МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \end{cases}$$

1) Если в (например в числе a) есть мн-тель не равный 2 или 7, то для поиска минимального abc, мы возьмём a равное числу „a" делённому на этот „лишний" мн-тель; произведение abc „уменьшится", а кратность ~~попар~~ парных произведений ~~не~~ на 2 и 7 не изменится.

Тогда выразим a; b и c:

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqslant 0$

Тогда

$$\begin{cases} ab = \left(2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2}\right) \vdots 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc = \left(2^{\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_2+\beta_3}\right) \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac = \left(2^{\alpha_1+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_3}\right) \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \end{cases}; \text{ сл-но}$$

2) $$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 15 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 17 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 23 \end{cases}$$ $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geqslant 55$, т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$, то $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 28$. Для минимальности $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$. Пример: $\alpha_1 = 11$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1+\alpha_2 = 15 \geqslant 15$; $\alpha_2+\alpha_3 = 17 \geqslant 17$; $\alpha_1+\alpha_3 = 24 \geqslant 23$

3) $$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geqslant 11 \\ \beta_2+\beta_3 \geqslant 18 \\ \beta_1+\beta_3 \geqslant 39 \end{cases}$$; $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geqslant 68$; $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 34$ - а это условие уже выполняется при $\beta_1+\beta_3 = 39$. Пример:

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = \beta_1+\beta_3 = 39$; $\beta_1 = 15$; $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = 24$

$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 1) $\frac{a}{b}$ - несократима. Найдём ~~п~~ макс. m на которую можно сократить $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$.

Если дробь можно сократить на $m \in \mathbb{N}$, $m>1$, то $(a+b) \vdots m$ и $(a^2-7ab+b^2) \vdots m$. Причём по усл. ~~a~~ и из выражения $(a+b) \vdots m \Rightarrow a \not\vdots m; b \not\vdots m$

Если у a есть общий простой множитель p с числом m, то $(\underbrace{a}_{\vdots p}+b) \vdots \underbrace{m}_{\vdots p}$, то и $b \vdots p$, что невозможно, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима. Сл-но $НОД(a;m)=1$; $НОД(b;m)=1$ (аналогично с b).

2) $(a+b) \vdots m$. Рассмотрим $a^2-7ab+b^2 = (\underbrace{(a+b)^2}_{\vdots m} - \underbrace{9ab}_{\vdots m}) \vdots m$, сл-но $9ab$ должно быть кратно m. а т.к. $НОД(a;m)=НОД(b;m)=1$, то $9 \vdots m$. Сл-но ~~п~~ максимальное $m=9$

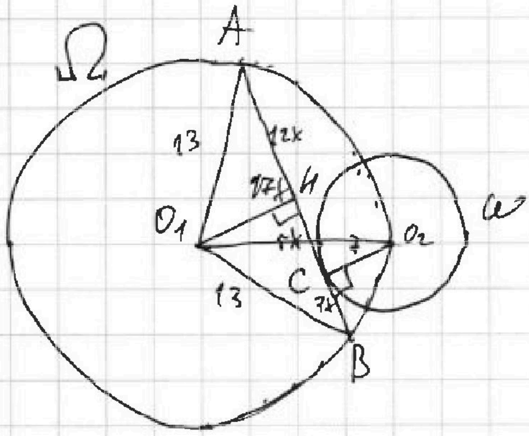
Пример $\frac{4}{5}$ - несокр; $\frac{4+5}{16+25-7\cdot4\cdot5} = \frac{9}{41-140} = -\frac{9}{\underbrace{99}_{\vdots 9}} = -\frac{1}{11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: Ω; ω - окр-сть
$\Omega(O_1; 13)$; $\omega(O_2; 7)$
$O_2 \in \Omega$
AB - хорда Ω и касательная к ω в т C.
$AC = 17x$; $BC = 7x$

Найти:
AB

Решение.

1) Проведем $O_1H \perp AB$. $H \in AB$. По св-ву высоты, проведенной к радиусу $AH = HB = 12x$. $HC = 12x - 7x = 5x$

Проведем $O_1O_2 = 13$

$169 = 144x^2 + O_1H^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Замена: $\sqrt{3x^2-6x+2} = a$; $\sqrt{3x^2+3x+1} = b$; $a, b \geq 0$

Заметим, что $a^2-b^2 = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 =$

$= 1-9x = a-b$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b) = a-b. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=1 \end{array}\right.$

1) При $a-b=0$; ~~a=b~~

$a-b = 1-9x = 0$; $x = \frac{1}{9}$. Проверка:

$\sqrt{3\cdot\frac{1}{81} - 6\cdot\frac{1}{9}+2} - \sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+3\cdot\frac{1}{9}+1} = \sqrt{\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2} - \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1} =$

$= \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{4}{3}} = 0$, Сл-но $\underline{x=\frac{1}{9}}$ - корень

2) $a+b=1$ Обр. замена

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \geq 0$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)} = 1$

$6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)} = 1$

~~Рассмо~~

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

Рассмотрим $\sqrt{3x^2+3x+1}$.

Найдем минимум подкорневого выражения. $3x^2+3x+1$ - парабола ветви вверх; минимум в вершине

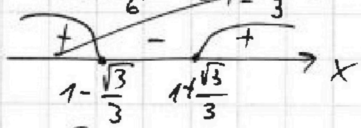
$x_B = -3$

ОДЗ:

1. $3x^2-6x+2 \geq 0$

$D = 36-8\cdot 3 = 12$

$x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = 1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$



2. $3x^2+3x+1 \geq 0$

$D = 9-12 = -3 < 0$

Сл-но $3x^2+3x+1 \geq 0$ при $x \in R$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				X		

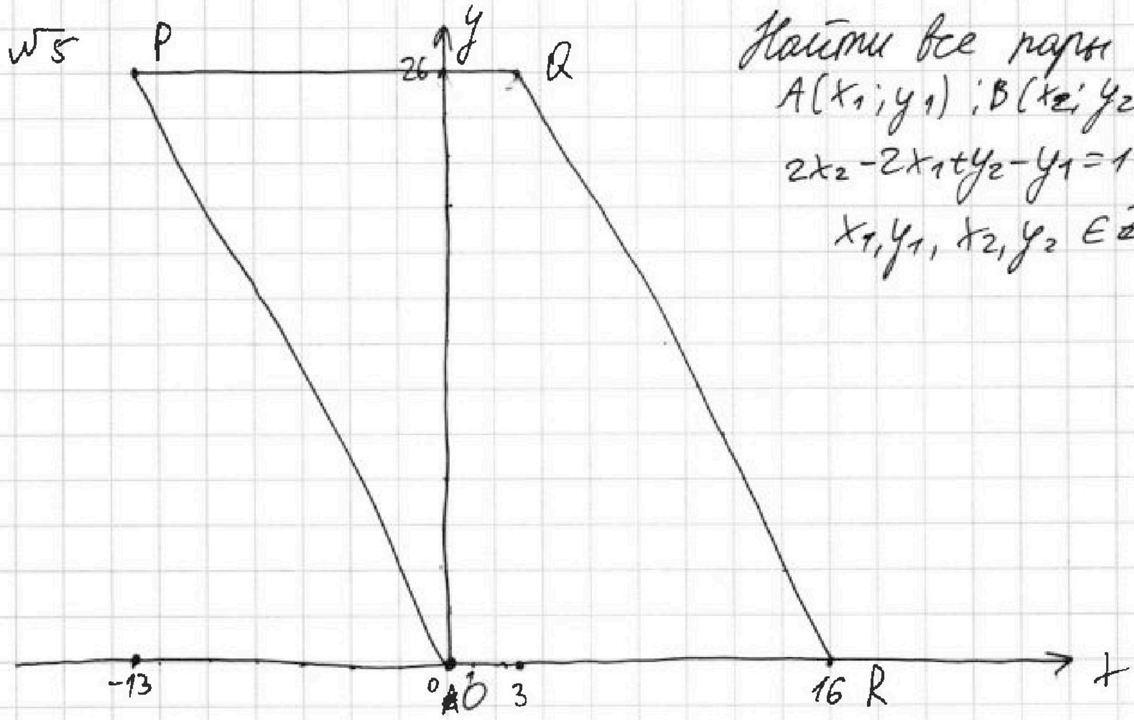
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

Найти все пары $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{Z}$



$2x_2+y_2=2x_1+y_1+14=b$, b-параметр. $b\in\mathbb{Z}$

$2x_2+y_2-b=0$; $2x_1+y_1-b+14=0$.

$y_2=-2x_2+b$; $y_1=-2x_1+b-14$. Сл-но ~~для~~ ~~мн~~ нужно найти для произвольных x_2 и y_2 лежащих на прямой $y=-2x+b$ все ~~не~~ точки принадл. прямой $y=-2x+b-14$. Пусть у них координаты $(x_1;y_1)$

$y_2-y_1=-2x_2+b+2x_1-b+14$

$y_2-y_1+2(x_2-x_1)=14$ - выполняется условие.

$b\in[0;32]$, т.к. точки внутри пар-ма.

при $b\in[0;13]$, для $y_2=-2x_2+b$, не найдётся внутри пар-ма прямая $y_1=-2x_1+b-14$. Для каждого $b\in[14;32]$ найдётся прямая $y=-2x+b-14$. Заметим, что наклоны OP; QR и ~~у~~ прямых $y=-2x+b$; $y=-2x+b-14$ равн. На паралл. прямой внутри или на стороне пар-ма всего 13 точек. Сл-но всего пар $13^2\cdot(33-14)=$

$=169\cdot19=3211$

Ответ: 3211

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 1) $\begin{cases} ax+y-8b=0 & (2) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (1) \end{cases}$

(1): $x^2+y^2=1$ – окр-сть $\omega_1(O_1;R_1)$ $O_1(0;0)$; $R_1=1$

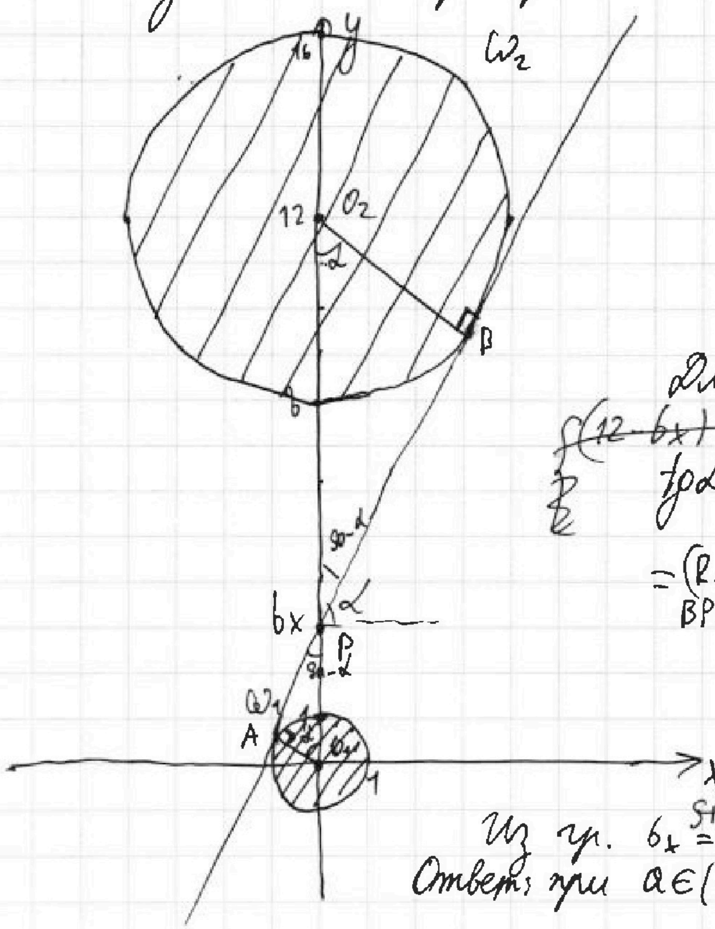
$x^2+(y-12)^2=16$ – окр-сть $\omega_2(O_2;R_2)$; $O_2(0;12)$; $R_2=4$

(1). $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2<1 & \text{– внутри } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2>4 & \text{· вне } \omega_2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2>1 & \text{– вне } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2<4 & \text{– внутри } \omega_2 \end{cases} \end{array}\right.$ или границы ω_1; ω_2

2) $ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$ – гр. прямая.



г) Проверим „граничную" прямую, угловой коэффициент k которой явл. мин. возможным для 2 решений системы.
У нее будет угловой коэффициент a_x. При $a\in[0;a_x)$ система имеет ≤ 1 реш.

Для a_x найдется b_x.

~~$(12-b_x)^2=R_2^2+$~~ $a_x=tg\alpha$

$tg\alpha=\frac{BP}{R_2}=\frac{AP}{R_1}$, $\begin{cases} BP\cdot R_1=AP\cdot R_2 \\ AP+BP= \end{cases}$

$=(R_1+R_2)\cos\alpha+\cancel{AP}\,AP\sin\alpha+BP\cdot\sin\alpha$

$BP=4AP$. $5AP=5\cos\alpha+5AP\sin\alpha$

$AP(1-\sin\alpha)=\cos\alpha$

$AP=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

$tg\alpha=\frac{\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}{1}$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

~~$\sin\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$~~

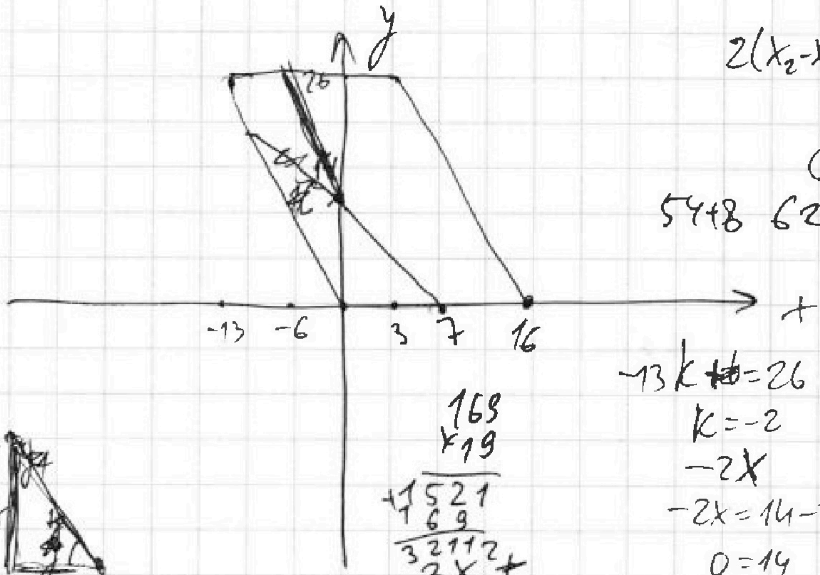
Из гр. $b_x=3$. $a_x\approx 2$. С-но

Ответ: при $a\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

$y=14-2x$

$14-2x=0$

$x=7$

$54+8$ 62

$-13k+b=26$

$k=-2$

$-2x$

$-2x=14-2x$

$0=14$

$14-2x=26$

$2x=-12$

$x=-6$

$y=14+12=$

$14+y_1+2x_1=0$

169×19

$1521 + 169 = 3211$

$3x^2+$

$-6x+2=3x+1$

$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$

$\frac{14}{\Delta x}-2=k$

$14-2\Delta x=k\Delta x$

x_2-x_1

$14-2(x_2-x_1)=y_2-y_1$

x_2-x_1 $x_2;y_2$

$2\Delta x+\Delta y=14$

$(x_2-x_1;\ 14-2(x_2-x_1))$

$\frac{13^2}{2}$

$\cancel{14x_1}$ $14-2x_1=y_1$

$14-2x_2=y_2$

$14+2x_2$

x_1 y_1

$0;7$

$-6;26$

x_2 y_2

$y_1+2x_1+7=y_2+2x_2-7$

$3-6+2$

$3x^2-6x+2$

$\frac{6}{6}$

$33-14$

$33-14=19$

12 $-12+19-14=-7$

$y_1=k_1x_1+b_1$

$y_2=k_2x_2+b_2$

$y_1=kx_1+b_1$

$y_2=kx_2+b_2$

$\cancel{y_1-y_2}$

$y_2-y_1=k(x_2-x_1)+b_2-b_1$

$y_2-y_1=-2(x_2-x_1)+(b_2-b_1)$

14

1 $75 \cdot 75$

$1575 + 75 = 2{,}25$

$3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+1$

$\frac{3}{4}+1{,}5=$

$3x^2+3x+1$

$\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

$3x(x+1)$

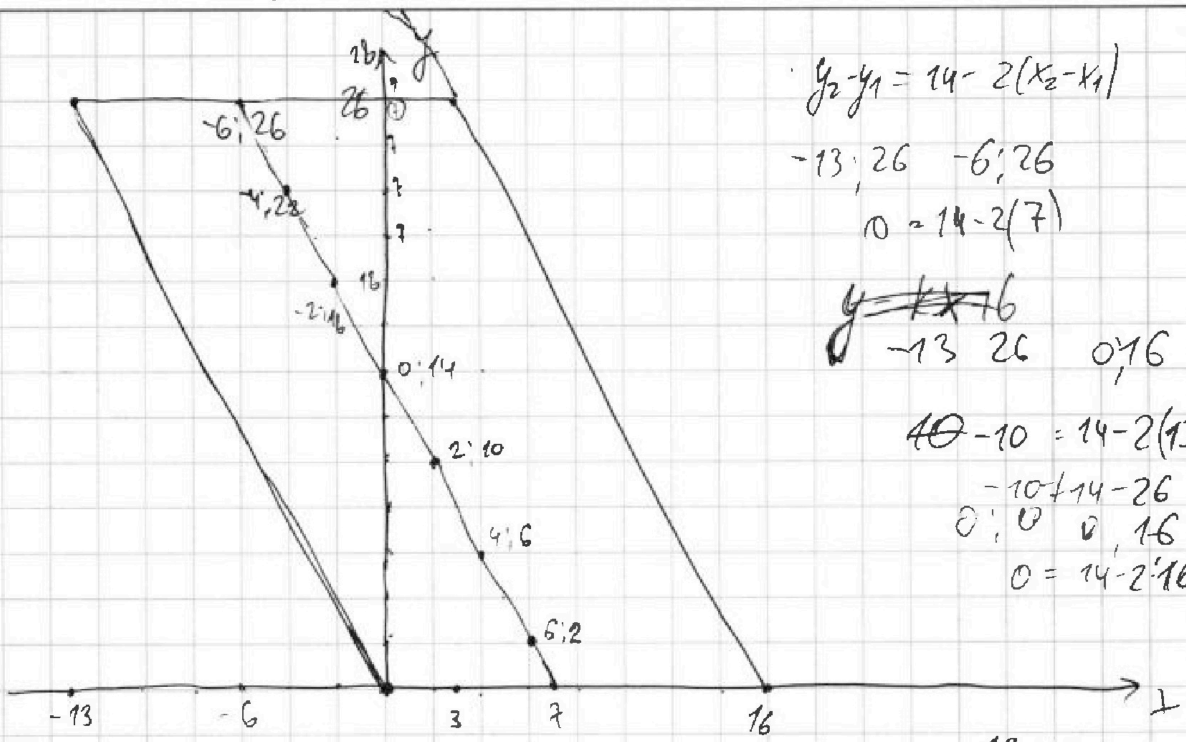
~~3-16+2-44~~ $3\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}+1$

$=\frac{3}{4}-1{,}5+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y_2-y_1=14-2(x_2-x_1)$

$-13;26 \quad -6;26$

$0=14-2(7)$

$\cancel{y=kx+6}$

$-13 \quad 26 \quad 0;16$

$\cancel{40}\,-10=14-2(13)$

$-10\neq 14-26$

$0;0 \quad 0;16$

$0=14-2\cdot 16$

$16+13$

29

$y_1=y_2 \quad 2(x_2-x_1)=14$

$x_2-x_1=7$

26

$2\Delta x=-12$

$\Delta x=-6$

$\cancel{2(\Delta)}\ 2\Delta x=14-\Delta y$

$\Delta x\in[-25;25]$

$-13-16$

$y_1+2x_1+14=2x_2+y_2=b$

$$\begin{cases} y_1+2x_1+14+b=0 \\ y_2+2x_2+b=0 \end{cases}$$

$y_1=-2x_1+14-b$

$y_2=-2x_2-b$

$x_1;y_1 \quad y=(-2x-b)+14$

$x_2y_2 \quad y=(-2x-b)+14$

$y_2+2x_2-7=y_1+2x_1+7$

$k_2x_2+b_2+2x_2-7=k_1x_1+b_1+2x_1+7$

$-13 \quad 26 \quad 3 \quad 26$

$0=14-2(3+13)$

$y_2-y_1=-2x_2-b+2x_1-14+b$

$-2x_1$

$14+ \quad y_2-y_1=$

$y_2-y_1+2(x_2-x_1)=14$

$y_1+2x_1+14=2x_2+y_2$

$y_1=-2x_1-14-b$

$y_2=-2x_2-b$

$y_2-y_1+2(x_2-x_1)=14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax+y-86=0$

$y=-ax+86$

$144 \cdot 4 = 576$

$\frac{3}{4}+3+2 = 5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$

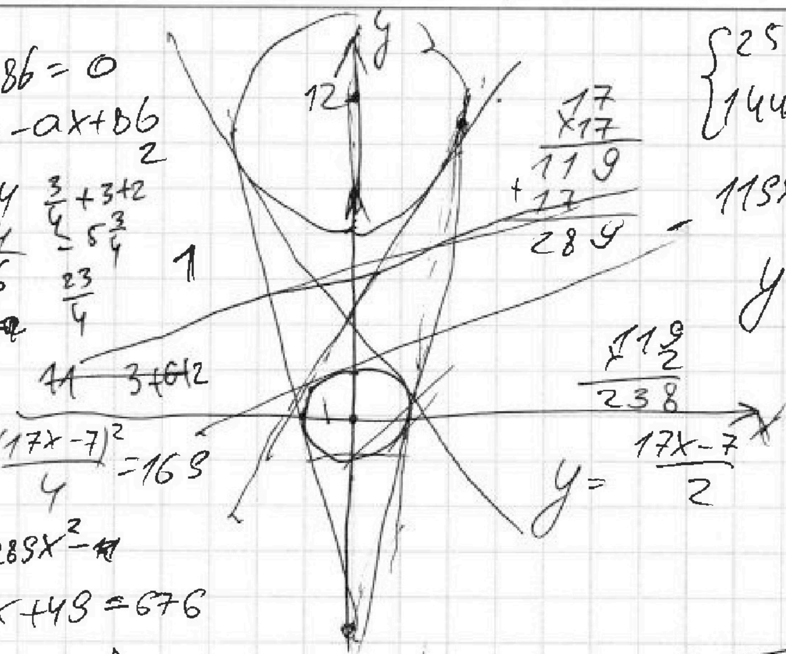
$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$

$119 \cdot 2 = 238$

$144x^2+\frac{(17x-7)^2}{4}=169$

$576x^2+289x^2-238x+49=676$

$169 \cdot 4 = 676$



$$\begin{cases} 25x^2+y^2+14y=120 \\ 144x^2+y^2=169 \end{cases}$$

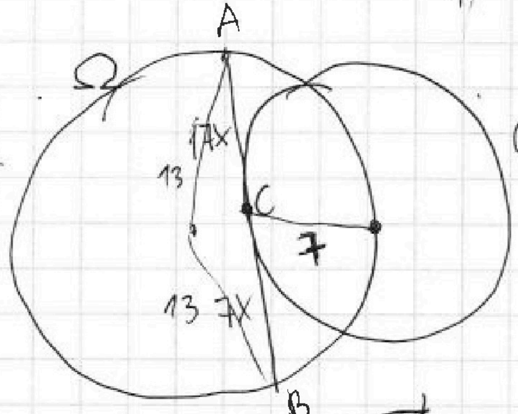
$119x^2+14y=49$

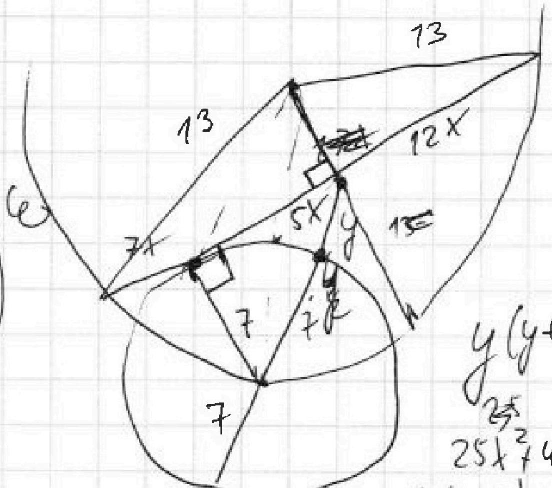
$y=\frac{119x^2-49}{14}$

$11-18=-7$

$119 \,|\, 7 = 17$

$y=\frac{17x-7}{2}$





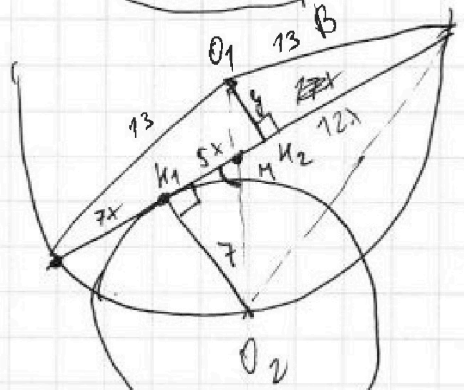
$y(y+14)=25x^2$

$25x^2+49=(7+y)^2$

$y(y+7)+49=(y+7)^2$

$y^2+14y+49=y^2+7y+49$

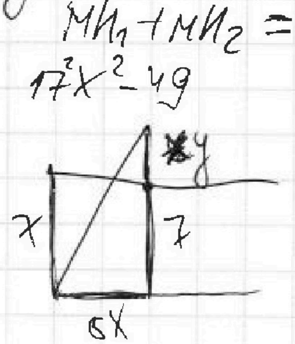
$y^2+14y=\cancel{y^2+14y+49}$



$\sqrt{y^2+MH_2^2}+\sqrt{49+MH_1^2}=13$

$MH_1+MH_2=5x$

17^2x^2-49



$(5x)^2+(y+7)^2=169$

$144x^2+y^2=169$

$25x^2+y^2+14y+49=169$

$144x^2+y^2=169$

~~$16yx^2+2y^2+14y+49$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

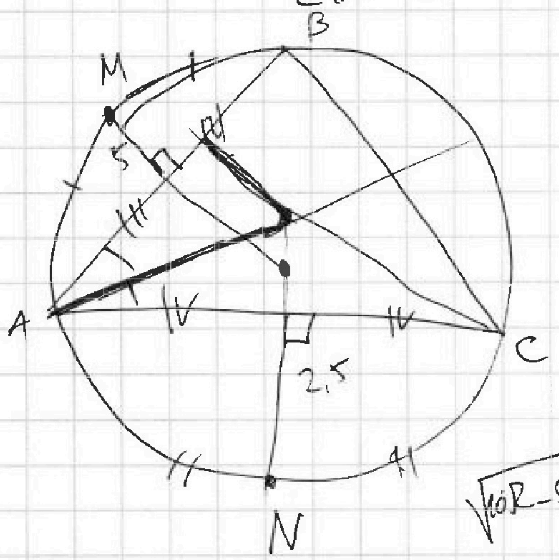
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$576x^2+289x^2-238x+49-676=0$

$865x^2-238x-627=0$

$24x - ?$



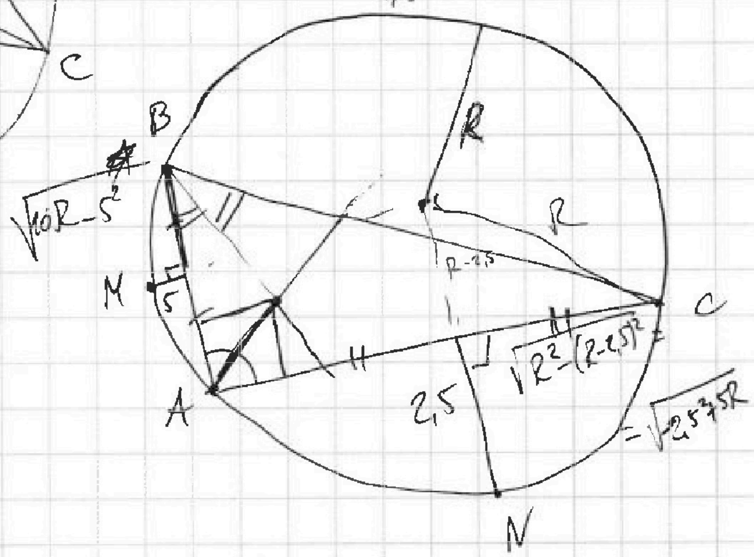
$$\begin{array}{r} 576 \\ +\ 289 \\ \hline 865 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ -\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$17-6=11$

$865 : 5 = 173$

119



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}=a$ $\quad y_1=kx_1+b$ $\quad y_2=kx_2+b$ $\quad k(x_2-x_1)=y_2-y_1$

$a^2=3x^2-6x+2$

$b^2=3x^2+3x+1$

$a^2-b^2=\cancel{2}-9x+1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=(3x^2-6x+2-3x^2-3x-1=$

$=1-9x$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b=\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$3\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{9}+2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+2=\frac{5}{3}$ $\quad a-b=a^2-b^2$ $\quad S=B+\frac{\Gamma}{2}-1$

$3\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1}=1$

$6x^2-3x+1+2\sqrt{3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1$

$2\sqrt{\ldots\ldots}=3x-6x^2$ $\quad 3x-6x^2\geq0$ $\quad x-2x^2\geq0$ $\quad x(1-2x)\geq0$ $\quad x(\frac{1}{2}-x)\geq0$ $\quad x(x-\frac{1}{2})\leq0$

$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)=9x^2-36x^3+36x^4$

$4(\cancel{9x^4}+\cancel{9x^3}+3x^2-\cancel{18x^3}-18x^2-6x+\cancel{2x}\,3x^2+3x+1)=$

$=9x^2-36x^3+36x^4$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{1}{2}$

$\cancel{36x^4}-\cancel{36x^3}-48x^2-12x+4=\cancel{36x^4}-\cancel{36x^3}+9x^2$

$-48x^2-12x+4=9x^2$

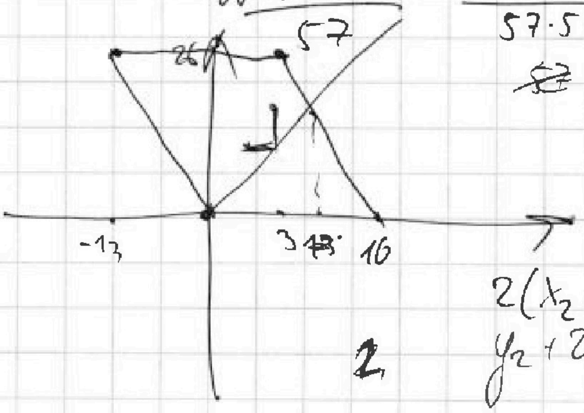
$57x^2+12x-4=0$ $\quad D=144+16\cdot57=144+912=$

$=1056=8^2\cdot\sqrt{66}$

$\frac{8\sqrt{66}-12}{57}$ $\quad \frac{64\cdot66-144}{57\cdot57}$ $\quad \frac{1}{2}$

$x=\frac{-12\pm8\sqrt{66}}{57}$

$\times\ 57\cdot16$: $342+57=912$, $912+144=1056$; $1056|2$, $528|2$, $264|4$, $66|2$, $33|3$, 11



$2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=14$

$16\cdot26$ $\quad 16\cdot26$: $216+26=416$

$2(x_2-x_1)+y_2-y_1=14$

$y_2+2x_2=14+y_1+2x_1$

2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a; b; c$ $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$; $bc \vdots 2^{17}\, 7^{18}$ $16+25-7\cdot4\cdot5$ 2 4

$ac \vdots 2^{23}\, 7^{39}$ $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ $(km+r)^2 = k^2m^2+2kmr+r^2$ $17+23+15=56$ 16

$\alpha_1 = 11$ $\alpha_3 = 13$ $\alpha_2 = 4$ 7 49

$ab \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$; $bc \geq 2^{17} 7^{18}$; $ac \geq 2^{23}\cdot 7^{39}$ 1 3 1

$a^2b^2c^2 \geq 2^{55}\cdot 7^{68}$ $\frac{4}{5}$ 9 $\frac{1}{a}$ 9

$abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34}$ $a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}\cdot k_1$

$a+b \equiv 0 \pmod m$ $c = 2^{13}\cdot 7^{23}$ $b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}\cdot k_2$

$(a+b)^2 \equiv 0 \pmod m$ $c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}\cdot k_3$

$\to 9ab \equiv 0 \pmod m$ $a = 2^{11}\cdot 7^{16}$ $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot k_1k_2k_3$

$9ab \vdots m$ 32 29 $b = 2^5\cdot 7$ $\cancel{\alpha_1+\beta_1=}$

$9ab = km$ $2 \cdot 7$

$9(k_1m+r_1)(k_2m+r_2) \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$ $r_1 \not\vdots m$ $r_2 \not\vdots m$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 15$ $\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$ $\alpha_3+\alpha_1 \geq 23$

$\beta_1+\beta_2 \geq 11$ $\beta_2+\beta_3 \geq 18$ $\beta_3+\beta_1 \geq 39$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 55$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 28$

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 68$ $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$

39 $\beta_1 = 15$ $\beta_3 = 24$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 15 \\ \beta_1+\beta_2 = 11 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 17 \\ \alpha_3+\alpha_1 = 2^{23}\ 23 \\ a = 2^{11}\cdot 7^{15} \\ b = 2^4\cdot 7 \\ c = 2^{13}\cdot 7^{24} \end{cases}$$

$\frac{a+b}{9ab}$ $\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}$

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$ $\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b-\frac{9ab}{a+b}$

$a^2-7ab+b^2$ $9ab \vdots (a+b)$

$D = 49b^2-4b^2 = 45b^2$

$a = \frac{7b \pm 3b\sqrt5}{2}$

$\frac{4}{5}$ $\frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99}$

$p\beta p$: $a+b \vdots m \vdots p^\alpha$ $a \not\vdots m = p^\alpha$ $b \not\vdots m$

$a+b = 45$

$\frac{22}{23}$ 23 $\frac{12}{11}$ $\frac{3}{4}$ 7

$22^2+23^2 = 484+529$

23×23: 69, 46, 529 22×22: 44, 44, 484

$\sqrt{3x^2-6x+2} + 9x = 1+\sqrt{3x^2+3x+1}$ 701

$3x^2-6x+2+81x^2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 2+3x^2+3x+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$84x^2-6x+2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+3x+2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2-9x+2+18x\sqrt{3x^2-6x+2} = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$ $D = 81-4\cdot2\cdot81$

> 0 $-3x-6x^2-2$ $D = 9-4\cdot2\cdot6$