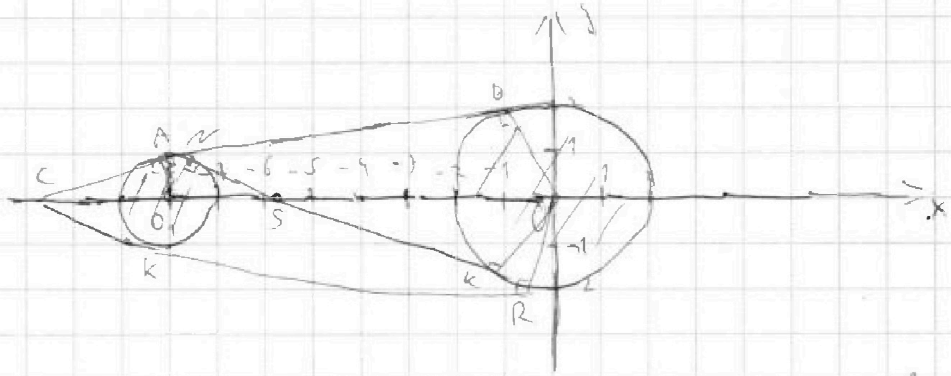
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$ 2 решения



Система имеет 2 решения => пр. $y = ax - 10b$ кас. окружностей

Рассмотрим 1 касательную AB, пр. $AB \cap Ox = C$

AO_1 - ср. л. $\triangle CBO \Rightarrow CO_1 = O_1O = 8$

$AC = \sqrt{8^2 - 1} = 3\sqrt{7}$

$a_1 = tg\, ACO_1 = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$a_2 = -a_1 = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$ (следует из равенства $\triangle CBO$ и $\triangle CRO$)

Рассмотрим общую внутреннюю касательную NK

$NK \cap Ox = S$

$\triangle O_1NS \sim \triangle OKS$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow SO = \frac{2}{3} O_1O = \frac{16}{3}$

По т. Пиф.

$SK = \sqrt{\frac{256}{9} - 2} = \frac{\sqrt{238}}{3}$

$a_3 = -tg\, OSK = \frac{6}{\sqrt{238}}$

$a_4 = -a_3 = -\frac{6}{\sqrt{238}}$

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{238}}, -\frac{6}{\sqrt{238}} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a_1 = tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{64-4}} = \frac{1}{2\sqrt{15}}$

$a_2 = -tg\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{15}}$

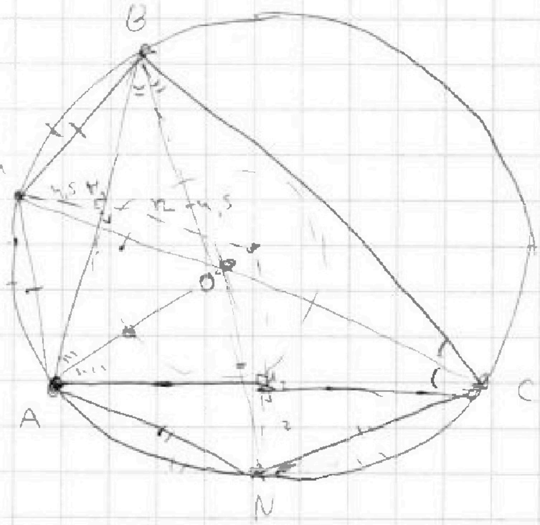
$a_3 = -tg\,\beta = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{256}{9} - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{238}{9}}} =$

$= \frac{6}{\sqrt{238}}$

$a_4 = \frac{6}{\sqrt{238}}$

! перепроверить.

№7.



$AO - ?$

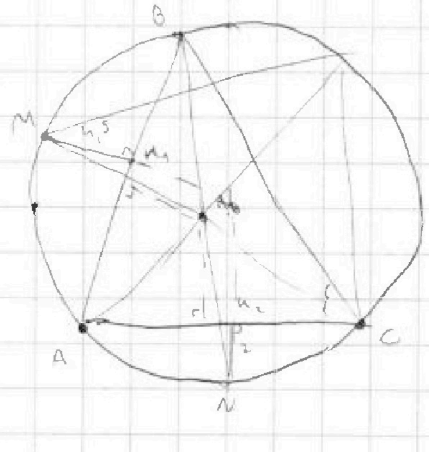
$AH_1^2 = (2R-4,5)\,4,5$

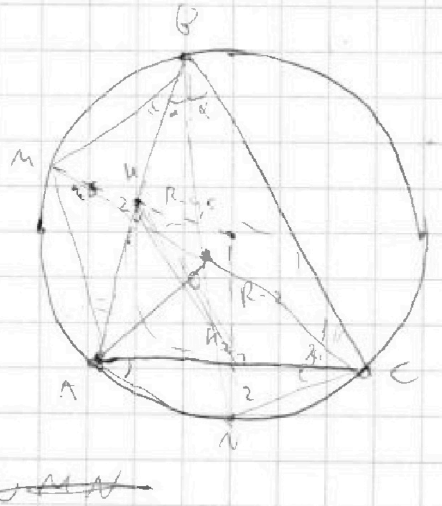
$AH_2^2 = (2R-2)\,2$

~~$R^2 - 4R \dots$~~

$AB = 2AH = \sqrt{(2R-4,5)\,4,5}$

$H_2C = \sqrt{(2R-2)\cdot 2} = 2\sqrt{R-1}$





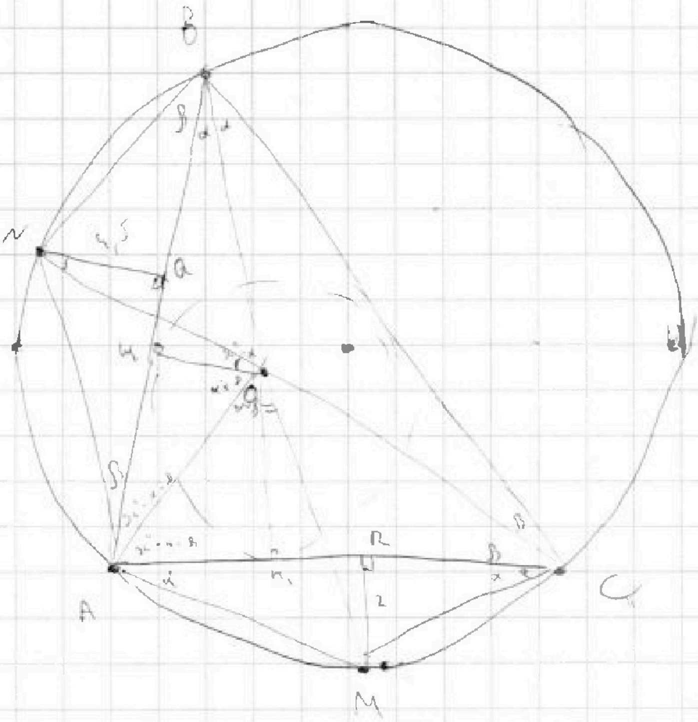
~~UMN~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

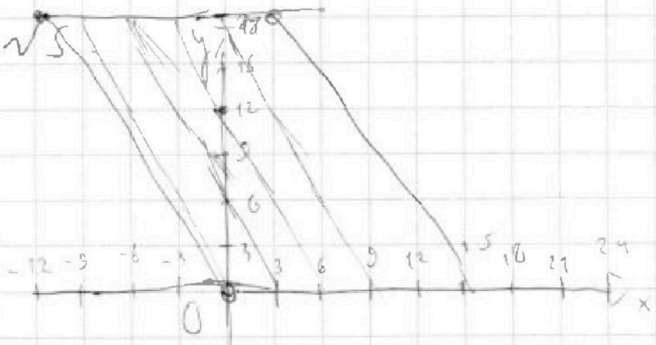
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



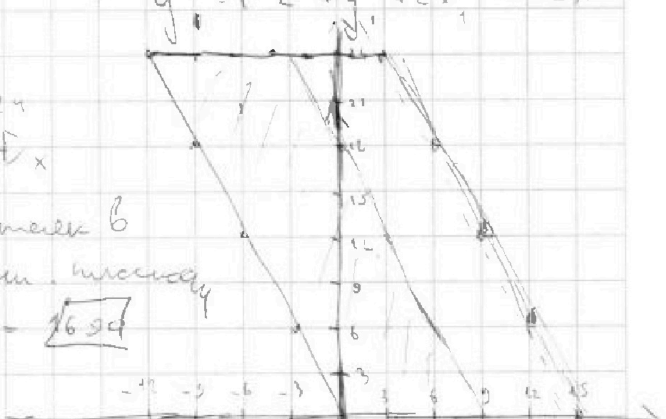
АО = ?

$AO = \frac{H_1O}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{H_1O}{\cos(\alpha+\beta)}$



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$y_1 = 12 + y + 2x_1 - 2x$



$(y_1 + 2x_1)^{12+}_{min} = 0$

$(y_1 + 2x_1)^{12+}_{max} = 30$

13 · 10 - точек в заштрих. плоскости

$13 \cdot 10 \cdot 13 = \boxed{1690}$

$y_1 + 2x_{1\,min} = -12$

$(y_1 + 2x)_{max} = 18$

$-12 \le y + 2x \le 18$

$-12 - 2x \le y \le 18 - 2x$

Каждой точке из этой плоскости соответствует ~~прямых~~ параллелограммов

1 прямая — 13 целых точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab \vdots 2^{14} 7^{10}$

$bc \vdots 2^{14} 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

Оценка.

$\Rightarrow abc \vdots$ НОК(ab, bc, ac)

$(abc)_{min} =$ НОК$(ab, bc, ac) =$

$= 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\begin{cases} \alpha+\beta=14 \\ \beta+\gamma=17 \\ \gamma+\alpha=20 \end{cases}$ $2(\alpha+\beta+\gamma)=51$ - невозможно

Пример. $a=$

можем про 7 также открыть и оставить m. пример

Значит $abc = 2^{21} 7^{37}$

$\begin{cases} \alpha+\beta=14 \\ \beta+\gamma=18 \\ \gamma+\alpha=20 \end{cases}$

$\alpha+\beta+\gamma=32$

$\alpha+\beta+\gamma=26$

$\begin{cases} \gamma=12 \\ \alpha=8 \\ \beta=6 \end{cases}$ - для 2

$\begin{cases} \alpha+\beta=10 \\ \beta+\gamma=17 \\ \gamma+\alpha=37 \end{cases}$ - для 7

$\cancel{\alpha}+\beta+\gamma=32$

$\gamma=22$

$\beta=-5$ - не уд.

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=10 \\ \beta+\gamma=27 \\ \gamma+\alpha=37 \end{cases}$

$\alpha+\beta+\gamma=37$

$\gamma=27$

$\beta=0$

$\alpha=10$

$\Rightarrow abc_{min} = 2^{21} \cdot 7^{37}$

№2. $\frac{a}{b}$ - несократимая, $a \in N$, $b \in N$ НОД$(a, b)=1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$(a+b) \vdots m$

$a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$\Rightarrow$ $(a+b) \vdots m$

$(a+b)^2 - 8ab \vdots m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b \vdots m \\ 8ab \vdots m \end{cases}$

~~Пусть $a = p^{\alpha} \ldots$, $b = p^{\beta} \ldots$ $\alpha \geq \beta$~~

$\boxed{m=8}$

$\boxed{\text{НОД}(ab, a+b) = 1}$

Пример

$a=5$; $b=3$

$5+3=8$ $\vdots 8$

$25 - 6 \cdot 5 \cdot 3 + 9 = 34 - 90 = -56$ $\vdots 8$

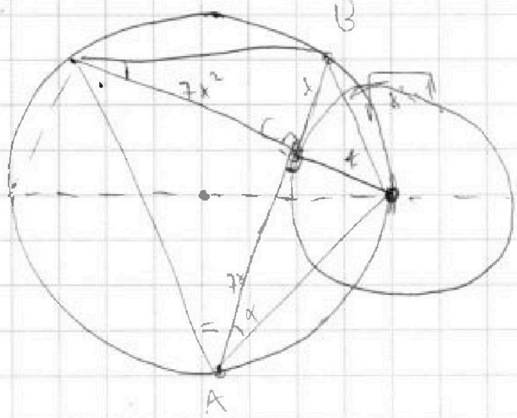
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.



$r = 1$

$R = 5$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

$\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{49x^2+1}$

$2R = 10 =$

$100 = (x^2+1)(49x^2+1)$

$AB = 8$

$AB - ?$

Замена $t = x^2 > 0$

$100 = (t+1)(49t+1)$

$49t^2 + 50t - 99 = 0$

$t = 1$, $t_2 < 0$

№4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1\right) = 0$

1) $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \end{cases}$ $7x = 2$ $\boxed{x = \frac{2}{7}}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2 - 7x = \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3 - 7x$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 4(2x^2-5x+3) = 49x^2 - 42x + 9 \end{cases}$

$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$

$(2x-1)(x-3) \geq 0$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases}$

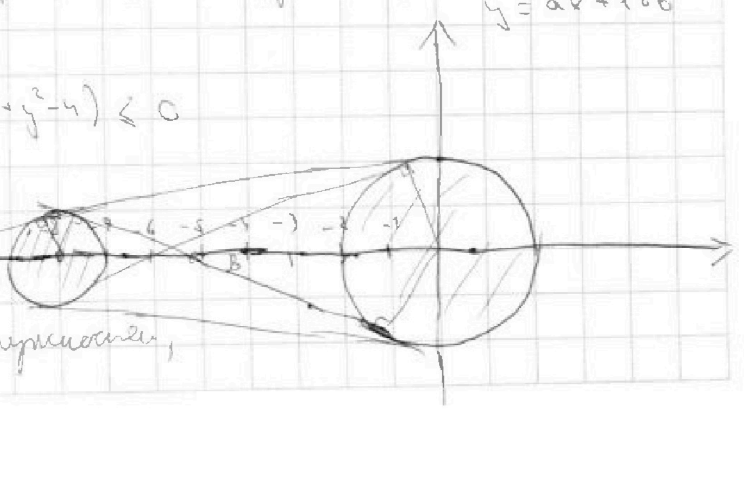
$D_1 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$

$x_1 = \boxed{\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}}$

$3 > x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{2}$ – не уд. ОДЗ

$y = ax + 10b$

№6. $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x-8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$



Чтобы система имела два решения графики ~~а~~ функций ~~их~~ ~~пересекать~~ касалась обоих окружностей, меньше прямые 4