МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\left.\begin{array}{l} ab \vdots 2^{15}7^{11} \Rightarrow ab = 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot k \ (k\in\mathbb{N}) \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17}\cdot 7^{18}\cdot l \ (l\in\mathbb{N}) \\ ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot m \ (m\in\mathbb{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^{15+17+23}\cdot 7^{11+18+39}\cdot k\cdot l\cdot m = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot k\cdot l\cdot m$$

Обозначим степени вход. 2 и 7 в abc за x и y соотв.

$abc = 2^x\cdot 7^y\cdot n$ $(n\in\mathbb{N},\ x,y\in\mathbb{Z},\ x\geq 0,\ y\geq 0),\ n \not\vdots\, 2,\ n\not\vdots\, 7)$

$a^2b^2c^2 = 2^{2x}\cdot 7^{2y}\cdot n^2$

$2^{2x}\cdot 7^{2y}\cdot n^2 = 2^{55}\cdot 7^{68}\cdot k\cdot l\cdot m,\ \ n\not\vdots\, 2,\ n\not\vdots\, 7 \Rightarrow 2^{2x} \vdots 2^{55},\ 7^{2y} \vdots 7^{68} \Rightarrow 2x\geq 55,$

$2y\geq 68 \Rightarrow x\geq \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2},\ y\geq 34,\ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\geq 28.$

$abc \vdots 2^x\cdot 7^y \Rightarrow abc \vdots 2^{28}\cdot 7^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{28}\cdot 7^{34}$

Пример на $abc = 2^{28}\cdot 3^{34}$:

$a = 2^{10}\cdot 7^6,\ b = 2^5\cdot 7^5,\ c = 2^{13}\cdot 7^{23}$

$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11},\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18},\ ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{34}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2. $(a+b\neq 0,\ a^2-7ab+b^2\neq 0$, т.к. $a,b\in\mathbb{N})$

Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m, это равносильно тому, что дробь $\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$ сократима на m. $\frac{a}{b}$ - несокр. дробь $\Rightarrow$ НОД$(a;b)=1$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}=\frac{(a^2+ab)-ab-7ab+b^2}{a+b}=a+\frac{b(b-8a)}{a+b}$$

т.к. НОД$(a;b)=1 \Rightarrow$ НОД$(a+b;b)=1 \Rightarrow$ НОД$(b(b-8a),a+b)=$
$=$ НОД$(b-8a,a+b)=$ НОД$(b-8a-(a+b),a+b)=$ НОД$(-9a,a+b)=$
$=$ НОД$(9,a+b)$, т.к. НОД$(a+b,a)=$ НОД$(a,b)=1$

Сократить дробь можно не больше чем на НОД числителя и знаменателя $\Rightarrow m\in$ НОД$(9,a+b)\leq 9$.

Пример на $m=9$.

$a=1,\ b=8,\ \frac{1+8}{1^2-7\cdot 8+8^2}=\frac{9}{1-56+64}=\frac{9}{9}=1$.

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4.

$$\sqrt{(3x^2+3x+1)+(1-9x)}-\sqrt{3x^2+3x+1}=(1-9x)$$

Обозначим $a=3x^2+3x+1$, $b=1-9x$

$$\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \sqrt{a+b}=b+\sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b^2+a+2b\sqrt{a} \\ a+b\geq 0 \\ a\geq 0 \\ b+\sqrt{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(-b+1-2\sqrt{a})=0 \\ a+b\geq 0 \\ a\geq 0 \\ b+\sqrt{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ -b+1=2\sqrt{a} \end{array}\right. \\ a+b\geq 0 \\ a\geq 0 \\ b+\sqrt{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} b^2-2b+1=4a \\ -b+1\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ a+b\geq 0 \\ a\geq 0 \\ b+\sqrt{a}\geq 0 \end{cases}$$

1) $b=0$, $1-9x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$, $a>0$ при люб x, т.к. $D=3^2-3\cdot 4<0$, $a\geq 0$, $b\geq 0 \Rightarrow a+b\geq 0$, $\sqrt{a}+b\geq 0 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$ подх.

2) $b^2-2b+1=4a$, $((1-9x)-1)^2=4(3x^2+3x+1) \Leftrightarrow 81x^2=12x^2+12x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 69x^2-12x-4=0$

$D_1=6^2+4\cdot 69=36+6\cdot 2\cdot 23=6(6+46)=6\cdot 52=312=4\cdot \cancel{78}\,13\cdot 6=4\cdot 78$, $x_{1,2}=\frac{-6\pm 2\sqrt{78}}{69}$

1) $1\geq b$, $1 \vee \frac{2\sqrt{78}-6}{69}$; $69 \vee 2\sqrt{78}-6$; $75 \vee 2\sqrt{78}$; $75^2 \vee 2\cdot 78 \Rightarrow 1>\frac{2\sqrt{78}-6}{69}>$

$>\frac{-2\sqrt{78}-6}{69}$

$$a=3\left(\frac{2\sqrt{78}-6}{69}\right)^2+3\left(\frac{2\sqrt{78}-6}{69}\right)+1=3\cdot$$

Ответ: $\frac{1}{9}$, $\frac{-6\pm 2\sqrt{78}}{69}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

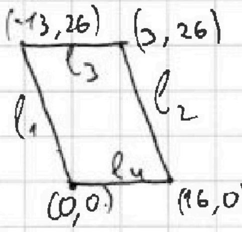
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Через любую т. $(x_i; y_i)$ можно провести прямую $y_i = -2x_i + b_i$, подобрав целый коэф. $b_i = y_i + 2x_i$, тогда для любой коорд. значение $2x_i + y_i$ будет равно b_i, и у точек, лежащих на одной прямой вида $y = -2x + b$, будет одинак. знач. выр. равное b.



параллелограмм ограничивается прямыми $l_1: y = -2x$, $l_2: y = -2x + 32$, $l_3: y = 26$, $l_4: y = 0$, тогда внутри части параллелогр. содержатся прямые вида $y = -2x + c$, где $c \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c \leq 32$, на каждой прямой с $c \vdots 2$, лежит $13 + 1 = 14$ целых точек, на кажд. прямой с $c \not\vdots 2$ лежит $14 - 1 = 13$ цел. т., всего 17 прямых с $c \vdots 2$, и 16 прямых с $c \not\vdots 2$. Возьмём прямую $y = -2x + c$, и прям $y = -2x + c - 14$, тогда если взять любую т. первой прямой за $B(x_2, y_2)$ и любую т. второй прямой за $A(x_1, y_1)$, то будет выполняться равенство $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$, и только в этом случае равенство будет выполняться. С отлич на 14, пары прямых: $c_1 = 0$ и $c_2 = 14$, ... $c_1 = 18$ и $c_2 = 32$ - 10 четных пар. прям на них суммарно $10 \cdot 14^2$ - точек, и есть $c_1 = 1$ и $c_2 = 15$ ... $c_1 = 17$, $c_2 = 31$ - 9 нечетных пар. прямых на них суммарно $9 \cdot 13^2$ точек.

Всего $10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1960 + 9 \cdot 169 = 3481$ пара т. удовлетвор. условию.

$$\begin{array}{r} \times\, 169 \\ 9 \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\, 1960 \\ 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

Ответ: 3481

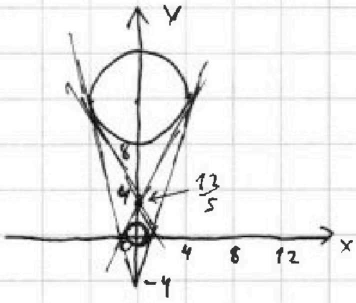
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0\end{cases}$



$x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ - окружность с ц. (0,0) и рад 1.

$x^2+(y-12)^2-16=0 \Leftrightarrow x^2+(y-12)^2=4^2$ - окружность с ц. (0;12) и рад 4.

$ax+y-8b=0$ - прямая, $y=8b-ax$

Если т. находится внутри окр. с рад. 1, то $x^2-y^2-1\le 0$, $x^2+(y-12)^2-16>0 \Rightarrow$ такие т. подходят.

Если т. наход. в окр. с рад. 4, то $x^2-y^2-1\ge 0$, $x^2+(y-12)^2-16\le 0 \Rightarrow$ так. т. подходят.

Если т. наход. вне окр., то $\underbrace{(x^2-y^2-1)}_{>0}\underbrace{(x^2+(y-12)^2-16)}_{>0}>0$ что невозможно.

$ax+y-8b=0$ - прямая, ~~у~~ система имеет 2 реш. $\Rightarrow$ прям. должна касаться двух окружностей

1) 12 - расст. между ц. окр., если две окр. наход в одн. полуп. от. кас., $(0, y_1)$ - т. пересеч кас. и OY, $\frac{|y_1|}{|y_1|+12}=\frac{1}{4}$ (т.к. одна окр. перевод в другую гомотетией в т. пересеч. кас. и линии центров) $\Rightarrow 4|y_1|=|y_1|+12 \Leftrightarrow |y_1|=4$, $y_1=-4$, т.к. $y=8b-ax$, $-4=8b-a\cdot 0 \Rightarrow 8b=-4 \Rightarrow y=-ax-4$.

$\Rightarrow y^2=a^2x^2+8ax+16$, $y^2=1-x^2 \Rightarrow$

$a^2x^2+8ax+16=1-x^2 \Leftrightarrow x^2(a^2+1)+8ax+15=0$

$D_1=16a^2-15(a^2+1)=0$, т.к. уравн. имеет один корень, т.к. прямая касается окружности $16a^2-15a^2-15=0 \Leftrightarrow a^2=15 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{15}$

2) если окр. лежат в разных полупл. отн. касательной, $(0;y_2)$ - т. пересеч. общ. кас. и OY, т.к. это т. пересеч общ кас. и линии центров $\frac{12-y_2}{y_2-0}=\frac{4}{1} \Leftrightarrow 12-y_2=4y_2 \Leftrightarrow y_2=\frac{12}{5}$, $y=8b-ax \Rightarrow 8b=+\frac{12}{5}$, а т.к. окр. рад 1 окр. кас. прямой $\Rightarrow$ уравнение $x^2-1=y^2=(-ax+\frac{12}{5})^2$ имеет ровно 1 корень

$-x^2+1=a^2x^2-\frac{24}{5}ax+\frac{144}{25} \Leftrightarrow (a^2+1)x^2-\frac{24}{5}ax+\frac{-25+144}{25}=0$

$D_1=(\frac{12}{5}a)^2-(a^2+1)\cdot\frac{119}{25}=0 \Rightarrow 144a^2-119a^2-119=0$

$\Leftrightarrow 25a^2=119 \Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ: $\pm\sqrt{15}$, $\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

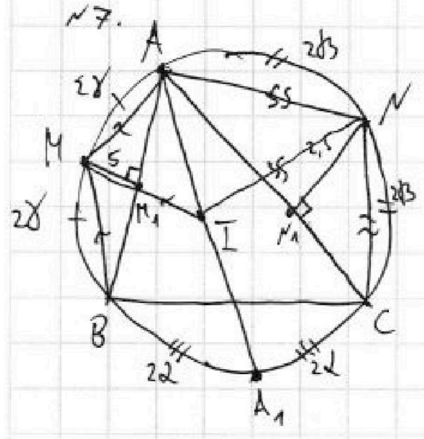
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.



т.к. I центр. впис окр $\triangle ABC$

1) AI - бис $\angle BAC$, A_1 - т. пересеч. AI и опис окр $\triangle ABC$

2) $BM=MA$, $AN=NC$, как отр., стягивающие равные хорды

3) $MM_1 \perp AB$, $M_1 \in AB$, $MM_1=5$, как расст от M до AB
$NN_1 \perp AC$, $N_1 \in AC$, $NN_1=2{,}5$, как расст. от N до AC

4) $AM=MI=MB$, $AN=IN=NC$ по лемме о трезубце.
$\Rightarrow \triangle MAI$ р/б с осн AI, $\triangle ANI$ р/б с осн AI. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AMI = 180-2\angle MAI$, $\angle ANI = 180°-2\angle IAN$ (как $\angle$ р/б $\triangle$)

5) обозн меньш дуги $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MA}=2\gamma$, $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC}=2\beta$,
$\overset{\frown}{CA_1}=\overset{\frown}{A_1B}=2\alpha$ $\Rightarrow 4\gamma+4\gamma+4\alpha=360° \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=90°$

6) $\angle NAC=\beta$, $\angle MAB=\gamma$, как $\angle$ впис в опис окр $\triangle ABC$.

7) $\triangle AMM_1$, $\angle MM_1A=90° \Rightarrow MA=\frac{MM_1}{\sin\angle MAB}=\frac{5}{\sin\gamma}$ (по т син для $\triangle AMM_1$)
$\triangle ANN_1$, $\angle NN_1A=90° \Rightarrow NA=\frac{NN_1}{\sin\angle NAC}=\frac{2{,}5}{\sin\beta}$ (по т. син. для $\triangle ANN_1$)

8) $\angle IAN=\alpha+\beta$ (как впис $\angle$) $\Rightarrow \angle ANI = 180°-2(\alpha+\beta)$ (из р/б $\triangle ANI$) $\Rightarrow$
(по т. син для $\triangle AIN$) $\frac{AI}{\sin\angle ANI}=\frac{AN}{\sin\angle AIN}=\frac{AN}{\sin\angle IAN} \Rightarrow AI = AN\cdot\frac{\sin(180°-2\alpha-2\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$=\frac{2{,}5}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin 2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\beta}=\frac{2{,}5}{\sin\beta}\cdot\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\beta}=\frac{5}{\sin\beta}\cdot\cos(90-\gamma)=\frac{5\sin\gamma}{\sin\beta}$

9) аналогично по т. син для $\triangle AMI$, $AI = MA\cdot\frac{\sin(180°-2\alpha-2\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{5}{\sin\gamma}\cdot\frac{2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$
$=\frac{5}{\sin\gamma}\cdot 2\cos(90-\beta)=\frac{10\sin\beta}{\sin\gamma}$

10) $AI^2 = AI\cdot AI = \frac{5\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{10\sin\beta}{\sin\alpha}=50 \Rightarrow AI=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

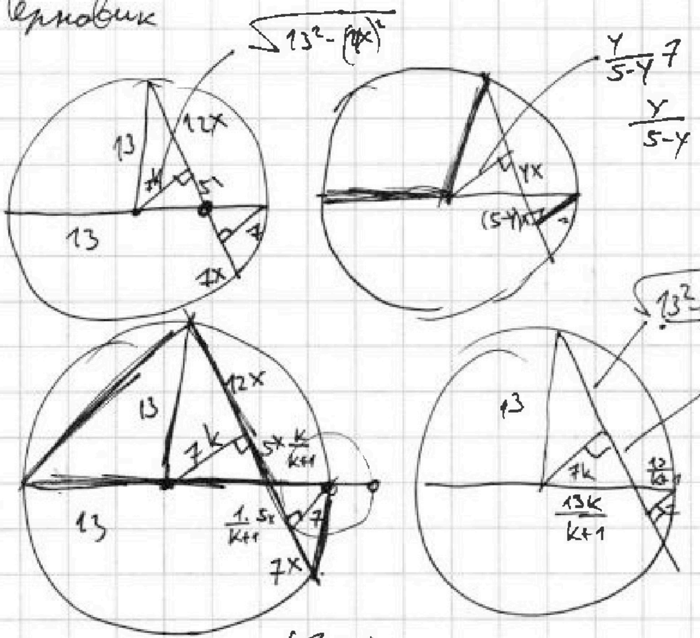
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$13^2-12x^2=-\left(5x\cdot\frac{a}{a+7}\right)^2+\left(\frac{13a}{a+7}\right)^2$

$\cancel{BC^2+14xBC+49x^2=BC^2+2\cdot 4BCx-7^2}$

$49x^2+49=10BC\cancel{x}$

$BC=\frac{49(x^2+1)}{10x}$

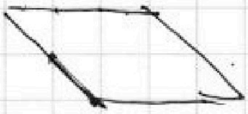
(-13, 26) (3, 26)

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

(0,0) (16; 0)

$(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=7$

(-13, 13) 3, 13

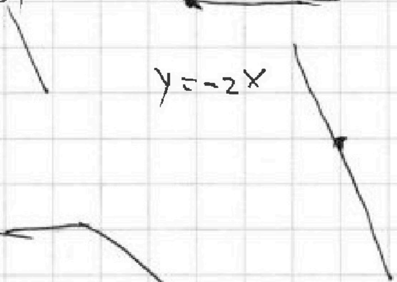


$\cancel{x_2+y_2=7}$

$2x_2+y_2=7+2x_1+y_1$

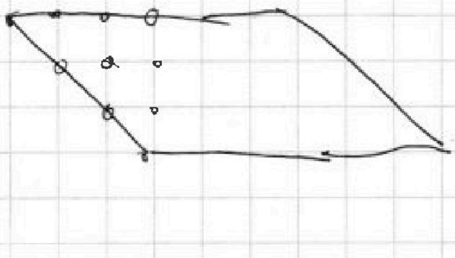
(16, 0)

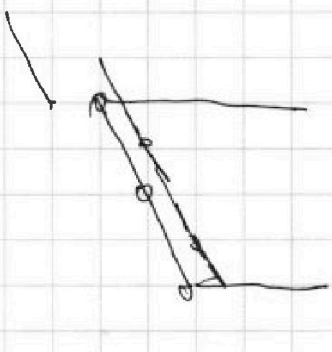
(0,0)



$y=-2x$

$y_1=-2x_1+b \Rightarrow y_1=$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$\frac{15+17+23}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2} < 28$, 2^{28}, 7^{34}

$\frac{11+18+39}{2} = 25+9 = 34$,

$b = 2^5 \cdot 7^5$, $a = 2^{10} \cdot 7^6$, $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$ | $2^{28} \cdot 7^{34}$

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = a + \frac{-7ab+b^2-ab}{a+b} = a + \frac{b(b-8a)}{a+b}$

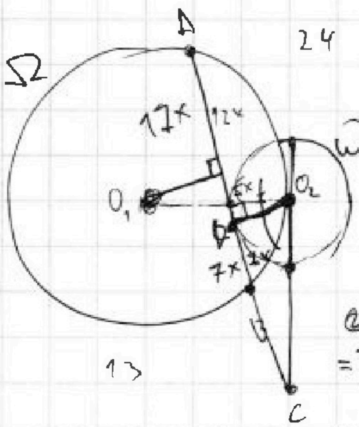
$НОД(a,b)=1$

$НОД(a+b, b-8a) = НОД(a+b, -9a) = НОД(a+b, 9) \le 9$

$a=1$, $b=8$

$\frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$ (9)

$4+49-49-45 = -45$

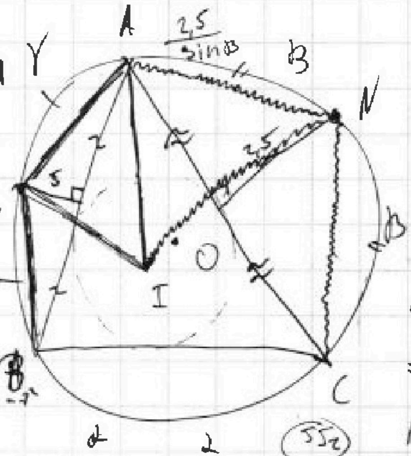


$CO^2 = CB \cdot CA$

$CD = CO_2^2 - r^2$

$CD \cdot (B(+7x))^2 = $

$= \mathcal{T}B((B(+24x)) - r^2$



(55°)

$AI = \frac{2,5}{\sin B} \cdot \frac{\sin(180°-2\alpha-2\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$= \frac{5\cos(\alpha+\beta)}{\sin B} = \frac{5\cos(90-\gamma)}{\sin\beta} = 5\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$AI = \frac{5}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(180-2\alpha-2\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$= \frac{10\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{10\sin\beta}{\sin\gamma}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot 2$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{(3x^2+3x+1)+(1-9x)} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (1-9x)$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \cancel{a+b-a-2\sqrt{a(a+b)}+b^2}$, $\cancel{b \ge 0, a \ge 0}$ $\sqrt{a+b} = b+\sqrt{a}$

$b = 2\sqrt{a}+1$

$\begin{cases} a+b = b^2+a+2b\sqrt{a} \\ a+b \ge 0 \\ a \ge 0 \\ b+\sqrt{a} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(-b+1-2\sqrt{a}) = 0 \\ a+b \ge 0 \\ a \ge 0 \\ b+\sqrt{a} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ -b+1 = 2\sqrt{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} b^2-2b+1 = 4a \\ -b+1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$1 \ge b$

1) $b=0$, $1-9x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$, $a = 3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)+1 > 0$

2) $((1-9x)-1)^2 = 4(3x^2+3x+1) \Leftrightarrow 81x^2 = 12x^2+12x+4 \Leftrightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$

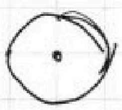
1) $-b+1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \cancel{\frac{6+\sqrt{285}}{69}}$

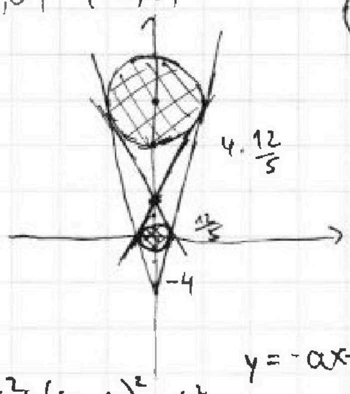
$D = 3^2+4\cdot 69 = 3\cdot(3+4\cdot 23) = 3\cdot(3+92) = 3\cdot 95 = 3\cdot 5\cdot 19$, $x = \frac{6\pm\sqrt{285}}{69}$

$(-13,26)$ $(3,26)$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1) = 14$

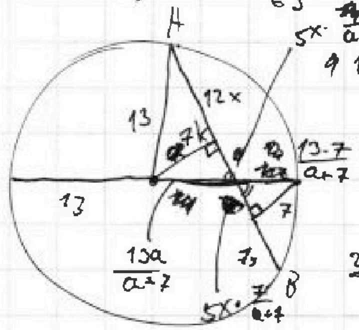
$(0,0)$ $(16;0)$





$y = -ax+8b$

$x^2+(y-12)^2 = 4^2$



$x^2 = \frac{13^2-a^2}{12}$

$13^2 - 12^2x^2 = a^2$

$\left(13+\frac{13a}{a+7}\right)\cdot\frac{13\cdot 7}{a+7} =$

$= 17x\cdot 7x =$

$= \frac{13^2-a^2}{12}\cdot 17\cdot 7$

$\frac{26a+13\cdot 7}{a+7}\cdot\frac{13\cdot 7}{a+7}$

$\left(12x+5x\frac{a}{a+7}\right)\left(7x+5x\cdot\frac{7}{a+7}\right) = \left(13+\frac{13a}{a+7}\right)\left(\frac{13\cdot 7}{a+7}\right)$ $\cdot(a+7)^2$

$13^2 - \left(\frac{13a}{a+7}\right)^2$

$x^2(12+5a)(7+35) = 13^2(1+a)\cdot 7$

$\frac{13^2a^2}{12^2}(12+5a)\cdot 6 = 13^2(1+a)$

$(13^2-a^2)(12+5a) = 13^2\cdot 12\cdot 2(1+a)$

$a^2+\left(5x\frac{a}{a+7}\right)^2 = \left(\frac{13a}{a+7}\right)^2$

$a^2(a+7)^2+$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!