



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc : ab, abc : bc, abc : ac \Rightarrow abc : \text{НОК}(ab, bc, ac)$$

$$abc : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Предположим, что  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$

Пусть  $a = 2^{\alpha} \dots$ ,  $b = 2^{\beta} \dots$ ,  $c = 2^{\gamma} \dots$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 14 \\ \beta + \gamma \geq 12 \\ \alpha + \gamma \geq 20 \\ \alpha + \beta + \gamma = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\alpha + \beta + \gamma) \geq 41 \\ \alpha + \beta + \gamma = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \geq 20,5 \\ \alpha + \beta + \gamma = 20 \end{cases}$$

- противоречие

Проверим следующее число  $2^{21} \cdot 7^{37}$  - это число  $2^{21} \cdot 7^{37}$

Достаточно привести пример  $a, b$  и  $c$  меньше, что

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \\ abc : 2^{21} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

Пример:  $a = 2^8 \cdot 7^{10}$   
 $b = 2^6 \cdot 7^0$   
 $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Сумма:  $2^{21} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$  - несократима,  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = ?$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab \quad ; m$$

$$a+b \quad ; m$$

$$\begin{cases} 8ab \quad ; m \\ a+b \quad ; m \end{cases}$$

$\Rightarrow 8ab \quad ; m$   
(если первое множитель делится на  $m$ , то и второе делится на  $m$ , но и второе множитель делится на  $m$ )

$\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a+b, b) = \text{НОД}(a+b, ab) = 1$$

$\exists ab$  и  $a+b$  нет ни одного общего множителя  $\Rightarrow$  только  $8$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \quad ; m \\ a+b \quad ; m \end{cases}$$

$$8 \quad ; m \Rightarrow m_{\max} = 8$$

Пример:  $a = 3, b = 5$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{50} \quad m=8$$

Ответ: 8.

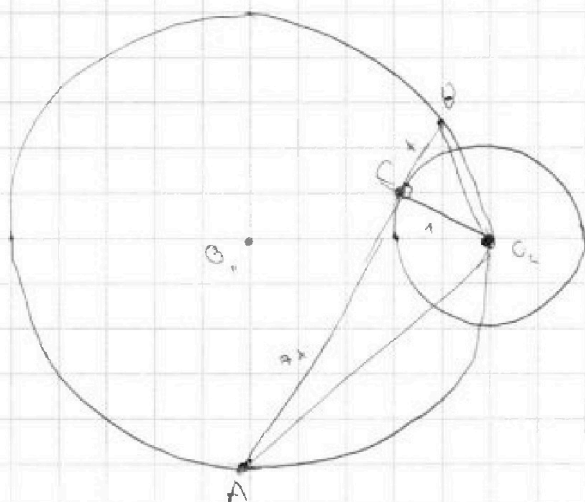
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  
 $\Omega(O_1, R=5)$

$\omega(O_2, r)$

AB - хорда  $\Omega$   
 AB кас.  $\omega$  в м. C

~~ОС~~

Найти: AB

Решение:

Пусть  $AB = 8x$

Пусть  $BC = x$ ,  $AC = 7x$

По т. Пифагора (  $\angle BCO_2 = \angle ACO_2$ , м. к. AB - кас.)

$$BO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$AO_2 = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$\sin \angle BAO_2 = \sin \angle CAO_2 = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

По т. синусов

$$2 \cdot R = \frac{BC}{\sin \angle BAO_2}$$

$$10 = \sqrt{49x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

Пусть  $t = x^2 > 0$

$$(49t + 1)(t + 1) = 100$$

$$49t^2 - 99t - 99 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{99}{49} \end{cases}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

$$AB = 8x = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{ODЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 & x \in (-\infty, \frac{3}{2}] \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \\ 2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 2 \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9 \end{cases}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D_1 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$\begin{cases} x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \quad \text{не ур. ODЗ}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}; \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0), P(-12;24), Q(3;24), R(15,0)$$

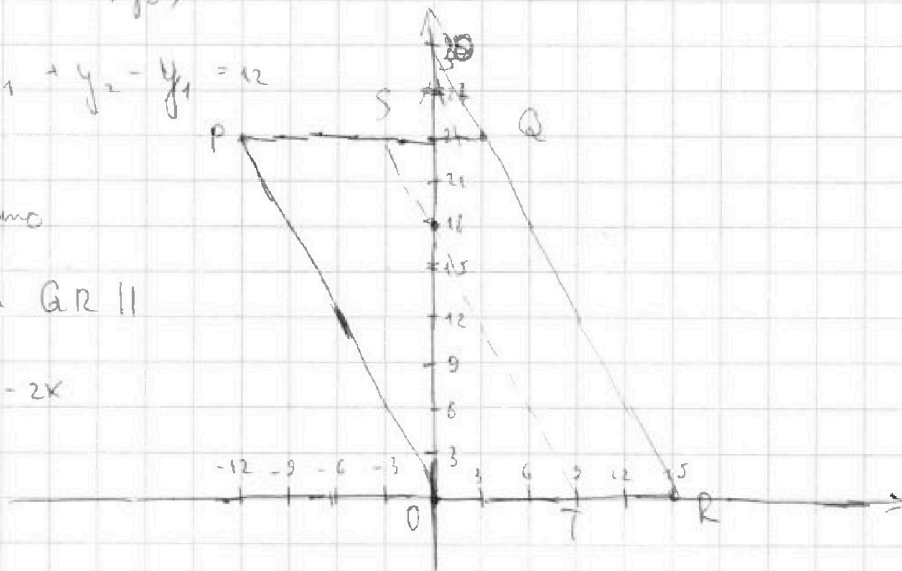
$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Заметим, что

прямые  $PO$  и  $QR \parallel$

$$\text{прямой } y = -2x$$



Пусть точка  $A$   
фиксирована

Тогда все возможные точки  $B$  лежат на прямой

$$y = 12 + 2x_1 + y_1 - 2x_2 \parallel y = -2x \parallel PO \parallel QR$$

Чтобы точка  $B$  лежала внутри  $PQR$ , требуется

$$0 \leq 12 + 2x_1 + y_1 \leq 30 \quad (\text{на каждой прямой будет находиться } \frac{24}{2} - 1 = 13 \text{ точек } B, \text{ учитывая границы})$$

$$-12 - 2x_1 \leq y_1 \leq 18 - 2x_1$$

Поэтому точка  $A$  лежит в  $n$ -ме  $PSTO$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом } \left(\frac{24}{2} + 1\right) \cdot 10 + 12 \cdot 8 &= 130 + 96 = 226 \\ &= 130 + 96 = 226 \end{aligned}$$

$$\text{Значит, всего пар } 226 \cdot 13 = 2938$$

$$\text{Ответ: } \del{1690} \quad 2938$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ \times 13 \\ \hline 678 \\ + 2260 \\ \hline 2938 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

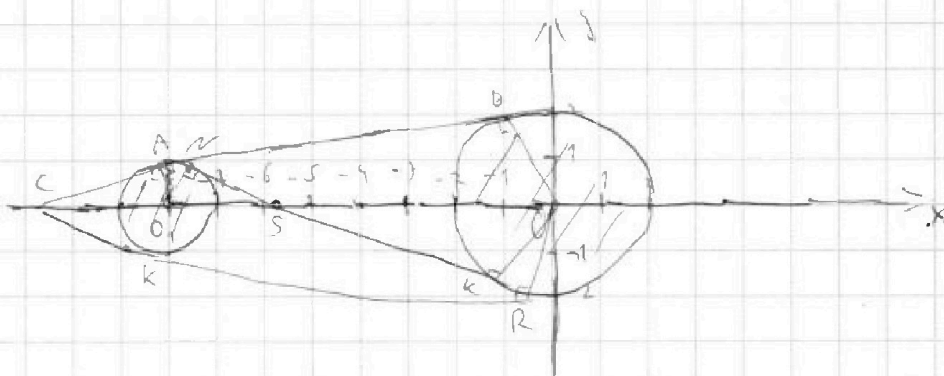


1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad \text{2 решения}$$



Система имеет 2 решения  $\Rightarrow$  пр.  $y = ax - 10b$  кас. окружностям

Тангенсы  $\perp$  радиусу  $AO_1$ , пр.  $AB \perp O_1C = C$

$$AO_1 \perp AC \Rightarrow CO_1 = O_1O = 8$$

$$AC = \sqrt{8^2 - 1} = 3\sqrt{7}$$

$$a_1 = \text{tg} \angle ACO_1 = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

$$a_2 = -a_1 = -\frac{1}{3\sqrt{7}} \quad (\text{случаи из равенства } \triangle CBO_1 \triangle CRO_1)$$

Тангенсы образуют внутреннего касательного  $NK$

$$NK \perp OK = S$$

$$\triangle O_1NS \sim \triangle OKS \quad (\text{по } \angle) \Rightarrow SO = \frac{2}{3} O_1O = \frac{16}{3}$$

$$SK = \sqrt{\frac{156}{9} - 2} = \frac{\sqrt{238}}{3}$$

$$a_3 = -\text{tg} \angle OSK = \frac{6}{\sqrt{238}}$$

$$a_4 = -a_3 = -\frac{6}{\sqrt{238}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{6}{\sqrt{238}}; -\frac{6}{\sqrt{238}} \right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{4-y}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$a_2 = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

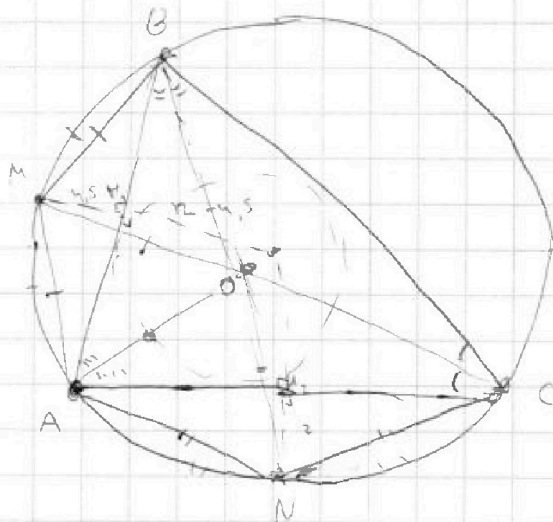
$$a_3 = -\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{250}{9} - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{238}{9}}} =$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{238}} \neq$$

$$a_4 = \frac{6}{\sqrt{238}}$$

! перепроверить.

N7.



$\Delta O - ?$

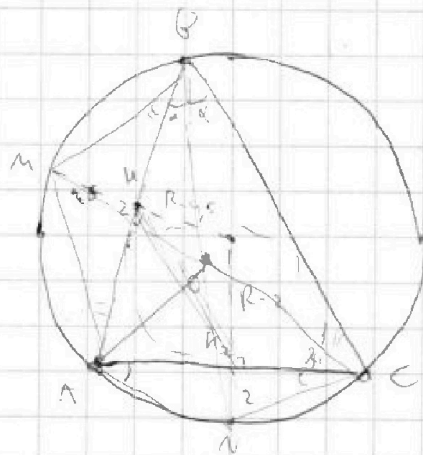
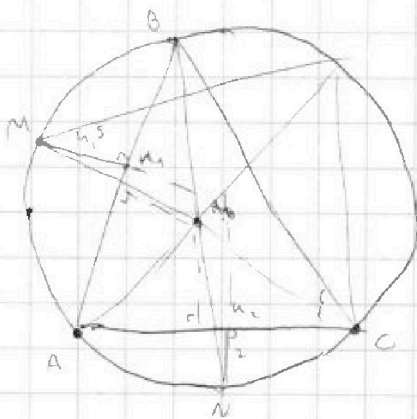
$$AM^2 = (2R - 4,5) \cdot 4,5$$

$$AN^2 = (R - 2) \cdot 2$$

$$R^2 - R = 4 - \frac{1}{2}R = 1$$

$$AB = 2AM = \sqrt{(2R - 4,5) \cdot 4,5}$$

$$AN^2 = \sqrt{(2R - 2) \cdot 2} = 2\sqrt{R - 1}$$



~~СММ~~



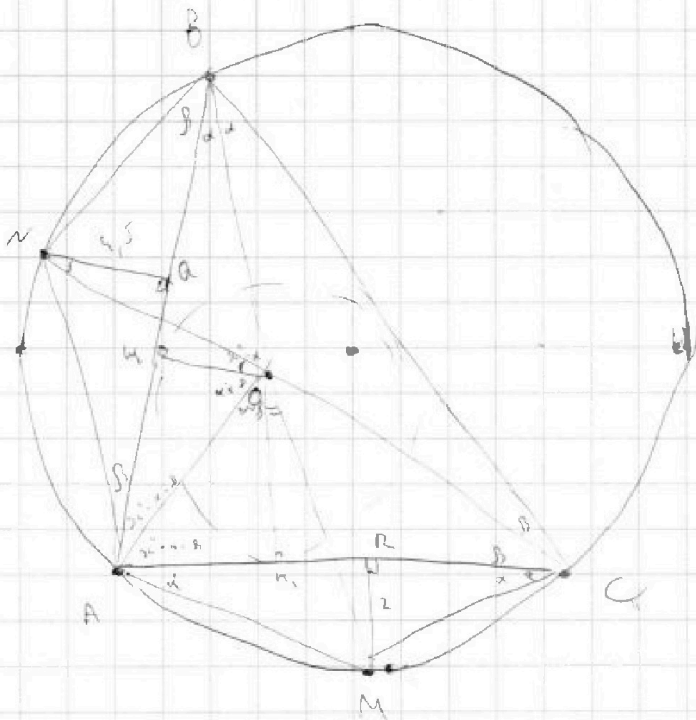
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

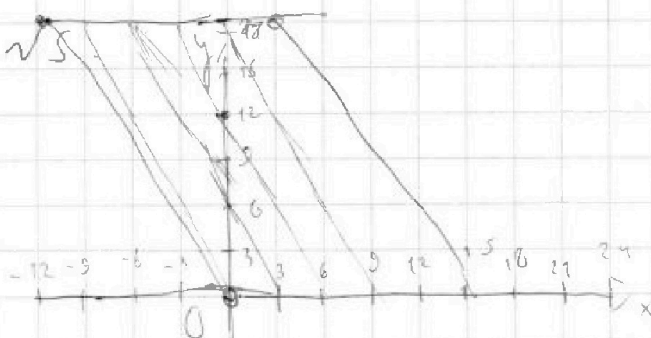


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{H_1 O}{R \sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{H_1 O}{R \cos(\alpha + \beta)}$$



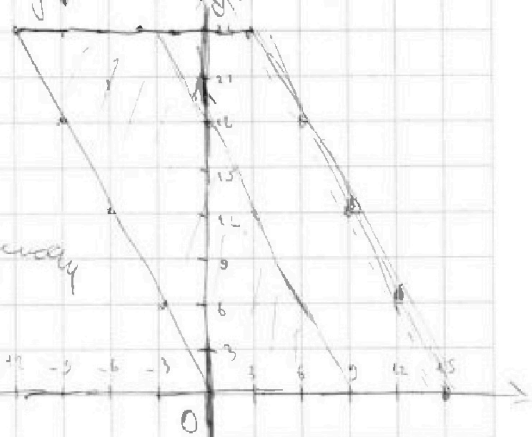
$$\begin{aligned} (y_1 + 2x_1)_{\min} &= 0 \\ (y_1 + 2x_1)_{\max} &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2x_1 &= -12 \\ (y_1 + 2x_1)_{\max} &= 18 \\ -12 &\leq y + 2x \leq 18 \\ -12 &\leq y \leq 18 - 2x \end{aligned}$$

13 · 10 - макс B  
функция максимизации  
13 · 10 · 13 = 1694

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_1 = 12 + 2x_1 - 2x_2$$



какой-то посыл у этой максимизации  
составляется из двух параллельных  
1 прямая - 13 штук посыл

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{11}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$= 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow abc : \text{НОК}(ab, bc, ac)$$

$$(abc)_{\min} = \text{НОК}(ab, bc, ac) =$$

Пример

$a =$

$$\text{значит } abc = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 52$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 26$$

$$\begin{cases} \gamma = 12 \\ \alpha = 8 \\ \beta = 6 \end{cases} \text{ - для } 2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 32$$

$$\gamma = 22$$

$$\beta = -5 \text{ - не ур.}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 10 \\ \beta + \gamma = 27 \\ \gamma + \alpha = 37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 51 \text{ - неверно}$$

поменял про 2 на 3  
определил и оставил  
m. упростила

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 17 \\ \beta + \gamma = 12 \\ \gamma + \alpha = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 10 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \gamma + \alpha = 37 \end{cases} \text{ - для } 7$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 37 \\ \gamma = 27 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 10 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{a}{b}$$

- несократимая,  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$(a+b) : m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 : m$$

$$(a+b) : m$$

$$(a+b)^2 - 8ab : m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases}$$

$$m = 8$$

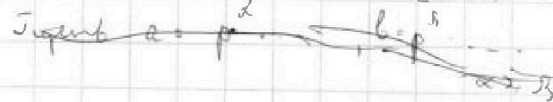
Пример

$$a \neq 5, b = 3$$

$$5+3=8$$

$$25 - 6 \cdot 5 \cdot 3 + 9 = 34 - 90 = -56$$

$$\text{НОД}(ab, a+b) = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

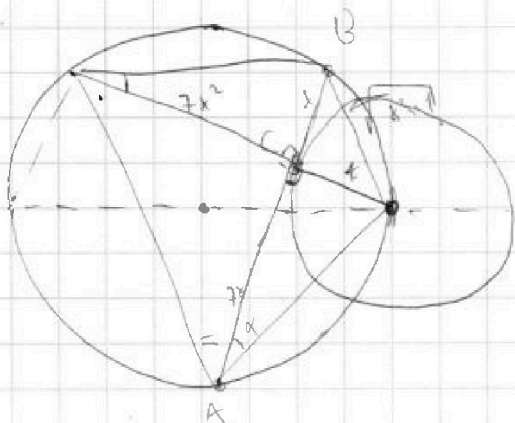
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



$r = 1$   
 $R = 5$

$AB = \dots$   
 $\text{for } t = 1 > 0$   
 $100 = (t+1)(49t+1)$   
 $19t^2 + 50t - 99 = 0$   
 $t = 1, t_2 < 0$

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$2R = 10 =$

$100 = (x^2+1)(49x^2+1)$   
 $AB = 8$

$AC = \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2 - 7x = 2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1$

$(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1) = 0$

1)  $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$   
 $2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \quad 7x = 2 \quad \boxed{x = \frac{2}{7}}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2 - 7x = \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3 - 7x$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$

$4(2x^2-5x+3) = 49x^2 - 42x + 9$

$D_1 = 121 - 123 = -2 \dots$

$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$

$3 > x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{2} \dots$

$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$

$(2x-1)(x-3) \geq 0$

$2x^2-5x+3 \geq 0$

$41x^2 - 22x - 3 = 0$

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x-8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

Чтобы система имела два решения график прямой и окружности должны касаться в одной точке, т.е. иметь прямую y

