МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\,(x^2+(y-12)^2-16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab \,\vdots\, 2^{15} 7^{11}$ $\quad bc \,\vdots\, 2^{17} 7^{18}$ $\quad ac \,\vdots\, 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1} \cdot x_1$ $\quad b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2} \cdot x_2$ $\quad c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3} \cdot x_3$ $(k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$

$ab \,\vdots\, 2^{15} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \geqslant 2^{15} \Rightarrow k_1 + k_2 \geqslant 15$

$ac \,\vdots\, 2^{23} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_3} \geqslant 2^{23} \Rightarrow k_1 + k_3 \geqslant 23$

$bc \,\vdots\, 2^{17} \Rightarrow 2^{k_2} \cdot 2^{k_3} \geqslant 2^{17} \Rightarrow k_2 + k_3 \geqslant 17$

Имеем:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \geqslant 15 \\ k_1 + k_3 \geqslant 23 \\ k_2 + k_3 \geqslant 17 \end{cases} \Rightarrow 2(k_1 + k_2 + k_3) \geqslant 15 + 23 + 17 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geqslant \frac{55}{2} = 27{,}5$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geqslant 28$

$$\left.\begin{aligned} & ac \,\vdots\, 7^{39} \Rightarrow abc \,\vdots\, 7^{39} \\ & k_1 + k_2 + k_3 \geqslant 28 \Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{28} \end{aligned}\right\} \Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geqslant 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример на $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$ $\quad b = 2^5$ $\quad c = 2^{13} \cdot 7^{\cancel{21}\,18}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \,\vdots\, 2^{15} \cdot 7^{11}$ $\quad bc = 2^{18} \cdot 7^{18} \,\vdots\, 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \,\vdots\, 2^{23} \cdot 7^{39}$

$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{21+18} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Число $abc \geqslant 2^{28} \cdot 7^{39}$ и есть пример на

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

НОД$(a, b) = 1$ $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ (т.к. $\frac{a}{b}$ несокр)

Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ можно сократить на m, то

$a+b \underset{m}{\equiv} 0$ $a^2-7ab+b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

$(-b)^2-7(-b)\cdot b+b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$b^2+7b^2+b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$9b^2 \underset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 9b^2 \vdots m$

Допустим, что НОД$(b^2, m) \neq 1$. Тогда $b^2 \vdots k$ и $m \vdots k$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b \vdots k$

но НОД$(a,b)=1$ ~~но усл~~ $\Rightarrow a \not\vdots k \Rightarrow a+b \not\vdots k \Rightarrow$ мы не сможем

сократить на $m \Rightarrow (b^2, m) = 1 \Rightarrow (b, m) = 1 \Rightarrow 9 \underset{m}{\equiv} 0$

$9 \vdots m \Rightarrow m \leqslant 9$

Пример при $m = 9$

$a=4$ $b=5$: $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{4^2-7\cdot4\cdot5+5^2} = \frac{9}{16+25-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

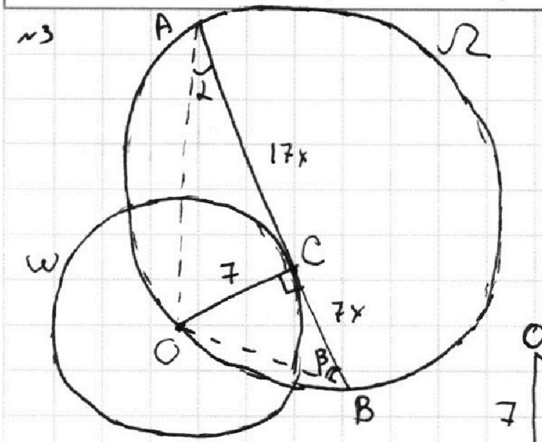
Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано: $AC:CB=17:7$, $r_\omega=7$, $r_\Omega=13$

Н-ти: AB - ?

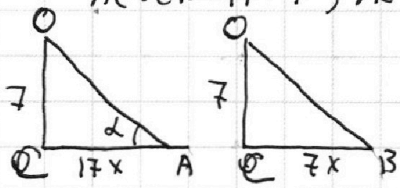
Решение:

C - точка касания, OC - радиус $\Rightarrow$

$\Rightarrow OC \perp AB$ $\quad OC=r_\omega=7$

$\angle DAC=\alpha$, $\angle OBC=\beta$

$AC:CB=17:7$, $AC=17x$, $CB=7x$, $AB=24x$



По т. Пифагора $\triangle OAC$

$OA=\sqrt{289x^2+49}$

По т. Пифагора $\triangle OBC$

$OB=\sqrt{49x^2+49}$

$\sin\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{289x^2+49}}$

$\sin\beta=\dfrac{7}{7\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

По т. синусов в $\triangle AOB$: $\dfrac{BO}{\sin\alpha}=2R=26$

Из $\triangle OBC$ $\quad BO=\dfrac{7}{\sin\beta}$

$\dfrac{BO}{\sin\alpha}=\dfrac{7}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=26$ $\qquad \sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{7}{26}=\dfrac{7}{\sqrt{289x^2+49}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$289x^2+49>0 \quad x^2+1>0$

$26=\sqrt{(289x^2+49)(x^2+1)}$ $\quad\uparrow^2$

$676=289x^4+338x^2+49$

$289x^4+338x^2-627=0$

Решим относительно x^2

$\left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{627}{289} \end{array}\right.$, но $x^2>0 \Rightarrow$ не подходит

$x^2=1 \Rightarrow x=1$ (т.к. $x>0$, т.к. это стороны $\triangle$)

$x=1 \Rightarrow 24x=24$

Ответ: 24

№ 4

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \quad ^2$

Ограничения:

$3x^2-6x+2 \geq 0$

$3x^2+3x+1 \geq 0$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{(3x^2-6x+2)\cdot}$

$\overline{\cdot(3x^2+3x+1)}=81x^2-18x+1$

$-2\sqrt{9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x-6x+6x^2+6x+2}=75x^2-15x-2$

$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2)=5625x^4+225x^2+4-2250x^3-$

$-300x^2+60x$

$5589x^4-2214x^3-111x^2+132x-4=0$

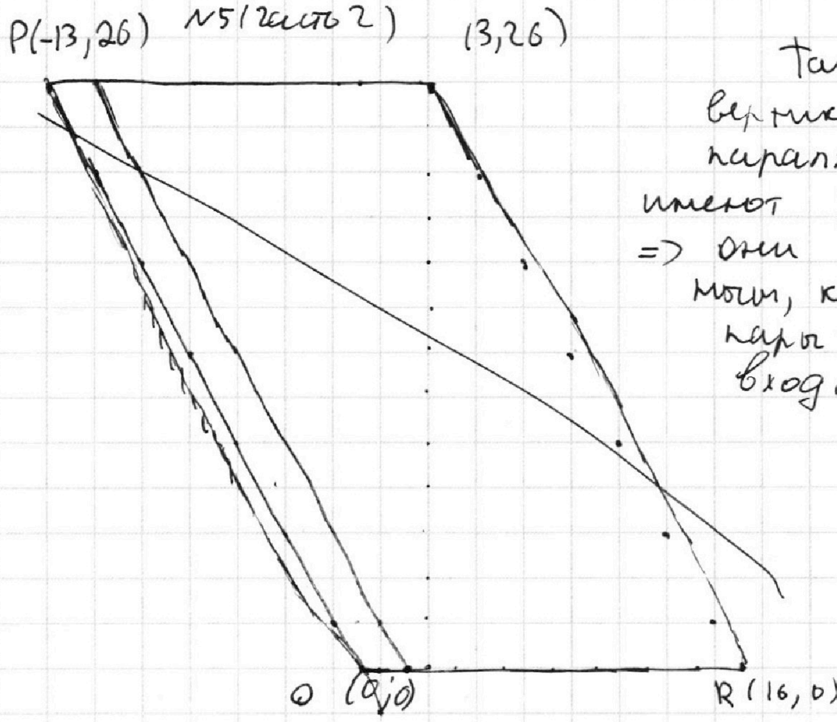
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

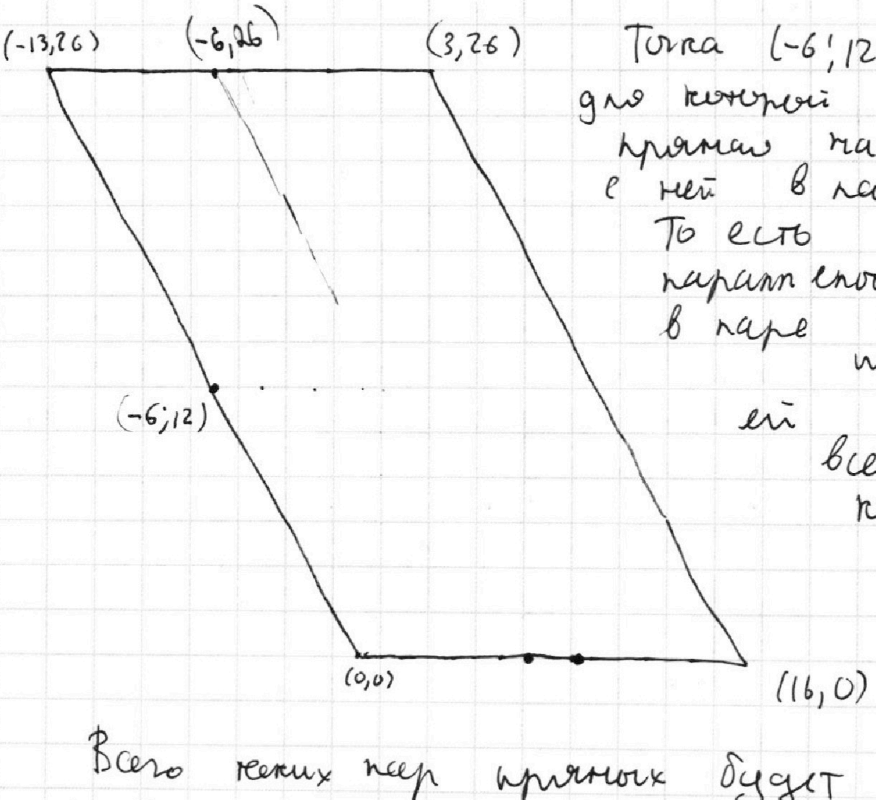
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 (часть 2)



Также заметим, что вертикальные стороны параллелограмма также имеют угловой коэф. 2 => => они параллельны прямым, которые составляют пары => они тоже туда входят



Точка (-6; 12) – ~~первая~~ самая правая точка, для которой существует прямая над 14, стоящая с ней в пар.
То есть левая стороны параллелограмма стоит в паре с (-6; 26), пересекающей через ей

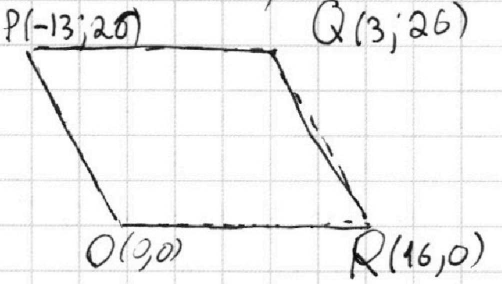
всего 27 целых коорд. по y

27·27 пар для каждой пары прямых

Всего таких пар прямых будет 10 (от 0 до 9 по x, если смотреть нижнюю сторону п/г
т.к. по x прямые находятся на расстоянии 7

Ответ: 27·27·10 = 7290 пар

№5 (часть 1)



$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ с целыми координатами

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$-13 \leq x_1, x_2 \leq 16$$
$$0 \leq y_1, y_2 \leq 26$$

Если у нас есть какая-то точка (x_1, y_1), то

~~пара~~ $-2x_1 - y_1 = 14 - y_2 - 2x_2$, где $-2x_1 - y_1$ – фикс.

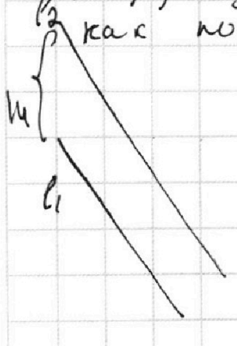
$\Rightarrow y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1$, это график прямой $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ для точки, точки, которые могут быть с ней в паре лежат на одной прямой

Причем коэф. угла наклона прямой равен $k = -2$ $\quad y_2 = -2 \cdot x_2 + 14 + 2x_1 + y_1$

Но точки с фикс. $-2x_1 - y_1$ тоже аналогично находятся на одной прямой

То есть: $\overbrace{y_2 + 2x_2}^{\text{прямая}} = 14 + \overbrace{2x_1 + y_1}^{\text{прямая}}$

$\Rightarrow$ корректной парой будут являться ~~прямые~~ точки, которые лежат на двух параллельных прямых (т.к. угловые коэффициенты одинаковые), причем одна на 14 выше как показано на рисунку (14)



Каждая точка прямой l_1 с каждой точкой прямой l_2 составляет корректную пару

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (часть 1)

$\begin{cases} ax+y-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (2) \end{cases}$

Рассмотрим сначала нер-во (2)

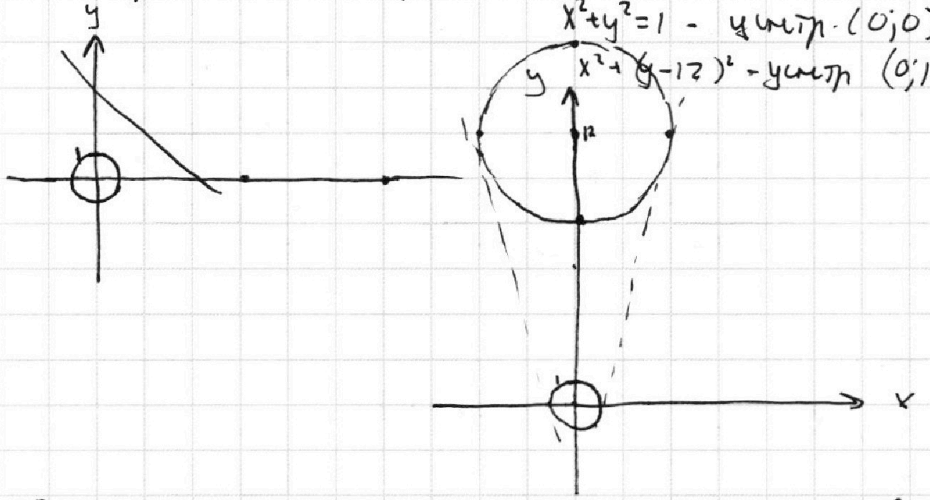
$x^2+y^2=1$ $\quad x^2+(y-12)^2=16$ - нулевые точки

- графики - окр. с рад 1 и 4

Начертим эти графики

$x^2+y^2=1$ - центр $(0;0)$ радиус 1

$x^2+(y-12)^2$ - центр $(0;12)$ радиус 4



В точках на окружности (2) зануляется, внутри окружности - отрицательно (т.к. графики не пересекаются, а внутри окр. отр.ищ., вне - полож.) => неравенство имеет бесконечно много решений, и это точки на окружностях и внутри них.

(1) это график - прямая

Если прямая пересечет хотя бы одну из окружностей, то будет бесконечно много решений у системы, т.к. ~~когда~~ подойдут все точки прямой внутри окружности, а по условию нужно ровно 2 решения => прямая не пересекает окружности, если прямая не касается окружности, то тогда с той окружностью нет ни одного решения. Прямая может касаться окружн. ровно в одной точке. Нам нужно 2 решения => => 2 точки касания => $ax+y-8b$ - прямая, которая является касательной к обеим окружностям.

У двух непересекающихся окружностей ровно 2 общие касательные.

Тогда у уравнений ниже должно быть по одному решению

~~$ax+bu$~~ $ax+y-8b=x^2+y^2-1$ $\qquad ax+y-8b=x^2+(y-12)^2-16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (часть 2)

$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + 8b - 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$

$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{5}{4} = 0$

Должно быть ровно одно решение, а это график окр.-ти

=> такое может быть только при радиусе 0

$\Rightarrow 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{5}{4} = 0$ $\qquad b = (\frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}) : 8$

$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad y = \frac{1}{2}$

$ax + y - 8b = x^2 + (y-12)^2 - 16$. Подставим x и y

$a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - 8b = \frac{a^2}{4} + \frac{23^2}{4} - 16$

$\frac{a^2}{4} - \frac{527}{4} + 16 = 8b \qquad \frac{a^2}{4} - \frac{483}{4} = 8b$

$b = (\frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}) \cdot 8 = (\frac{a^2}{4} - \frac{483}{4}) : 8$

$\frac{a^2}{4}$

$\frac{OB}{\sin\alpha}=2\cdot 13$ $\frac{OA}{\sin\beta}=2\cdot 13$ $\frac{AB}{\sin(180-\alpha-\beta)}=2\cdot 13$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)$

$\frac{7}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}=26$ $AB=26\cdot\sin(180-\alpha-\beta)=$

$2\sin\beta\cdot\sin\alpha=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta\ \sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha+$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha$ $+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

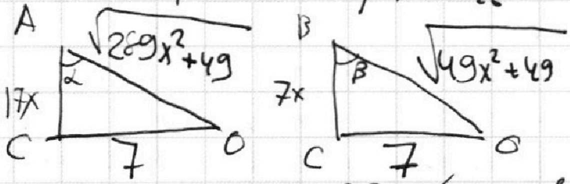
$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta+$

$+\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}=\frac{7}{26}$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\frac{14}{26}$



$\sin\beta=\frac{7}{7\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{289x^2+49}}$

$x^2+1>0$

289

$\sin\beta\cdot\sin\alpha=\frac{7}{26}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{7}{\sqrt{289x^2+49}}$

$26=\sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)}$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=81x^2-18x+1$

$-2\sqrt{9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2-6x+6x^2+6x+2}=75x^2-15x-2$

$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2)=5625x^4+225x^2+4-2250x^3-300x^2+60x$

$5589x^4-2214x^3+216x^2-111x^2+132x-4=0$

$3^5\cdot 23$ $3^3\cdot 2\cdot 41$ $37\cdot 3$ $3\cdot 4\cdot 11$

2214 : 9 = 246 : 3 = 82 = 2·41

5589 : 9 = 621 : 9 = 69

9·9·3·23

$3^5\cdot 23$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

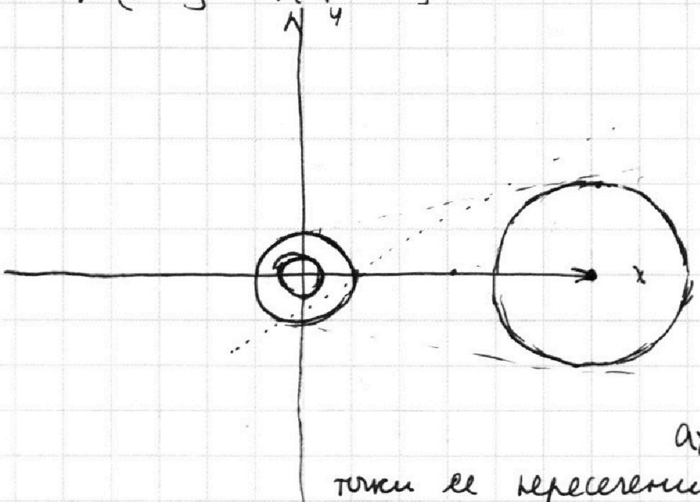
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6 $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \end{cases}$

$x^2+y^2-1 \le 0$

$x^2+y^2 \vee 1$



Подходят пары (x,y) которые лежат внутри окр. и на их контурах

Решениями второго нер-ва являются

$ax+y-8b=0$ – прямая => все точки ее пересечений и внутри окр. являются решениями => если прямая пересекает, то решений бесконечное число => прямая не должна пересекать => она может либо касаться, либо не пересекать, но н/

=> прямая касается обеих окружностей

$ax+y-8b=x^2+y^2-1$ $\quad$ $ax+y-8b=x^2+(y-12)^2-16$

$x^2-ax+y^2-y+8b-1=0$ $\quad$ $x^2-ax+(y-12)^2-y+8b-16=0$

$x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\quad$ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}+8b-1=0$

$-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+8b-1=0$

$-\frac{1}{4}$

$ax+y-8b=x^2+y^2-1$ $\quad$ $ax+y-8b=x^2+(y-12)^2-16$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}+8b-1=0$

одно решение

это возможно только когда

$-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}-12\right)^2$ $\quad$ $\frac{23}{2}^2$ $\quad$ $23 \cdot 23 = 69 + 46\_ = 529$ $\quad$ $\frac{529}{4}+\frac{2}{4}$

$16 \cdot 4 = 64$ $\quad$ $527 - 64 = 463$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$НОД(a,b)=1$ $a\in N$ $b\in N$ $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ Алгоритм Евклида

$НОД(a,b)=НОД(a;a-b)$

$НОД(a+b;a^2-7ab+b^2)=НОД(a^2-7ab+b^2;a+b)$

$=НОД(a^2-7ab+b^2;a^2-7ab+b^2-a-b)=НОД$ 35 147

$НОД(147,35)=(112,35)=(77,35)=(7,35)=(28,7)-(21,7)(14,7)(7,7)$

$НОД(a^2-7ab+b^2,a+b)=НОД(a^2-7ab+b^2-a-b,a+b)$

$a^2-7ab+b^2-k(a+b)=a+b$

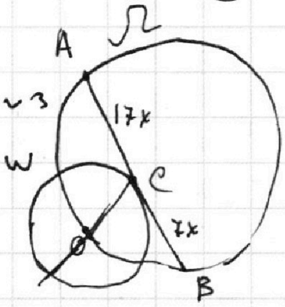
$a^2-7ab+b^2-(k+1)(a+b)=0$ $a+b\,\vdots\,m$

$a+b=x$ $ab=y$ $a^2-7ab+b^2\,\vdots\,m$

$x^2-2y-7y-(k+1)\cdot x=0$ $(a^2-2ab+b^2)-5ab+a+b$

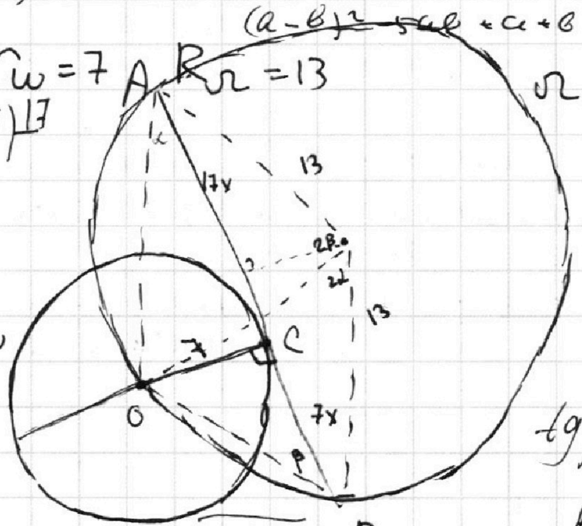
$(a-b)^2-5ab+a+b$

$26\cdot26=676$



$r_\omega=7$ $R_\Omega=13$

338 | 17

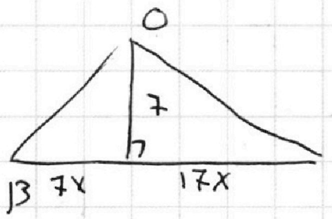


$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

$OB=\frac{7\cdot\sin}{\sin\beta}$

$OA=\frac{7}{\sin\alpha}$

$tg\beta=\frac{1}{x}$ $tg\alpha=\frac{7}{17x}$



$\sqrt{49x^2+49}$

$\sqrt{289x^2+49}$

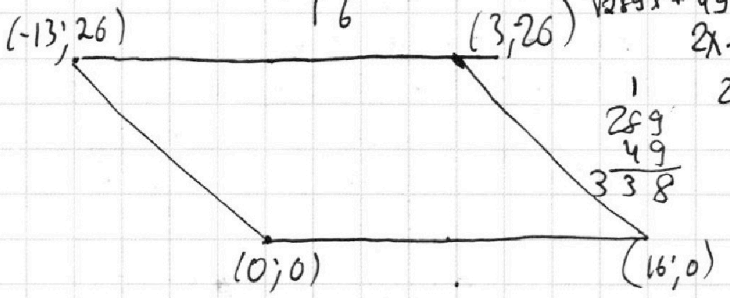
$A(x_1;y_1)$

$B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2(x_2-x_1)+y_2-y_1=14$

16



$289+49=338$

$676-49=627$

$m=k\cdot x$

$27\cdot27=729$

$a+b\underset{m}{\equiv}0$ $a^2-7ab+b^2\underset{m}{\equiv}0$ $b^2+7b^2+b^2\underset{m}{\equiv}0$ $b\,\vdots\,m$, то $a\,\vdots\,m\Rightarrow$

$a\underset{m}{\equiv}-b$ $b^2-7\cdot b(-b)+b^2\underset{m}{\equiv}0$ $9b^2\underset{m}{\equiv}0$ $\Rightarrow a+b\,\vdots\,m\Rightarrow$

$\Rightarrow b^2\,\vdots\,m$

$(b,m)=1$ b:

$28\cdot5=140$ $m\le9$ $4+5$

$25+16=41$ $4^2-7\cdot4\cdot5+5^2$

2 · −13 26

0 · 2 0 0

$\cancel{4x+2y=26}$ $0+26$ $0-26$

$y+2x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$ $bc \vdots 2^{17}7^{18}$ $ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$ $abc \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a = 2^{k_1}\cdot 7^{m_1}\cdot x_1$ $b = 2^{k_2}\cdot 7^{m_2}\cdot x_2$ $c = 2^{k_3}\cdot 7^{m_3}\cdot x_3$

$ab = 2^{k_1+k_2}\cdot 7^{m_1+m_2}$ $bc = 2^{k_2+k_3}\, 7^{m_2+m_3}$ $ac = 2^{k_1+k_3}\cdot 7^{m_1+m_3}$

$k_1+k_2 \geq 15$ $m_1+m_2 \geq 11$ $k_2+k_3 \geq 17$ $m_2+m_3 \geq 18$ $k_1+k_3 \geq 23$ $m_1+m_3 \geq 39$

$2(k_1+k_2+k_3) \geq 15+17+23$ $k_1+k_2+k_3 \geq \frac{55}{2}$ $k_1+k_2+k_3 \geq 23$

$2(m_1+m_2+m_3) \geq 11+18+39$ $m_1+m_2+m_3 \geq \frac{68}{2} = 34$

$a = 2^{15}7$ $b = 2\ 7$ $c = 2^8\ 7$ $a = 7^{21}\cdot 2$ $b = 2$ $c = 7^{18}$

$k_1+k_2+k_2+k_3-k_1-k_3$

$a+b \geq 15$ $b+c \geq 17$ $a+c \geq 23$ $a+b+c \geq 27{,}5 \geq 28$

$abc \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$ $a = 2^{10}7^{21}$ $c = 2^{13}7^{18}$ $b = 2^5$

$ab = 2^{10}\cdot 7^{21}\cdot 2^5 = 2^{15}7^{21}$ $bc = 2^{18}\cdot 7^{18}$ $ac = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$55 \mid 2$, $27{,}5$; $32+23=55$; $75\cdot 75 = 375$, 5625

$D/4 = 9-6 = 3$

$D = 15^2+2\cdot 75\cdot 4 =$

№4

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ $\uparrow^2$ Ограничения: $3x^2-6x+2 \geq 0$, $3x^2+3x+1 \geq 0$

$3x^2-6x+2-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}+3x^2+3x+1 = 81x^2-18x+1$

$-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 75x^2-15x-2$ $75x^2-15x-2 \leq 0$

$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x-6x+6x^2+6x+2) = 5625x^4$

$3x^2-6x+2 \geq 0$ $3x^2+3x+1 \geq 0$ $75x^2-15x-2 \leq 0$

$D/4 = 9-2\cdot 3 = 3$ $D = 9-12 < 0$ $D = 225+2\cdot 4\cdot 75 = 825 = 5^2\cdot 33$

$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ $x_{1,2} = \frac{15\pm 5\sqrt{33}}{150}$

$75+36 = 111$; $5625-36 = 5589$; $2250-36 = 2214$; $75\cdot 4 = 300$; $150\cdot 15 = 2250$; $75\cdot 8 = 600$; $825 \mid 25 = 33$

$+$ $-$ $+$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2) = 5625x^4+225x^2+4-$
$-2\cdot 75\cdot 15\cdot x^3-4\cdot 75x^2+60x$

$36x^4-36x^3+36x^2-72x+8 = 5625x^4-75x^2-2250x^3+60x+4$

$5589x^4-2214x^3-111x^2+132x+4 = 0$

$D = 169^2+627\cdot 289$

$338 \mid 2 = 169$; $289+338 = 627$; $627\cdot 289$: 5643, 5016, 1254, 181203

$x_1, 0$ $x_1, 1$ $x, 2$ $x, 3$

$3, 2, 1$

Если у нас есть

x_1, y_1

$-2x_1-y_1$, $-fix$

$-2x_1-y_1 = 14-2x_2-y_2$

$0,0$ $1,-2$ $0,0$

$y+2x = 0$
$y+2x = 3$