



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н1.

$$\left. \begin{aligned} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} &\Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \quad (k \in \mathbb{N}) \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} &\Rightarrow bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} &\Rightarrow ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \quad (m \in \mathbb{N}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} \cdot k \cdot l \cdot m = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot l \cdot m$$

Обозначим степень в сомножителях abc за x и y соотв.

$$abc = 2^x \cdot 7^y \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{Z}, x \geq 0, y \geq 0, n/2, n/7)$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{2x} \cdot 7^{2y} \cdot n^2$$

$$2^{2x} \cdot 7^{2y} \cdot n^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot l \cdot m, \quad n/2, n/7 \Rightarrow 2^{2x} : 2^{55}, 7^{2y} : 7^{68} \Rightarrow 2x \geq 55, 2y \geq 68 \Rightarrow x \geq \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}, y \geq 34, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 28.$$

$$2y \geq 68 \Rightarrow x \geq \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}, y \geq 34, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 28.$$

$$abc: 2^x \cdot 7^y \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Пример на $abc = 2^{28} \cdot 3^{34}$.

$$a = 2^{10} \cdot 7^6, \quad b = 2^5 \cdot 7^5, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{23}$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m , это равносильно тому, что дробь $\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$ сократима на m . $\frac{a}{3}$ - несокр. дробь $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

также $(a+b \neq 0, a^2-7ab+b^2 \neq 0, \text{ т.к. } a, b \in \mathbb{N})$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = \frac{(a^2+ab)-ab+7ab+b^2}{a+b} = a + \frac{b(b-8a)}{a+b}$$

$$\text{т.к. } \text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(b(b-8a), a+b) =$$

$$= \text{НОД}(b-8a, a+b) = \text{НОД}(b-8a-(a+b), a+b) = \text{НОД}(-9a, a+b) =$$

$$= \text{НОД}(9, a+b), \text{ т.к. } \text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a, b) = 1$$

Сократить дробь можно не больше чем на НОД числителя и знаменателя $\Rightarrow m \in \text{НОД}(9, a+b) \leq 9$.

Пример на $m = 9$.

$$a = 1, b = 8, \frac{1+8}{1^2-7 \cdot 8+8^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} = 1.$$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.ч.

$$\sqrt{3x^2+3x+1} + (1-9x) - \sqrt{3x^2+3x+1} = (1-9x)$$

Обозначим $a=3x^2+3x+1$, $b=1-9x$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = b + \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = b^2 + a + 2b\sqrt{a} \\ a+b > 0 \\ a > 0 \\ b + \sqrt{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(b+1-2\sqrt{a}) = 0 \\ a+b > 0 \\ a > 0 \\ b + \sqrt{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b=0 \\ -b+1=2\sqrt{a} \\ a+b > 0 \\ a > 0 \\ b + \sqrt{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b^2-2b+1=4a \\ -b+1 > 0 \\ a+b > 0 \\ a > 0 \\ b + \sqrt{a} > 0 \end{cases}$$

1) $b=0$, $1-9x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$, $a > 0$ при любом x , т.к. $D = 3^2 - 3 \cdot 4 < 0$, $a > 0$,
 $b > 0 \Rightarrow a+b > 0$, $a+b > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ корень.

2) $b^2-2b+1=4a$, $((1-9x)-1)^2 = 4(3x^2+3x+1) \Leftrightarrow 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$

$$D_1 = 6^2 + 4 \cdot 69 = 36 + 6 \cdot 2 \cdot 23 = 6(6+46) = 6 \cdot 52 = 312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 13 \cdot 6 = 4 \cdot 78, x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

1) $1 > b$, $1 > \frac{2\sqrt{78}-6}{69}$; $69 > 2\sqrt{78}-6$; $75 > 2\sqrt{78}$; $75^2 > 2 \cdot 78 \Rightarrow 1 > \frac{2\sqrt{78}-6}{69}$,
 $> \frac{-2\sqrt{78}-6}{69}$

$$a = 3 \left(\frac{2\sqrt{78}-6}{69} \right)^2 + 3 \left(\frac{2\sqrt{78}-6}{69} \right) + 1 = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{9}, \frac{-6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

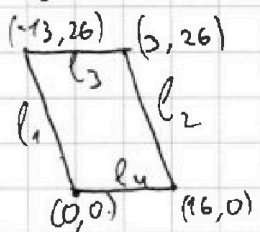
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5.

Через любую т. (x_i, y_i) можно провести прямую $y_i = -2x_i + b_i$, подобрав целый коэф. $b_i = y_i + 2x_i$, тогда для любой координатной пары (x, y) значение $2x + y$ будет равно b_i , и у точек, лежащих на одной прямой вида $y = -2x + b$, будет одинак. знач. выпр. равное b .



параллелограмм ограничивается прямыми $l_1: y = -2x$, $l_2: y = -2x + 32$, $l_3: y = 26$, $l_4: y = 0$, тогда внутри параллелогра. содержится ^{каким} прямых вида $y = -2x + c$, где $c \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c \leq 32$, на каждой прямой $c \neq 2$, лежит $13 + 1 = 14$ целых точек, на каждой прямой $c \equiv 2$

$c \equiv 2$ лежит $14 - 1 = 13$ цел. т., всего ~~14~~ ¹⁷ прямых $c \equiv 2$, и 16 прямых $c \not\equiv 2$. Возьмем прямую $y = -2x + c$ и прямую $y = -2x + c - 14$, тогда если взять любую т. первой прямой за $B(x_1, y_1)$ любую т. второй прямой за $A(x_2, y_2)$, то будет выполняться равенство $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$, и только в этом случае равенство будет выполняться. c отним на 14, ~~эта пара~~ ^{пара} прямых: ~~составит~~ ^{составит} ~~15~~ ¹⁶ пар $c = 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32$, каждая пара ~~составит~~ ^{составит} $c_1 = 0, c_2 = 14, \dots, c_1 = 18$ и $c_2 = 32$ - 10 четных пар. прям на них суммарно $10 \cdot 14^2$ точек, и есть $c_1 = 14$ и $c_2 = 15, \dots, c_1 = 17, c_2 = 31$ - 9 нечетных пар. прямых на них суммарно $9 \cdot 13^2$ точек. Всего $10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1960 + 9 \cdot 169 = 3481$ пара т. удовлетвор. условию

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 3 \\ \hline 1521 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

Ответ: 3481

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

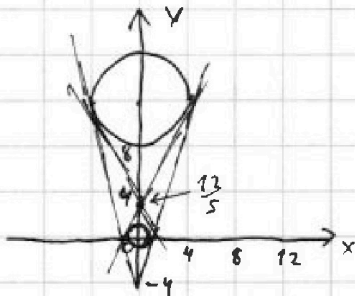
1 2 3 4 5 6 7

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$



$x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ - окружность с ц. $(0,0)$ и рад 1.
 $x^2+(y-12)^2-16=0 \Leftrightarrow x^2+(y-12)^2=4^2$ - окружность с ц. $(0,12)$ и рад 4.

$ax+y-8b=0$ - прямая, $y=8b-ax$ сграф 1

Если т. находимся внутри окр., то $x^2+y^2-1 \leq 0$,

$x^2+(y-12)^2-16 > 0 \Rightarrow$ такие т. не подходят.

Если т. наход. в окр. с рад. 4, то $x^2+y^2-1 > 0$,

$x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \Rightarrow$ так. т. подходят.

Если т. наход. вне окр., то $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) > 0$

что невозможно

$ax+y-8b=0$ - прямая, если система имеет 2 реш. \Rightarrow прям. касается касательных двух окружностей

1) если 12-радиус. между ц. окр., если две окр. наход. в окр. полуш. от кас., $(0, y_1)$ - т. пересек. кас. и оу, $\frac{y_1}{y_1+12} = \frac{1}{4}$ (т.к. одна окр. перевы в другую радиусом). в т. пересек. кас. и линии центров $\Rightarrow y_1 = y_1+12 \Leftrightarrow y_1 = -4$, $y_1 = -4$ и т.д., т.к. $y=8b-ax$, $-4=8b-a \cdot 0 \Rightarrow 8b = -4 \Rightarrow y = -ax-4$.

$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$$a^2x^2+8ax+16=1-x^2 \Leftrightarrow x^2(a^2+1)+8ax+15=0$$

$D_1 = 16a^2 - 15(a^2+1) = 0$, т.к. уравн. имеет один корень, т.к. прямая касается окружности $16a^2 - 15a^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 15 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{15}$

2) если окр. лежат в разных полуш. от кас. касательной, то

т. $(0, y_2)$ - т. пересек. общ. кас. и оу, т.к. это т. пересек. общ. кас. и линии центров $\frac{12-y_2}{y_2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow 12-y_2 = 4y_2 \Leftrightarrow y_2 = \frac{12}{5}$, $y=8b-ax \Rightarrow 8b = \frac{12}{5}$, а так

окр. кас. прямой \Rightarrow уравнение $x^2-1=y^2 = (-ax+\frac{12}{5})^2$ имеет ровно 1 корень

$$-x^2+1 = a^2x^2 - \frac{24}{5}ax + \frac{144}{25} \Leftrightarrow (a^2+1)x^2 - \frac{24}{5}ax + \frac{25+144}{25} = 0 \Leftrightarrow (a^2+1)x^2 - \frac{24}{5}ax + \frac{169}{25} = 0$$

$$a^2x^2 - 13^2 = 0$$

$$D_1 = \left(\frac{12}{5}a\right)^2 - (a^2+1) \cdot \frac{169}{25} = 0 \Leftrightarrow 144a^2 - 169a^2 - 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 = 169 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{169}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 = 169 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{169}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 = 169 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{169}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{15}, \pm \frac{\sqrt{169}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

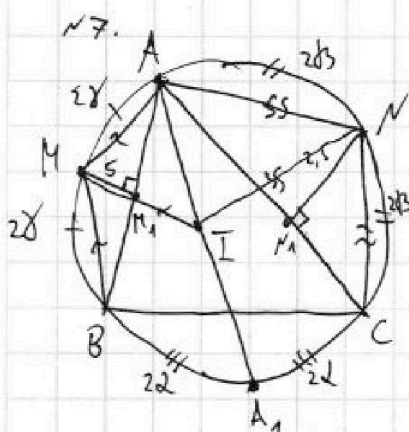
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- и.к. I центр. впис. окр. $\triangle ABC$
- 1) AI - бис. $\angle BAC$, A_1 - т. пересек. AI и окр. $\triangle ABC$
 - 2) $BM = MA$, $AN = NC$, как отрезки, стягивающие равные хорды

- 3) $MM_1 \perp AB$, $M_1 \in AB$, $MM_1 = 5$, как расст. от M до AB
- $NN_1 \perp AC$, $N_1 \in AC$, $NN_1 = 2,5$, как расст. от N до AC
- 4) $AM = MI = MB$, $AN = IN = NC$ по лемме о хордах.
- $\Rightarrow \triangle AMI$ и $\triangle ANI$ равнобедренные с осн. AI.
- $\Rightarrow \angle AMI = 180 - 2\angle MAI$, $\angle ANI = 180 - 2\angle IAN$ (как \angle в \triangle)
- 5) Обозначим меньшие углы $\widehat{BM} = \widehat{MA} = \gamma$, $\widehat{AN} = \widehat{NC} = \beta$, $\widehat{CA_1} = \widehat{A_1B} = 2\alpha$ $\Rightarrow 4\gamma + 4\beta + 4\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

6) $\angle NAC = \phi$, $\angle MAB = \gamma$, как \angle впис. в окр. $\triangle ABC$.

7) $\triangle AMM_1$, $\angle MM_1A = 90^\circ \Rightarrow MA = \frac{MM_1}{\sin \angle MAB} = \frac{5}{\sin \gamma}$ (по т. син. в $\triangle AMM_1$)

$\triangle ANN_1$, $\angle NN_1A = 90^\circ \Rightarrow NA = \frac{NN_1}{\sin \angle NAC} = \frac{2,5}{\sin \beta}$ (по т. син. в $\triangle ANN_1$)

8) $\angle AIN = 2 + \beta$ (как впис. \angle) $\Rightarrow \angle ANI = 180 - 2(2 + \beta)$ (уг. в $\triangle ANI$)

(по т. син. в $\triangle AIN$) $\frac{AI}{\sin \angle ANI} = \frac{AN}{\sin \angle AIN} = \frac{AN}{\sin \angle IAN} \Rightarrow AI = AN \cdot \frac{\sin(180 - 2\alpha - 2\beta)}{\sin(2 + \beta)}$

$$= \frac{2,5}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin 2(2 + \beta)}{\sin 2 + \beta} = \frac{2,5}{\sin \beta} \cdot \frac{2 \sin(2 + \beta) \cos(2 + \beta)}{\sin 2 + \beta} = \frac{5}{\sin \beta} \cdot \cos(90 - \gamma) = \frac{5 \sin \gamma}{\sin \beta}$$

9) Аналогично по т. син. в $\triangle AMI$, $AI = MA \cdot \frac{\sin(180 - 2\alpha - 2\beta)}{\sin(2 + \gamma)} = \frac{5}{\sin \gamma} \cdot \frac{2 \sin(2 + \gamma) \cos(2 + \gamma)}{\sin(2 + \gamma)}$

$$= \frac{5}{\sin \gamma} \cdot 2 \cos(90 - \beta) = \frac{10 \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$10) AI^2 = AI \cdot AI = \frac{5 \sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{10 \sin \beta}{\sin \gamma} = 50 \Rightarrow AI = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

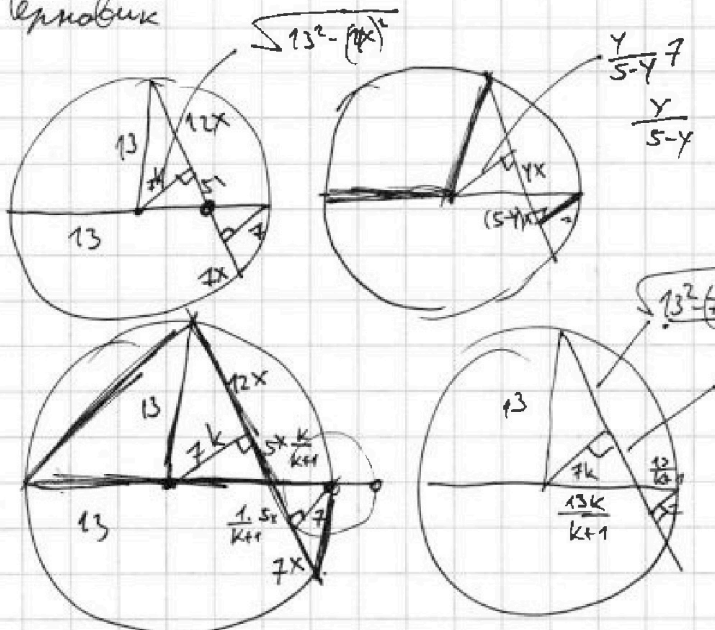
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$13^2 - 12x^2 = -5x \cdot \frac{a}{a+x} + \left(\frac{13a}{a+x} \right)^2$$

$$BC^2 + 14 \times BC + 49x^2 = BC^2 + 24BCx - 7^2$$

$$49x^2 + 49 = 10BCx$$

$$BC = \frac{49(x^2 + 1)}{10x}$$

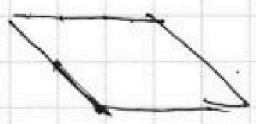
$(-13, 26)$ $(3, 26)$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$(0, 0)$ $(16, 0)$

$$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 7$$

$(13, 13)$ $(3, 13)$



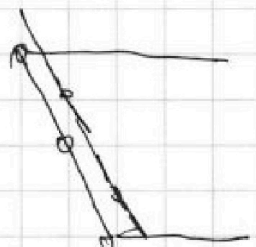
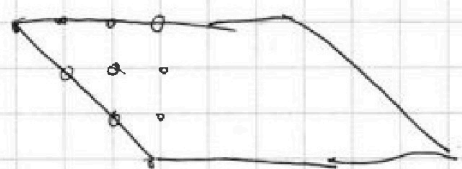
$$x_1 + x_2 = 7$$

$$2x_2 + y_2 = 7 + x_1 + y_1$$

$(0, 0)$ $(16, 0)$

$$y = -2x$$

$$y_1 = -2x_1 + b \Rightarrow y_1 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{15+17+23}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2} < 28, \quad \frac{11+18+39}{2} = 25 \cdot 3 = 34,$$

$$2^{28} \left| \begin{matrix} b = 2^5 \cdot 7^5 \\ a = 2^{10} \cdot 7^6 \\ c = 2^{13} \cdot 7^{23} \end{matrix} \right. \frac{2^{28} \cdot 7^{34}}$$

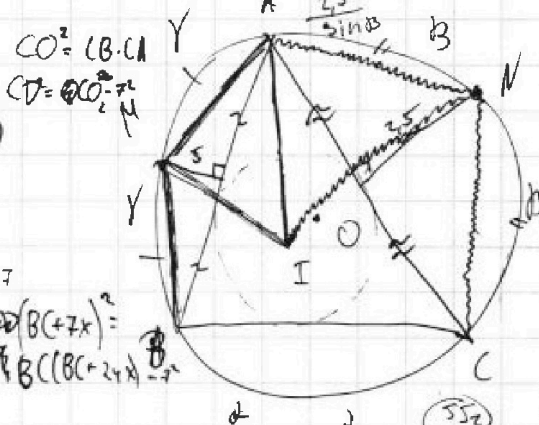
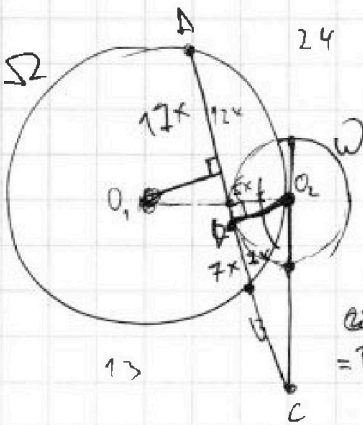
$\text{KOD}(a, b) = 1$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a+b} = a + \frac{-2ab + b^2 - ab}{a+b} = a + \frac{b(b-3a)}{a+b}$$

$$\begin{aligned} \text{KOD}(a+b, b-3a) &= \\ &= \text{KOD}(a+b, -3a) = \\ &= \text{KOD}(a+b, 3) \leq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=1, b=8 \\ \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \\ \frac{1-8+64}{4+49-49-49} = -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AI &= \frac{2.5}{\sin B} \cdot \frac{\sin(180-2\alpha-2\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{5 \cos(\alpha+\beta)}{\sin B} = \frac{5 \cos(90-\gamma)}{\sin B} = 5 \frac{\sin \gamma}{\sin B} \\ AI &= \frac{5}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \gamma} \\ &= \frac{10 \cos(\alpha+\beta)}{\sin \gamma} = \frac{10 \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \end{aligned}$$



$$\sqrt{3x^2+3x+1} + \sqrt{1-9x} = \sqrt{3x^2+3x+1} = (1-9x)$$

$$\begin{cases} a+b = b^2 + a + 2b\sqrt{a} \\ a+b \geq 0 \\ a \geq 0 \\ b+\sqrt{a} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(-b+1-2\sqrt{a}) = 0$$

$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ a \geq 0 \\ b+\sqrt{a} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ -b+1=2\sqrt{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ 1-2b+1=4a \end{cases}$$

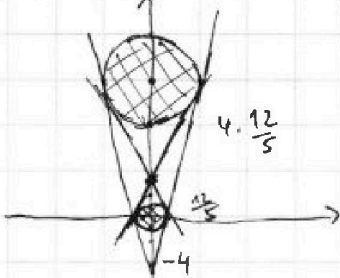
1) $b=0, 1-9x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}, a = 3 \cdot (\frac{1}{9})^2 = 3 \cdot (\frac{1}{3})^2 > 0$

2) $((1-9x)+1)^2 = 4(3x^2+3x+1) \Rightarrow 81x^2 = 12x^2+12x+4 \Rightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$
 $D = 3^2 + 4 \cdot 69 = 3 \cdot (3+4 \cdot 23) = 3 \cdot (3+92) = 3 \cdot 95 = 3 \cdot 5 \cdot 19, x = \frac{6 \pm \sqrt{285}}{69}$

$(-13, 26)$

$2(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = 14$

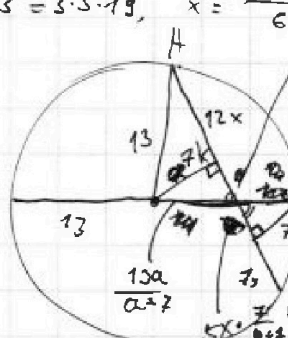
$(0, 0)$ $(16, 0)$



$y = -ax + 8b$

$x^2 + (y-12)^2 = 4^2$

$$\begin{aligned} \left(5x \cdot \frac{a}{a+7}\right)^2 &= \left(\frac{13a}{a+7}\right)^2 \\ a^2(a+7)^2 & \neq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 9 \cdot 13^2 - 12^2 \cdot x^2 &= a^2 \\ (13 + \frac{13a}{a+7}) \cdot \frac{13 \cdot 7}{a+7} &= \\ = 17x \cdot 7x &= \\ = \frac{13^2 - a^2}{72} \cdot 17 \cdot 7 &= \\ \frac{26a + 13 \cdot 7}{a+7} \cdot \frac{13 \cdot 7}{a+7} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12x + 5x \cdot \frac{a}{a+7}) \cdot (7x + 5x \cdot \frac{7}{a+7}) &= \left(13 + \frac{13a}{a+7}\right) \cdot \left(\frac{13 \cdot 7}{a+7}\right) \\ x^2(12+5a)(7+35) &= 13^2(1+a) \cdot 7 \\ \frac{13^2 a^2}{72} (12+5a) \cdot 6 &= 13^2(1+a) \\ (13^2 - a^2)(12+5a) &= 13^2 \cdot 72(1+a) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

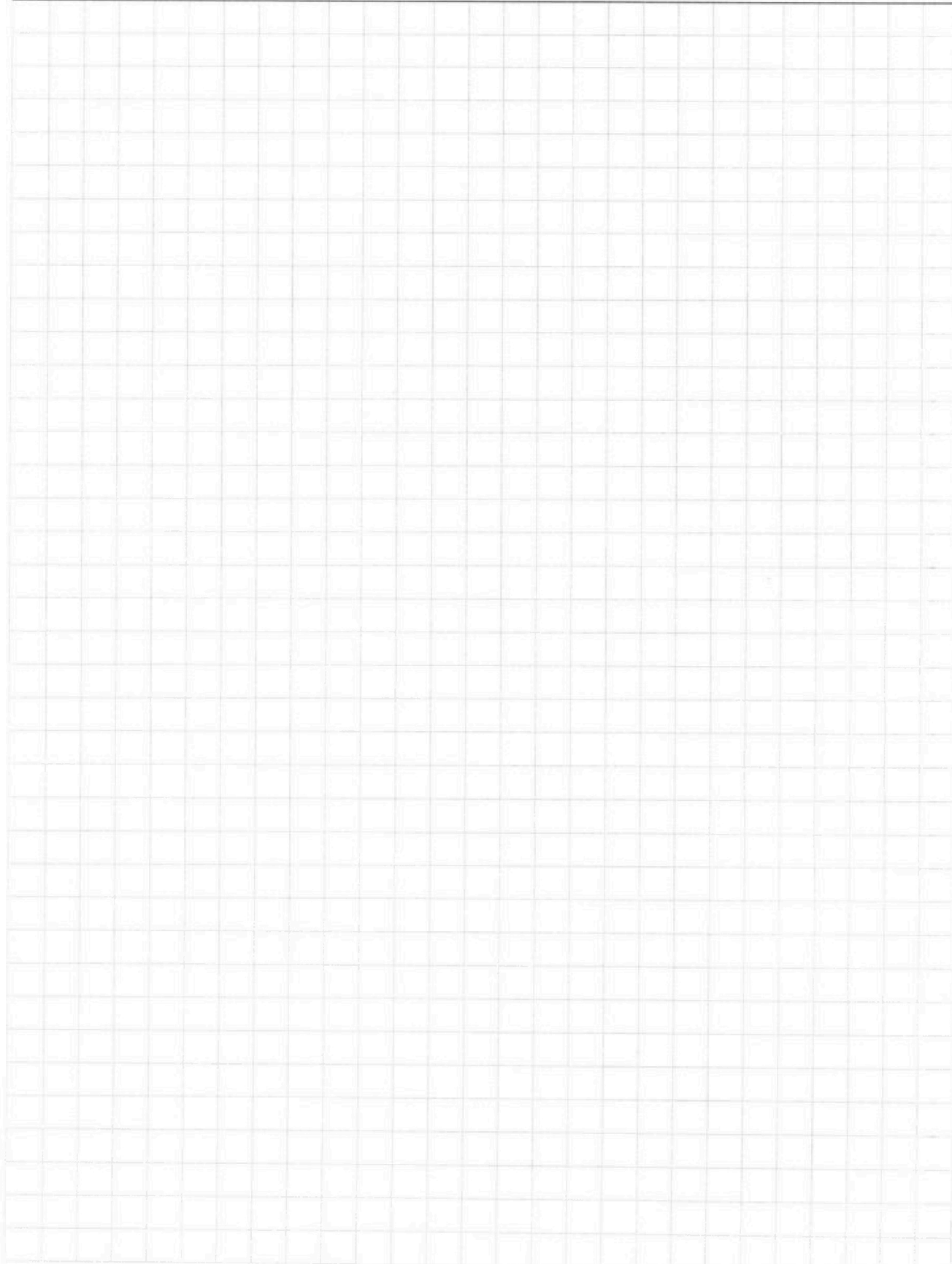
5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

